Christoph Duchhardt

Das Σ_1–Spektrum von Theorien mit Reflexion

2001

Inhaltsverzeichnis

Vorab

Die vorliegende Arbeit ist eine leicht überarbeitete Version meiner dem Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung am FB 10 – Mathematik und Informatik – der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster im Mai 2001 eingereichten Diplomarbeit.

Einleitung

Mathematik beschäftigt sich mit der Untersuchung von Strukturen aller Art – endliche Gruppen, reelle Zahlen, natürliche Zahlen usw. Die beste Möglichkeit, herauszufinden, ob eine Aussage in einer Struktur gültig ist, besteht darin, sie aus (in der Struktur wahren) Axiomen herzuleiten. Die abstrakte Analyse von Axiomensystemen wird Beweistheorie genannt, und die vorliegende Arbeit fällt in dieses Gebiet. Beweistheorie als mathematische Disziplin geht zurück auf David Hilbert und sein Programm, die gesamte Mathematik zu formalisieren und dann „mit finiten Methoden“ ihre Widerspruchsfreiheit zu zeigen, mithin das Gebäude der Mathematik auf festen Grund zu stellen. Seit Gödels Unvollständigkeitssätzen, die u.a. besagen, daß eine vernünftig starke mathematische Theorie ihre eigene Widerspruchsfreiheit eben *nicht* beweisen kann, weiß man, daß Hilberts Programm in diesem engen Sinne undurchführbar ist.
Mit Gentzens Arbeit, die den nicht-finiten Anteil beim Beweis der Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie erster Stufe, PA, durch eine Ordinalzahl (ε_0) charakterisiert, begann die Zeit der Ordinalzahlanalysen. Diese beschäftigen sich allgemein damit, einer vorgegebenen Theorie T Ordinalzahlen zuzuordnen, um die Stärke von T zu messen (eine Auswahl von verschiedenen charakteristischen Ordinalzahlen enthält [Ra99]). Man begann damit, Teilsysteme der Zahlentheorie der zweiten Stufe (welche ausreicht, um die klassische Mathematik zu formalisieren) zu untersuchen (vgl. z. B. [BFPS81]). Dabei spielt die Untersuchung von Π^1_1–Formeln eine wichtige Rolle, mit deren Hilfe man beispielsweise die Wohlfundiertheit von Relationen ausdrücken kann. Mit der Zeit erkannte man, angefangen mit Jäger, daß es technisch einfacher ist, Theorien der Mengenlehre zu betrachten. Der Satz, der die beiden Welten (Zahlentheorie und Mengenlehre) verbindet, stammt von Spector und Gandy und besagt, daß die Π^1_1–Relationen auf $\mathbb{N}$ gewissen Relationen in der konstruktiblen Welt L (genauer den $\Sigma_1^{\mathrm{L}_{\omega_1^{\mathrm{CK}}}}$–Relationen) entsprechen. Somit wandte sich das Interesse der Bestimmung von kleinsten konstruktiblen Modellen von $\Sigma_1^{\mathrm{L}_{\omega_1^{\mathrm{CK}}}}$–Relationen zu, also der Bestimmung der sogenannten „beweistheoretischen Ordinalzahl“.
Die in diesem Kontext interessanten Syteme sind Erweiterungen der Kripke-Platek-Mengenlehre KPω. Die Modelle von KPω sind außerdem in zweierlei Hinsicht wichtig: Zum einen sind sie natürliche Strukturen für eine allgemeine Rekursionstheorie (mit einem Grundbereich verschieden von $\mathbb{N}$), zum anderen sind die Axiome von KPω so vorsichtig gewählt, daß sie dem (etwas abstrakten) Begriff der Prädikativität genügen. Ein Existenzaxiom für eine Menge a wird prädikativ genannt, falls dabei nicht auf eine Gesamtheit von Mengen (der a selbst angehören könnte) bezug genommen wird (nach der Russell'schen Antinomie ist man vorsichtiger geworden). So wird in KPω im Vergleich zur Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ZF, die in der Mathematik gebräuchlich ist, das Potenz-

mengenaxiom komplett unterdrückt (denn dieses setzt definitiv die Kenntnis der Gesamtheit der Mengen voraus), und die Axiome der Kollektion und der Separation werden auf Δ_0–Formeln eingeschränkt, womit sie absolut bzgl. transitiven Modellen werden und somit unabhängig vom jeweiligen Modell dieselbe Bedeutung haben. In der L-Hierarchie haben nun KPω und die Theorie Π_2–Ref, die entsteht, wenn man in KPω die Δ_0–Kollektion durch die Axiome der Π_2–Reflexion ersetzt, dieselben Modelle, so daß es natürlich erscheint, auch für größeres m die Systeme Π_m–Ref zu betrachten.
Reflexionsaxiome jeglicher Art bringen die Philosophie zum Ausdruck, daß das Mengenuniversum unbeschreibbar ist derart, daß jede Eigenschaft, die darin gilt, auch schon auf eine Menge herunterreflektiert wird. Reflektierende Ordinalzahlen sind von Bedeutung, da eine Analyse von Π^1_2–Komprehension (derzeit das non plus ultra) bzw. der mengentheoretischen Entsprechung Σ_1–Separation auf jeden Fall deren Handhabung voraussetzt (siehe [Ra99] oder [Mö00b]).
Die Analyse von Theorien mit Reflexion soll nun – in eingeschränkter Form – in dieser Diplomarbeit erfolgen. Die Einschränkung besteht darin, daß wir nur Σ_1–Ordinalzahlen, also minimale konstruktible Modelle für Σ_1–Formeln, berechnen (es wird also $|\mathrm{T}|_{\Sigma_1}$ bestimmt, wie wir sagen werden). Diese sind wesentlich gröber als die beweistheoretischen Ordinalzahlen. Diese Einschränkung macht die Techniken aber durchsichtiger; außerdem modellieren unsere Untersuchungen einen (von dann vielen) Schritt(en) bei der Bestimmung des kleinsten $\Sigma_1^{\mathrm{L}_{\omega_1^{\mathrm{CK}}}}$–Modelles. Weiter entspricht $|\mathrm{T}|_{\Sigma_1}$ dem Spektrum der jeweiligen Theorie, d. h. der Menge der Ordinalzahlen mit guter Σ_1–Definition. Das Spektrum ist von Interesse, da sich seine Elemente explizit in der Theorie als existent nachweisen lassen. Im Sonderfall KPω fällt zudem eine „echte“ Ordinalzahlanalyse ab, da sich das erste Modell dieser Theorie gerade bei $\mathrm{L}_{\omega_1^{\mathrm{CK}}}$ findet.
Der Ansatz, dem nachgegangen wird, ist neu und stammt von Michael Möllerfeld ([Mö00a]), die Ideen dazu finden sich implizit in Rathjens [Ra94b]. Er orientiert sich stark an der Semantik und verwendet nur rekursive Ordinalzahlen. Da keine Notwendigkeit besteht, Ordinalzahlen rekursiv auf ω zu codieren, benötigt man auch nicht mehr die herkömmlichen Bezeichnungssysteme. Auch für KP-Theorien anderer Art, z. B. KPi oder KPℓ läßt sich der Ansatz, in entsprechender Form, anwenden.

Wegweiser

In Kapitel 1 werden die wichtigsten Begriffe und Ideen eingeführt sowie der Zusammenhang zwischen dem Titel der Arbeit und den restlichen Abschnitten zu erklären versucht. Die eigentliche Arbeit ist in zwei Teile getrennt, in deren erstem die in der Einleitung erwähnten Theorien mit Reflexion untersucht werden. Teil II beschäftigt sich mit denselben Theorien, allerdings mit eingeschränkter Fundierung. Er basiert wesentlich auf [Ra92]. Beide Teile sind in Kapitel mit den Namen „Schnittelimination“ und „Wohlordnungsbeweis“ unterteilt, in denen jeweils die gesuchte Ordinalzahl von oben bzw. von unten abgeschätzt wird.

Danksagungen

Daß es Spaß gemacht hat, diese Arbeit zu schreiben, liegt vor allem an der durchweg guten Atmosphäre innerhalb des Logik-Institutes. Dafür möchte ich allen (auch ehemaligen) Dozenten, Mitarbeitern etc. danken. Sie waren auch bei kleineren oder größeren fachlichen Problemen stets eine Hilfe.
Mein besonderer Dank gilt den Betreuern der Arbeit, Prof. Dr. Wolfram Pohlers und Michael Möllerfeld. Sie haben mein Interesse an der Beweistheorie in ihrer jeweils begeisternden Art geweckt und zunehmend vergrößert. Unzählige gute Hinweise halfen sehr beim Verständnis der Materie.
In technischen Fragen schließlich wäre ich ohne Ingo Lepper, den local TEX-wizard, viele Male verloren gewesen.
Großen Dank schulde ich außerdem allen meinen Verwandten, vor allem natürlich meinen Eltern, für ihre andauernde Unterstützung.

1 Grundlagen

1.1 Konventionen

Da wir im folgenden oft innerhalb von Theorien der Mengenlehre bzw. deren Modellen argumentieren, müssen wir einen formalen sprachlichen Rahmen fixieren. Wie üblich bedienen wir uns der erststufigen Sprache $\mathcal{L}_\in$ mit $\in$ als einzigem Relationszeichen (außer natürlich $=$). Eine Formel in dieser Sprache (fortan „Sprache der Mengenlehre") heiße Δ_0, falls sämtliche in ihr auftretenden Quantoren beschränkt sind, d. h. von der Form $(\forall x \in a)$ oder $(\exists x \in a)$. Darauf aufbauend entwickelt man die bekannte Hierarchie der Formelklassen:

$$\begin{aligned} F \in \Sigma_k \quad &\Longleftrightarrow \quad F = \exists x_1 \forall x_2 \ldots F_0(\vec{x}) \\ F \in \Pi_k \quad &\Longleftrightarrow \quad F = \forall x_1 \exists x_2 \ldots F_0(\vec{x}) \end{aligned}$$

jeweils mit einem alternierenden Strang von k Quantoren und $F_0 \in \Delta_0$. F wird Σ genannt, wenn es keine unbeschränkten Allquantoren enthält, Negationen von Σ–Formeln heißen Π–Formeln. Ist T irgendeine Theorie mit

$$\mathrm{T} \vdash \phi \leftrightarrow \varphi \quad \text{für eine } \Sigma_{(k)}\text{–Formel } \phi \text{ und eine } \Pi_{(k)}\text{–Formel } \varphi,$$

so liegen ϕ und φ in der Klasse $\Delta^{\mathrm{T}}_{(k)}$.
Ist F eine Formel und a eine Menge, so entsteht F^a aus F, indem man in F alle unbeschränkten Quantoren auf a beschränkt. F^a ist also immer Δ_0. Für transitives, nichtleeres a werden wir stattdessen auch oft $a \models F$ schreiben. Ist Ψ eine Formel (meistens eine Eigenschaft, die eine Klasse von Mengen beschreibt), so ist F^Ψ derjenige Ausdruck, der entsteht, wenn man alle unbeschränkten Auftreten von $\forall x\, A$ durch $\forall x\, (\Psi(x) \rightarrow A)$ und analog alle unbeschränkten Auftreten von $\exists x\, A$ durch $\exists x\, (\Psi(x) \wedge A)$ ersetzt. Natürlich ist F^Ψ nicht zwangsläufig Δ_0.
Mit φ, ψ und großen lateinischen Buchstaben vom Anfang des Alphabets (vor allem mit F) bezeichnen wir Formeln aller Art. Um darin auftretende freie Variablen oder Konstanten (aus einer dann erweiterten Sprache) zu kennzeichnen, werden wir $F(\vec{x}), F(\vec{c})$ o. ä. schreiben.
Mit Ω sowie kleinen griechischen Buchstaben (vornehmlich vom Anfang des Alphabets) bezeichnen wir Ordinalzahlen. Das kleinste Element einer Klasse X von Ordinalzahlen wird mit μX bezeichnet. Ist E eine Eigenschaft von Ordinalzahlen, so ist $\mu\alpha.\, E(\alpha)$ eine Abkürzung für $\mu\{\alpha \mid E(\alpha)\}$.
Abgekürzte Formeln werden wir oft serifenlos schreiben, z. B. $\alpha \in \mathsf{Lim}$, um auszudrücken, daß α Limeszahl ist. In diesen Fällen ist die ausführliche Formel klar (oder leicht nachzuschlagen).
Bezüglich der in der Mathematik üblichen Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ZF sowie diverser mengentheoretischer Begriffe sei auf [Jec97] verwiesen.
Die Buchstaben m und n werden die ganze Arbeit hindurch für den Anteil der Relfexion bzw. der Fundierung in der jeweils untersuchten Theorie reserviert.

1.2 Grundbegriffe

Wie schon in der Einleitung angedeutet, kommt der Theorie KPω und ihren transitiven Modellen, den zulässigen Mengen, eine wichtige Rolle zu. Deshalb wollen wir zunächst die Axiome vorstellen.

1.2.1 Definition. Die Theorie KPω wird durch folgende Axiome (bzw. deren Allabschlüsse) charakterisiert:

(Ext)	$\forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$
(Fund)	$\exists x\,\varphi(x) \rightarrow \exists x\,[\varphi(x) \wedge (\forall y \in x)\neg\varphi(y)]$ für alle Formeln φ
(Paar)	$\exists x\,(a \in x \wedge b \in x)$
(Vm)	$\exists x(\forall y \in x)(\forall z \in y)(z \in x)$
(Δ_0–Sep)	$\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(y))$ für alle Δ_0–Formeln φ
(Δ_0–Koll)	$(\forall x \in a)\exists y\,\varphi(x,y) \rightarrow \exists z(\forall x \in a)(\exists y \in z)\varphi(x,y)$ für $\varphi \in \Delta_0$
(Ue)	$\exists \alpha\, \mathsf{Lim}(\alpha)$

Dabei ist das Unendlichkeitsaxiom für das „ω“ im Namen der Theorie verantwortlich.

Bemerkung. Die Axiome, die die Stärke von KPω ausmachen, sind die Δ_0–Kollektion und die Fundierung.

1.2.2 Definition. Eine Menge z heißt *zulässig*, falls z ein transitives Modell von KP ist. Wir werden allerdings nur solche zulässigen Mengen betrachten, die auch ω enthalten.

Folgerungen aus diesen Axiomen und vieles mehr zur Zulässigkeit findet sich in [Ba75].

Wir wollen nun die Klasse der konstruktiblen Mengen, L, einführen. L ist in gewisser Weise die kleinste transitive KPω-Welt, da für jedes transitive Modell $\mathcal{M}$ dieser Theorie, das alle Ordinalzahlen enthält, bereits $\mathrm{L} \subseteq \mathcal{M}$ gilt. Dies ist nicht verwunderlich, besteht L doch nur aus einem Minimum an Mengen, die sich aus den Ordinalzahlen definieren lassen. Wir werden ausschließlich in L arbeiten, wofür Lemma 1.3.5 verantwortlich ist.

1.2.3 Definition. Wie üblich definieren wir die Schichten des konstruktiblen Universums L wie folgt (vgl. auch z. B. [Dev84], [Jec97])

$$\mathrm{L}_0 = \emptyset$$
$$\mathrm{L}_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathrm{L}_\xi$$
$$\mathrm{L}_{\alpha+1} = \mathsf{def}(\mathrm{L}_\alpha).$$

Dabei sei $\mathsf{def}(\mathrm{L}_\alpha)$ die Menge derjenigen Mengen, die sich über L_α definieren lassen, also $a \in \mathsf{def}(\mathrm{L}_\alpha) \Leftrightarrow a = \{x \in \mathrm{L}_\alpha \mid \mathrm{L}_\alpha \models \varphi(x,\vec{a})$ für Parameter $\vec{a} \in \mathrm{L}_\alpha$ und eine Formel φ $\}$. Dann setzt man

$$\mathrm{L} = \bigcup_{\alpha \in \mathsf{On}} \mathrm{L}_\alpha.$$

Mit $|a|$ bezeichnen wir den L-Rang einer konstruktiblen Menge a, d. h.

$$|a| = \mu\alpha.\, a \in \mathrm{L}_{\alpha+1}.$$

1.2.4 Definition. Eine Ordinalzahl α heißt *zulässig*, falls L_α zulässig ist. Eine (rekursionstheoretische) Folgerung ist, daß α unter allen α–rekursiven Funktionen abgeschlossen ist. Es heißt $f : \alpha \rightarrow \alpha$ dabei *α–rekursiv*, falls f einen Σ_1–Graphen auf L_α hat, d. h. falls es eine Σ_1–Formel $\varphi_f(x,y)$ gibt, so daß

$$f(\xi) = \zeta \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{L}_\alpha \models \varphi_f(\xi,\zeta).$$

Bei $\omega_1^{\mathrm{CK}} := \sup\{\mathsf{otp}(\prec) \mid \prec \text{ ist rekursive Wohlordnung auf } \omega\}$ findet sich das kleinste Modell von KPω in der konstruktiblen Welt.

Es gibt viele Möglichkeiten, zulässige (oder „rekursiv reguläre") Ordinalzahlen zu definieren. [Ba75], [Dev84], [Hin78] und [RA74] bieten einen Überblick. Im folgenden werden die Schichten des konstruktiblen Universums eine entscheidende Rolle spielen. Deshalb erwähnen wir hier einige Eigenschaften ihrer Konstruktion (siehe [Dev84, II 2]).

1.2.5 Lemma. *Sei $H(x,\alpha)$ die Formel „$x = \mathrm{L}_\alpha$". Dann gilt*

(i) *Die Formel $H(x,\alpha)$ ist Δ_1^{KP}.*

(ii) *Die Klasse H ist uniform $\Delta_1^{\mathrm{L}_\lambda}$ für $\omega < \lambda \in \mathsf{Lim}$.*

(iii) *Ist z zulässig und $\lambda = \sup(\mathsf{On} \cap z)$, so ist $\mathrm{L}^z = \mathrm{L}_\lambda$,*

wobei wir mit L^z die Menge $\{a \in z \mid (\exists \alpha \in z)(a \in \mathrm{L}_\alpha)^z\}$ bezeichnen.

Abschließend möchten wir einige besondere (weil starke) Klassen von zulässigen Ordinalzahlen definieren.

1.2.6 Definition. α heißt *rekursiv unerreichbar*, falls α zulässiger Limes von zulässigen Ordinalzahlen ist.
α heißt *rekursiv Mahlo*, falls es zu jeder α–rekursiven Funktion f ein zulässiges $\beta < \alpha$ gibt, das unter f abgeschlossen ist.

Unsere ständigen Begleiter werden die reflektierenden Ordinalzahlen sein:

1.2.7 Definition. Sei $\mathcal{F}$ eine Formelklasse und $X \subseteq \mathsf{On}$. Eine Ordinalzahl α heißt *$\mathcal{F}$–reflektierend auf X*, falls

$$\mathrm{L}_\alpha \models F \quad \Longrightarrow \quad (\exists \beta \in X \cap \alpha)\, \mathrm{L}_\beta \models F \quad \text{für alle } F \in \mathcal{F}.$$

α heißt *$\mathcal{F}$–reflektierend*, falls α $\mathcal{F}$–reflektierend auf On ist. Dabei sind in den F Parameter erlaubt.

Reflektierende Ordinalzahlen, ihre Eigenschaften und der Zusammenhang mit induktiven Definitionen werden in [RA74] ausführlich erläutert. Hier stellen wir nur die wichtigsten Ergebnisse zusammen:

1.2.8 Lemma. *Es gilt*

(i) *α ist Π_2–reflektierend auf On $\Leftrightarrow$ $\omega < \alpha$ ist zulässig.*

(ii) *α ist Π_k–reflektierend auf X $\Leftrightarrow$ α ist Σ_{k+1}–reflektierend auf X.*

(iii) *α ist Σ_2–reflektierend auf X $\Leftrightarrow$ α ist Limespunkt von Elementen in X, d. h. $\alpha = \sup(X \cap \alpha)$.*

(iv) *Sei $k \geq 3$. α ist Π_k–reflektierend auf X $\Leftrightarrow$ α ist Π_k–reflektierend auf $X \cap \mathsf{Ad}$.*

Beweis. (i) wird am Ende des nächsten Abschnittes bewiesen. (ii) ist trivial, da Parameter erlaubt sind. In (iii) seien zunächst α ein Limespunkt und $\varphi \in \Pi_1$. Gilt $\mathrm{L}_\alpha \models \varphi(\vec{a})$, so finden sich die Parameter $\vec{a}$ bereits in einem L_β mit $\beta < \alpha$. Wegen der Abwärtspersistenz von Π_1–Formeln gilt dann aber schon φ auf L_β. Sei α nun Δ_0–reflektierend auf X und sei $\beta < \alpha$. Aus $\mathrm{L}_\alpha \models \beta \notin \beta$ folgt, daß es ein $\gamma \in X \cap \alpha$ gibt mit $\mathrm{L}_\gamma \models \beta \notin \beta$, also $\beta < \gamma$. Zu (iv) überlegt man sich, daß es einen (parameterfreien) Π_3–Satz σ_0 gibt, der ausdrückt „ich bin zulässig“ (siehe 2.4 in [RA74]). □

Bemerkung. Die Π_2–reflektierenden Ordinalzahlen sind also gerade die zulässigen, diejenigen, die Π_2–reflektierend auf die Π_2–reflektierenden sind, sind gerade die rekursiven Mahlo-Zahlen. Π_3–reflektierende sind größer als jede sinnvolle Iteration dieses Prozesses.

1.3 Motivation

Im ersten Teil dieser Arbeit werden die Theorien Π_m–Ref untersucht, wobei wir ab jetzt immer $m \geq 2$ annehmen wollen (denn der Fall $m = 1$ macht wenig Sinn, Π_1–Reflexion ist einfach eine Persistenzaussage). Sie entstehen aus KPω dadurch, daß man das Axiomschema der (Δ_0–Koll) durch das der Π_m–Reflexion, welches die Gestalt

(Π_m–Ref) $\quad \varphi(\vec{x}) \rightarrow \exists z\, z \models \varphi(\vec{x})$
für alle Π_m–Formeln φ (mit freien Variablen $\vec{x}$)

hat, ersetzt. Dabei ist „$z \models \varphi(\vec{x})$“ jetzt und in Zukunft als Abkürzung für

$$z \neq \emptyset \wedge \mathsf{tran}(z) \wedge \vec{x} \in z \wedge \varphi(\vec{x})^z$$

zu lesen.
Offensichtlich ist Δ_0–Kollektion ein Spezialfall der Π_2–Reflexion.
Man bemerkt, daß man mehr über das Aussehen des z, auf welches reflektiert wird, sagen kann. Dies zeigt die folgende Reihe von Lemmata.

1.3.1 Lemma. *Es gilt*

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash \varphi^{\mathrm{L}} \rightarrow \exists\alpha\exists z\, [\alpha \neq 0 \wedge z = \mathrm{L}_\alpha \wedge z \models \varphi]$$

für Π_m–Formeln φ und somit

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash (\Pi_m\text{–Ref})^{\mathrm{L}}.$$

Beweis. Wir unterscheiden die Fälle $m = 2$ und $m > 2$:

- $m = 2$. Sei
$$\varphi^{\mathrm{L}} \equiv (\forall x \in \mathrm{L})(\exists y \in \mathrm{L})\; \varphi_0(x, y, \vec{a})$$
mit Parametern $\vec{a}$, wobei diese Schreibweise einige Abkürzungen enthält. Es gilt damit aber auch
$$\Pi_2\text{–Ref} \vdash \varphi^{\mathrm{L}} \rightarrow \forall\alpha(\forall x \in \mathrm{L}_\alpha)\exists\beta(\exists y \in \mathrm{L}_\beta)\; \varphi_0(x, y, \vec{a}).$$
Wir wollen nun das β uniform für alle $x \in \mathrm{L}_\alpha$ finden. Dazu wenden wir Δ_0–Kollektion an und erhalten
$$\Pi_2\text{–Ref} \vdash \varphi^{\mathrm{L}} \rightarrow \forall\alpha\exists z(\forall x \in \mathrm{L}_\alpha)(\exists\beta \in z)((\exists y \in \mathrm{L}_\beta)^z)\; \varphi_0(x, y, \vec{a}).$$

Formuliert man „$(\exists y \in \mathrm{L}_\beta)^z$“ aus, so erhält man $(\exists y \in z)(\exists Y \in z)(Y = \mathrm{L}_\beta \wedge y \in Y)^z$. Da hier nur $\exists$–Quantoren vorkommen (auch in „$Y = \mathrm{L}_\beta$“), und unsere Theorie Aufwärtspersistenz versteht, erhält man weiter

$$\Pi_2\text{–Ref} \vdash \varphi^{\mathrm{L}} \to \forall\alpha\exists z(\forall x \in \mathrm{L}_\alpha)(\exists\beta \in z)(\exists y \in \mathrm{L}_\beta)\ \varphi_0(x, y, \vec{a}),$$

und mit $o(z) := \sup\{\xi \mid \xi \in z\}$ als Beispiel für das folgende γ auch

$$\Pi_2\text{–Ref} \vdash \varphi^{\mathrm{L}} \to \forall\alpha\exists\gamma(\forall x \in \mathrm{L}_\alpha)(\exists\beta \in \gamma)(\exists y \in \mathrm{L}_\beta)\ \varphi_0(x, y, \vec{a}),$$

woraus wiederum

$$\Pi_2\text{–Ref} \vdash \varphi^{\mathrm{L}} \to \underbrace{\forall\alpha\exists\gamma(\forall x \in \mathrm{L}_\alpha)(\exists y \in \mathrm{L}_\gamma)\ \varphi_0(x, y, \vec{a})}_{=\chi}$$

folgt. Da χ (auch nach Auflösung der Abkürzungen, hier nutzt man Lemma 1.2.5 (i) aus) wieder Π_2 ist, und weil Π_m–Ref $\vdash \forall\alpha\exists x\,(x = \mathrm{L}_\alpha)$, kann man Reflexion anwenden, und es ergibt sich

$$\Pi_2\text{–Ref} \vdash \varphi^{\mathrm{L}} \to \exists z\ [z \models \big(\chi \wedge \forall\alpha\exists x(x = \mathrm{L}_\alpha)\big)].$$

Jetzt lösen wir „$z \models \chi$“ durch

$$\begin{aligned} z \models \forall\alpha\exists\gamma \big[\forall X\forall Y \big(&X = \mathrm{L}_\alpha \wedge Y = \mathrm{L}_\gamma \to \\ &(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\varphi_0(x, y, \vec{a})\big)\big] \end{aligned}$$

auf und sehen, daß wir wieder zu $\mathrm{L}_{o(z)}$ übergehen können (da $\mathrm{L}_{o(z)} \subseteq z$ wegen $z \models \forall\alpha\exists x\,(x = \mathrm{L}_\alpha)$ gilt). Man erhält also

$$\begin{aligned} \Pi_2\text{–Ref} \vdash &\varphi^{\mathrm{L}} \to \exists z\ [z \neq \emptyset \wedge \mathsf{tran}(z) \\ &\wedge \mathrm{L}_{o(z)} \models \forall\alpha\exists\gamma(\forall x \in \mathrm{L}_\alpha)(\exists y \in \mathrm{L}_\gamma)\ \varphi_0(x, y, \vec{a})], \end{aligned}$$

und damit auch

$$\begin{aligned} \Pi_2\text{–Ref} \vdash \varphi^{\mathrm{L}} \to \exists\alpha\exists z\,(&\alpha \neq 0 \wedge z = \mathrm{L}_\alpha \\ &\wedge z \models \forall x\exists y\varphi_0(x, y, \vec{a})). \end{aligned}$$

- $m > 2$. Wir zitieren wieder [RA74], deren Satz 2.4 sagt, daß es einen Π_3–Satz σ_0 (ohne Parameter) gibt, der sagt „ich bin zulässig“. Also gilt auch Π_m–Ref $\vdash \sigma_0$ und somit

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash \underbrace{\varphi^{\mathrm{L}} \wedge \sigma_0}_{=\chi}.$$

Wie man leicht sieht, ist mit φ auch φ^{L} und somit $\chi \in \Pi_m$, und man erhält mit Reflexion

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash \varphi^{\mathrm{L}} \to \exists z[z \models \chi].$$

Nach Definition von σ_0 ist dieses z zulässig, und „$z \models \varphi^{\mathrm{L}}$“ bedeutet nichts anderes als $\mathrm{L}^z \models \varphi$. Für zulässiges z ist L^z aber gerade ein L_γ (siehe 1.2.5 (iii)), und es ergibt sich

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash \varphi^{\mathrm{L}} \to \exists x\exists\gamma\,[x = \mathrm{L}_\gamma \wedge x \models \varphi].$$

$\square$

Für alle anderen Axiome φ gilt ebenfalls $\mathrm{KP}\omega \vdash \varphi^{\mathrm{L}}$, siehe [Ba75, II 5.5]. Damit hat man insgesamt

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash \Pi_m\text{–Ref}^{\mathrm{L}}.$$

Dann gilt auch

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \Pi_m\text{–Ref} \vdash \varphi^{\mathrm{L}},$$

denn :
Sei $\mathcal{M}$ ein Modell von Π_m–Ref. Betrachte nun $\mathrm{L}^{\mathcal{M}}$. Dies ist auch ein Modell von Π_m–Ref wegen $\Pi_m\text{–Ref} \vdash \Pi_m\text{–Ref}^{\mathrm{L}}$. Mit $\Pi_m\text{–Ref} \vdash \varphi$ folgt dann auch $\mathrm{L}^{\mathcal{M}} \models \varphi$, d. h. $\mathcal{M} \models \varphi^{\mathrm{L}}$.
Also kann man insgesamt festhalten, daß man immer schon auf „schöne" L_α reflektieren kann in dem Sinne, daß für Π_m–Formeln φ gilt

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \Pi_m\text{–Ref} \vdash \exists\alpha\exists z\,(z = \mathrm{L}_\alpha \wedge \varphi^z).$$

Wir möchten nun unsere weitere Vorgehensweise motivieren.

1.3.2 Definition. Sei T eine Theorie der Mengenlehre und $\mathcal{F}$ eine Formelklasse. Dann definieren wir

$$|\mathrm{T}|_{\mathcal{F}} := \sup\{|F| \mid F \in \mathcal{F}\text{–Kons}(\mathrm{T})\},$$

wobei wir mit $|F|$ das kleinste α mit $\mathrm{L}_\alpha \models F$ bezeichnen wollen, falls ein solches existiert. Außerdem ist

$$\mathcal{F}\text{–Kons}(\mathrm{T}) = \{F \in \mathcal{F} \mid \mathrm{T} \vdash F\} \quad \text{die Menge der } \mathcal{F}\text{–Konsequenzen von T.}$$

1.3.3 Lemma. *Es gilt*

$$|\mathrm{T}|_{\Sigma_1} = \mu\alpha.\mathrm{L}_\alpha \models \Sigma_1\text{–Kons}(\mathrm{T}).$$

Beweis. Aufwärtspersistenz von Σ_1–Formeln. □

Bemerkung. Oft wird dies auch als Definition verwendet. Wir bevorzugen unsere, um folgendes zu beweisen:

1.3.4 Lemma. *Es gilt*

$$|\Pi_m\text{–Ref}|_{\Sigma_1} = |\Pi_m\text{–Ref}|_{\Pi_m}.$$

Beweis. Es ist nur „$\geq$" zu zeigen. Sei dazu $\varphi \in \Pi_m$ mit $\Pi_m\text{–Ref} \vdash \varphi$. Wie wir gesehen haben (mit Lemma 1.3.1) gilt dann auch

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash \exists\alpha\exists x(\alpha \neq 0 \wedge x = \mathrm{L}_\alpha \wedge x \models \varphi)$$

mit einem $\alpha < |\Pi_m\text{–Ref}|_{\Sigma_1}$ und damit $\mathrm{L}_\alpha \models \varphi$, was schon die Behauptung ist. □

Daß bei diesen Definitionen die Beschränkung auf L nicht schwer wiegt, zeigt

1.3.5 Lemma (Lévy-Shoenfield Absolutheitslemma). *Es sei σ ein Σ_1–Satz $\exists x\varphi(x)$ (mit x als einziger freien Variable in φ). Dann gilt (beweisbar etwa in* ZFC*)*

$$\exists x\varphi(x) \to (\exists x \in \mathrm{L})\varphi(x)$$

und mithin

$$\sigma \leftrightarrow \mathrm{L} \models \sigma.$$

Beweis. Siehe z. B. [Jec97, Theorem 36].

Hat man also die Existenz einer Menge, die sich mittels einer Δ_0–Formel beschreiben läßt, nachgewiesen, so ist diese bereits konstruktibel. Da man über die Mengen in L leichter sprechen kann, macht es Sinn, von Anfang an alle Überlegungen auf L zu beschränken.

In den nachfolgenden Ausführungen ist T eine von uns untersuchte Theorie der Mengenlehre.

Wir müssen uns zunächst der Aufgabe stellen, zu einem $F \in \Sigma_1$ mit $\mathrm{T} \vdash F$ ein möglichst kleines Modell in der L-Hierarchie zu finden. Dabei wissen wir lediglich, daß F von T bewiesen wird. Bedienen wir uns eines formalen Kalküls à la Tait, so haben wir eine endliche Herleitung

$$\vdash \neg \mathrm{Ax}_1, \ldots, \neg \mathrm{Ax}_k, F$$

vorliegen. Außerdem weiß man

$$\vdash \mathrm{Ax}_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, k.$$

Führt man nun zusätzlich eine Schnittregel (cut) ein, so kann man sukzessive die Axiome wegschneiden und erhält $\vdash F$ mit endlicher Herleitungslänge. Versucht man jetzt, aus der Herleitbarkeit einer Formel F in einem solchen Kalkül auf die Gültigkeit von F in einem L_α zu schließen, so bemerkt man, daß während der Herleitung nicht beliebig komplexe Formeln auftreten dürfen. Im speziellen Fall $\mathrm{T} = \Pi_m$–Ref dürfen dort z. B. nur Π_m–Formeln vorkommen (siehe Lemma 2.3.5). Also versucht man, die Schnitte – zumindest partiell, d. h. bis zu einer gewissen Grenze – zu eliminieren. An dieser Stelle muß man einsehen, daß dies nicht ohne weiteres funktioniert: Die Fundierungsaxiome (die beliebig große Komplexität besitzen können) haben kein symmetrisches Gegenstück (im Gegensatz zu den übrigen Regeln, es sind z. B. ($\forall$) und ($\exists$) symmetrisch). Der Trick zur Lösung des Problems ist aus der erststufigen Zahlentheorie PA bekannt (dort bereitet das Induktionsaxiom die entsprechenden Probleme): Man führt dort eine ω–Regel der Gestalt

$$\frac{\vdash^{\alpha_k}_{l} \Gamma, A(\underline{k}) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}}{\vdash^{\alpha}_{l} \Gamma, \forall x A(x)}$$

ein. Diese erlaubt es, alle Instanzen des Induktionsschemas herzuleiten, so daß man Induktion gar nicht mehr als Axiom benötigt (dazu siehe z. B. [Poh89]). Die Kehrseite der Medaille ist, daß man sich nun unendliche Herleitungslängen eingehandelt hat. Wie wir sehen werden, ist auch bei uns ein solches „halbformales" System erfolgreich. In Kapitel 2 wird ersichtlich, daß man die Größe der Herleitungslängen (auch nach partieller Schnittelimination) leicht beschränken kann, so daß nur noch eine Beziehung zwischen diesen und minimalen Modellen in L herzustellen ist, um schließlich obere Schranken für $|\mathrm{T}|_{\Sigma_1}$ zu erhalten. Das Prinzip, mit dem diese Beziehung gefunden wird, ist das Neuartige der Arbeit. Dazu sei zur Theorie T die Ordinalzahl $\Omega_\mathrm{T} := |\mathrm{T}|_\infty$ definiert als kleinstes α, so daß L_α Modell von T ist. Diese Bezeichnung gilt für den Rest dieses Textes. Da im Zusammenhang stets klar ist, auf welche Theorie sich Ω_T bezieht, wird das $_\mathrm{T}$ in Zukunft weggelassen. Alle betrachteten Systeme T haben ihr minimales Modell bei einer zulässigen Ordinalzahl, und für solche gilt

$$|\mathrm{T}|_{\Sigma_1} < \Omega.$$

Es ist nämlich für rekursiv aufzählbares T die Menge der Codes der Σ_1–Konsequenzen, $\ulcorner\Sigma_1\text{–Kons(T)}\urcorner$, rekursiv aufzählbar und somit Element in L_Ω, selbst für $\Omega = \omega_1^{\mathrm{CK}}$. Weiter hat die Abbildung $\ulcorner\varphi\urcorner \mapsto \mu\alpha.\, \mathrm{L}_\alpha \models \varphi$ für $\varphi \in \Sigma_1\text{–Kons(T)}$ einen Σ–Graphen auf L_Ω, ist also Ω–rekursiv. Weil Ω nun zulässig ist, ist das Bild dieser Abbildung in Ω beschränkt, also $|\mathrm{T}|_{\Sigma_1} < \Omega$.
Wir wollen nun die Berechnung von $|F|$ mit $F \in \Sigma_1\text{–Kons(T)}$ (etwas vereinfacht) skizzieren. Wir starten mit (fast ganz) Ω als Menge von möglichen Modellen (für die Axiome) und dünnen diese mit jedem Herleitungsschritt $\mathcal{R}$ mittels einer Ausdünnoperation

$$\mathcal{A} : \mathsf{Pot}(\Omega) \to \mathsf{Pot}(\Omega)$$

weiter aus:

$$(\mathcal{R}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \Delta_\iota}{\vdash \Gamma, \Delta} \qquad\qquad \frac{X \models \Gamma, \Delta_\iota}{\mathcal{A}(X) \models \Gamma, \Delta}$$

(Dabei bedeutet $X \models \Delta$, daß auf allen Elementen von X die Disjunktion der Formeln aus Δ gilt.)
Da die Herleitung von F i. a. unendlich ist, sind wir gezwungen, $\mathcal{A}$ transfinit zu iterieren, und erhalten $\mathcal{A}_\alpha$. Da $\mathcal{A}$ geschickt gewählt wurde, hat man

$$\overset{\alpha}{\vdash} F \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\alpha \models F.$$

Somit erhält man $\mu\alpha := \mu\mathcal{A}_\alpha$ als obere Schranke für $|F|$.
Um an die Ausdünnoperation $\mathcal{A}$ natürliche Forderungen zu stellen, benötigen wir den Begriff des Diagonalschnittes aus der Mengenlehre:
Seien $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ Teilmengen von κ. Dann ist

$$\mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} X_\alpha := \{\xi < \kappa \mid \xi \in \bigcap_{\zeta<\xi} X_\zeta\}.$$

Forderung. Der Kalkül und die zugehörige Ausdünnoperation $\mathcal{A}$ sollten folgendes erfüllen:

$(\wedge)$	$X_i \models \Delta, A_i$ für $i = 0,1 \Rightarrow X_0 \cap X_1 \models \Delta, A_0 \wedge A_1$
$(\vee)$	$X_i \models \Delta, A_i$ für $i \in \{0,1\} \Rightarrow X_0 \cap X_1 \models \Delta, A_0 \vee A_1$
$(\exists)$	$X \models \Delta, F(b) \Rightarrow X \models \Delta, \exists x F(x)$
$(\forall)$	$X_{\lvert a\rvert} \models \Delta, F(a)$ für alle $a \in \mathrm{L}_\Omega \Rightarrow \mathop{\triangle}_{\alpha<\Omega} X_\alpha \models \Delta, \forall x F(x)$
(cut)	$X \models \Delta, (\neg)C \Rightarrow X \models \Delta$
$(\Pi_m\text{–Ref})$	$X \models \Delta, F \Rightarrow \mathcal{A}(X) \models \Delta, \exists z\,(z \models F)$

Der $(\forall)$–Fall sieht erklärungsbedürftig aus. Ihm ist deshalb ein Lemma gewidmet.

1.3.6 Lemma (Diagonalisierungslemma). *Falls $X_{|a|} \models \Delta, F(a)$ für alle $a \in \mathrm{L}_\Omega$, so gilt*

$$\mathop{\triangle}_{\alpha<\Omega} X_\alpha \models \Delta, \forall x F(x).$$

Beweis. Sei $\beta \in \mathop{\triangle}_{\alpha<\Omega} X_\alpha$ und $a \in \mathrm{L}_\beta$. Zu zeigen ist, daß $\mathrm{L}_\beta \models \Delta, F(a)$ gilt. Sei $|a| = \gamma < \beta$. Wegen

$$\beta \in \bigcap_{\xi<\beta} X_\xi \subseteq X_\gamma$$

ist aber $\beta \in X_\gamma$, was die Behauptung ergibt. □

Wie man sieht, sind alle Regeln trivial mit Ausnahme des Allschlusses und der Ref–Regel. Wie wir später sehen werden, ist wirklich einzig diese für das Aussehen der Ausdünnoperation verantwortlich.
Aus historischer Sicht wurde die Schärfe der erhaltenen Schranken in den meisten Fällen auf der Seite der Zahlentheorie überprüft. Ist nämlich T eine Theorie der erst- oder zweitstufigen Arithmetik, und ist T^s das zugehörige System der Mengenlehre (einen guten Überblick bietet hier [Poh98]), so folgt aus $|\mathrm{T}| \geq \alpha$, $|\mathrm{T}^s| \leq \alpha$ und einer Einbettung von T in T^s bereits die Gleichheit. Wir werden dagegen die Mengenlehre nicht verlassen. Dies hat zwei Gründe: Zum einen ist der Beweis der Schärfe der Schranken hier nicht besonders schwer (da wir ja nicht $\Sigma_1^{\omega_1^{\mathrm{CK}}}$–Formeln betrachten), zum anderen macht es durchaus Sinn, die Mengentheorien als solche zu betrachten (auch im Hinblick auf Π^1_2–Komprehension). Der Trick ist, daß man induktiv zeigen kann, daß Π_m–Ref jede Σ_m–Formel auf jedes der oben erwähnten $\mathcal{A}_\alpha$ reflektiert, diese also insbesondere nichtleer sind.
Wir wollen schließlich den Zusammenhang zwischen Π_2–Ref und KPω präzisieren:
In L haben die beiden Theorien dieselben Modelle, eine Σ_1–Ordinalzahlanalyse von Π_2–Ref liefert damit auch gleich eine solche für KPω. Da bekannt ist, daß $|\mathrm{KP}\omega|_\infty = \omega_1^{\mathrm{CK}}$, ist in diesem Fall auch schon die beweistheoretische Ordinalzahl $|\mathrm{KP}\omega| := |\mathrm{KP}\omega|_{\Sigma_1^{\omega_1^{\mathrm{CK}}}}$ gewonnen.

1.3.7 Lemma. *Gilt* $\mathrm{L}_\alpha \models \mathrm{KP}\omega$*, so folgt* $\mathrm{L}_\alpha \models \Pi_2$*–Ref.*

Beweis. Sei α also zulässig und $\varphi(\vec{a}) \equiv \forall x \exists y\, \varphi_0(x, y, \vec{a}) \in \Pi_2$ mit $\mathrm{L}_\alpha \models \varphi(\vec{a})$. Für $b = \mathrm{L}_\beta$ und $\beta < \alpha$ gilt dann auch $\mathrm{L}_\alpha \models (\forall x \in b)\exists y\, \varphi_0(x, y, \vec{a})$. Mit Σ–Kollektion (α ist zulässig) findet man ein c, so daß $\mathrm{L}_\alpha \models (\forall x \in b)\,(\exists y \in c)\, \varphi_0(x, y, \vec{a})$. Definiert man nun $f : \alpha \to \alpha$ durch $f(\beta) := \mu\gamma.\, \mathrm{L}_\alpha \models (\forall x \in b)\,(\exists y \in \mathrm{L}_\gamma)\, \varphi_0(x, y, \vec{a})$, so ist f α–rekursiv, denn

$$\begin{aligned} f(\beta) = \gamma \quad \iff \quad \mathrm{L}_\alpha \models \exists b \exists c\, [b = \mathrm{L}_\beta \wedge c = \mathrm{L}_\gamma \wedge (\forall x_1 \in b)(\exists x_2 \in c)\psi(x_1, x_2) \\ (\forall \delta < \gamma)(\forall d \in c)(d = \mathrm{L}_\delta \to \\ (\exists x_1 \in b)(\forall x_2 \in d)\neg\psi(x_1, x_2))]. \end{aligned}$$

Dabei nutzt man Lemma 1.2.5 (i) aus. Da man noch zusätzlich weiß, daß für zulässiges α jede α–rekursive Funktion f unterhalb von α beliebig große unter f abgeschlossene Ordinalzahlen besitzt (Lemma 1.3.8), kann man nun $\beta_0 < \alpha$ derart wählen, daß die Parameter $\vec{a}$ alle in L_{β_0} liegen und erhält ein $\beta_0 < \beta < \alpha$, so daß β unter f abgeschlossen ist. Dieses β erfüllt dann aber auch $\mathrm{L}_\beta \models \varphi$, also reflektiert α die Formel φ. □

1.3.8 Lemma. *Sei α zulässig. Ist $f : \alpha \to \alpha$ dann α–rekursiv, so besitzt f beliebig große Limeszahlen $\gamma < \alpha$, die unter f abgeschlossen sind.*

Beweis. Seien f und α wie beschrieben. Definiere

$$g(\xi) := \max(\xi + 1, \sup_{\zeta \leq \xi} f(\zeta)).$$

Wie man leicht sieht, majorisiert g dann f, ist streng monoton und ebenfalls α–rekursiv. Sei nun $\gamma_0 < \alpha$ beliebig vorgegeben. Setze

$$\gamma_k := \underbrace{g \ldots g}_{k\text{–mal}}(\gamma_0)$$

und $\gamma := \sup_{k\in\omega} \gamma_k$. Dann ist $\gamma \leq \alpha$ eine Limeszahl, die unter f abgeschlossen ist (denn aus $\xi < \gamma$ folgt $\xi < \gamma_k$ für ein k und mithin $f(\xi) < \gamma_{k+1} < \gamma$). Um einzusehen, daß wirklich $\gamma < \alpha$ gilt, definiert man sich mit dem Σ–Rekursionssatz eine α–rekursive Funktion F mit $F(k) = \gamma_k$. Damit ist aber auch $\gamma = \sup_{k\in\omega} F(k) < \alpha$. □

1.4 Das Σ_1–Spektrum von Theorien

Das Σ_1–Spektrum einer Theorie T der Mengenlehre ist die Menge aller Ordinalzahlen α, die eine *gute* Σ_1*–Definition in* T haben. Das Ziel dieses Abschnittes, der im wesentlichen eine Ausarbeitung des Artikels [MR99] ist, besteht darin, zu zeigen, daß für hinreichend starke Theorien (eine Präzisierung folgt später) das Spektrum eine Ordinalzahl ist und somit keine Struktur hat (die z. B. etwas über das Aussehen von Bezeichnungssystemen aussagen könnte).

1.4.1 Definition. Eine Menge a hat eine *gute* Σ_1*–Definition*, falls gilt

$$\mathrm{L} \models \exists! x\, \varphi(x) \text{ und } \mathrm{L} \models \varphi(a)$$

für eine Σ_1–Formel φ.

1.4.2 Definition. a hat eine *gute* Σ_1*–Definition in* T, falls es eine Σ_1–Formel φ gibt, so daß $\mathrm{T} \vdash \exists! x \varphi(x)$ und $\mathrm{L} \models \varphi(a)$. Eine solche, a gut definierende, Formel φ werden wir mit φ_a bezeichnen. Das Σ_1*–Spektrum der Theorie* T, $\mathsf{spec}_{\Sigma_1}(\mathrm{T})$, sei die Menge aller Ordinalzahlen mit guter Σ_1–Definition.

Der Beweis des Haupsatzes in diesem Abschnitt benötigt den Begriff der Stabilität. Dieser wird nun eingeführt. Die nachfolgenden Sätze sind ohne Beweise aus [Ba75, V 7] übernommen und werden hier nur teilweise benötigt.

1.4.3 Definition.

(i) Seien $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ zwei Strukturen. $\mathfrak{A}$ heißt Σ_k*–elementare Substruktur* von $\mathfrak{B}$, in Zeichen $\mathfrak{A} \prec_k \mathfrak{B}$, falls für alle $\vec{a} \in \mathfrak{A}$ und alle Σ_k–Formeln φ gilt $\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(\vec{a})$.

(ii) α heißt *stabil*, falls $\mathrm{L}_\alpha \prec_1 \mathrm{L}$.

(iii) Die Aufzählfunktion der stabilen Ordinalzahlen ist $\sigma_.$, die kleinste stabile also σ_0.

(iv) α heißt β*–stabil*, falls $\alpha \leq \beta$ und $\mathrm{L}_\alpha \prec_1 \mathrm{L}_\beta$.

Den Zusammenhang zwischen stabilen Ordinalzahlen und Σ_1–Definierbarkeit verdeutlicht der folgende

1.4.4 Satz. *Stabile lassen sich „von unten“ wie folgt erzeugen:*

(i) $\sigma_0 = \{\alpha \mid \alpha$ *ist in* L *parameterfrei* Σ_1*–definierbar*$\}$,
$\mathrm{L}_{\sigma_0} = \{a \in \mathrm{L} \mid a$ *ist in* L *parameterfrei* Σ_1*–definierbar*$\}$.

(ii) $\sigma_{\beta+1} = \{\alpha \mid \alpha$ *ist in* L Σ_1*–definierbar mit Parametern* $\leq \sigma_\beta\}$,
$\mathrm{L}_{\sigma_0} = \{a \in \mathrm{L} \mid a$ *ist in* L Σ_1*–definierbar mit Parametern* $\leq \sigma_\beta\}$.

(iii) $\sigma_\lambda = \sup\{\sigma_\beta \mid \beta < \lambda\}$,
$\mathrm{L}_{\sigma_\lambda} = \bigcup_{\beta<\gamma} \mathrm{L}_{\sigma_\beta}$ *für* $\lambda \in \mathsf{Lim}$.

1.4.5 Satz. (i) *Überabzählbare Kardinalzahlen sind stabil.*

(ii) *Unterhalb von überabzählbaren Kardinalzahlen gibt es beliebig große stabile Ordinalzahlen, d. h. falls* $\mathsf{Card} \ni \kappa > \omega$*, so gibt es zu jedem* $\alpha < \kappa$ *ein stabiles* $\beta < \kappa$ *mit* $\alpha < \beta$*.*

(iii) *Für überabzählbare Kardinalzahlen* κ *gilt* $\kappa = \sigma_\kappa$*.*

1.4.6 Satz. (i) *Sei* $\alpha \leq \beta \leq \gamma$*. Ist* α *nun* γ*–stabil, so auch schon* β*–stabil.*

(ii) α *ist* γ*–stabil, falls es* β*–stabil ist und* β *zusätzlich* γ*–stabil ist.*

(iii) *Falls* β *stabil ist und* $\alpha < \beta$*, so ist* α *genau dann stabil, wenn es* β*–stabil ist.*

(iv) *Sei* B *eine nichtleere Menge von* β*–stabilen Ordinalzahlen. Dann ist* $\sup B$ *auch* β*–stabil.*

(v) *Ist* $\alpha < \beta$ *und* β*–stabil, so ist* α *zulässig. Jede stabile Ordinalzahl ist zulässig.*

Die Größe (β–)stabiler Ordinalzahlen α und den Zusammenhang mit Reflexion verdeutlicht das nächste

1.4.7 Lemma. *Jedes* $\alpha{+}1$*–stabile* α *ist* Π_∞*–reflektierend, d. h.* Π_k*–reflektierend für jedes* $k \in \mathbb{N}$*.*

Beweis. Sei $\varphi(\vec{a})$ eine Formel mit Parametern $\vec{a}$ aus L_α mit $\mathrm{L}_\alpha \models \varphi(\vec{a})$. Wegen $\mathrm{L}_\alpha \in \mathrm{L}_{\alpha+1}$ folgt $\mathrm{L}_{\alpha+1} \models \exists z \varphi(\vec{a})^z$ und wegen $\mathrm{L}_\alpha \prec_1 \mathrm{L}_{\alpha+1}$ erhält man $\mathrm{L}_\alpha \models \exists z \varphi(\vec{a})^z$, d. h. φ wird reflektiert. □

1.4.8 Korollar. (i) α *ist rekursiv unerreichbar, falls es* β*–stabil ist für ein zulässiges* $\beta > \alpha$*.*

(ii) *Stabile Ordinalzahlen sind rekursiv unerreichbar.*

1.4.9 Satz. *Seien* $\lambda > \omega$ *eine Limeszahl und* $0 \leq \alpha < \lambda$*. Sei weiter*

$$A_{\lambda\alpha} = \{a \in \mathrm{L}_\lambda \mid \textit{es gibt in } \mathrm{L}_\lambda \textit{ eine gute } \Sigma_1\textit{–Definition mit Parametern} < \alpha\}$$

sowie $\rho_{\lambda\alpha}$ *die kleinste Ordinalzahl, die nicht in* $A_{\lambda\alpha}$ *liegt. Dann gilt*

(i) $\alpha \leq \rho_{\lambda\alpha} \leq \lambda$*,*

(ii) $A_{\lambda\alpha} = \mathrm{L}_{\rho_{\lambda\alpha}}$ *und*

(iii) $\rho_{\lambda\alpha}$ *ist die kleinste* λ*–stabile Ordinalzahl* $\geq \alpha$*.*

Für den Rest des Abschnittes sei $\sigma_{\mathrm{T}} := \sup(\mathsf{spec}_{\Sigma_1}(\mathrm{T}))$.
Wir haben jetzt das Rüstzeug beisammen, um den entscheidenden Satz anzugehen. Er läßt sich auch allgemeiner formulieren für Theorien der Mengenlehre, die ein Minimum an primitiv rekursiven Mengenfunktionen verstehen (sie müssen z. B. die Totalität von $\alpha \mapsto \mathrm{L}_\alpha$ beweisen) und wissen, daß $\forall\alpha(\exists\beta > \alpha)\mathsf{Lim}(\beta)$. Aber dies gilt für alle betrachteten Systeme.

1.4.10 Satz. *Für alle Theorien* $\mathrm{T} = \Pi_m$–Ref *und* $\mathrm{T} = \Pi_m$–Ref$^-$ + (Π_n–Fund) *(mit* $m, n \geq 2$*) ist* $\mathsf{spec}_{\Sigma_1}(\mathrm{T})$ *ein Abschnitt.*

Beweis. Wir zeigen mit Induktion nach $\alpha < \sigma_{\mathrm{T}}$, daß $\alpha \in \mathsf{spec}_{\Sigma_1}(\mathrm{T})$ gilt. Dazu können wir $\alpha \subseteq \mathsf{spec}_{\Sigma_1}(\mathrm{T})$ annehmen. Mit Lemma 1.4.11 wissen wir, daß es Limeszahlen $\lambda > \max\{\omega, \alpha\}$ gibt. Für diese definieren wir

$$A_{\lambda\alpha} = \{a \in \mathrm{L}_\lambda \mid \text{es gibt in } \mathrm{L}_\lambda \text{ eine gute } \Sigma_1\text{–Definition mit Parametern} < \alpha\}$$

mit den Konsequenzen aus Satz 1.4.9. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
Fall 1: $\alpha < \rho_{\lambda\alpha}$ für ein $\max\{\omega, \alpha\} < \lambda \in \mathsf{spec}_{\Sigma_1}(\mathrm{T}) \cap \mathsf{Lim}$. Dann hat α eine Σ_1–Beschreibung $\psi(x, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ in L_λ mit Parametern $\beta_i < \alpha$. Setze nun

$$\begin{aligned}\Psi(x) := \exists z\bigl[z = \mathrm{L}_\lambda \wedge \bigl([z \models \exists!\xi\psi(\xi, \beta_1, \ldots, \beta_k) \wedge x \in z \wedge z \models \psi(x, \beta_1, \ldots, \beta_k)]\\ \vee [z \models \neg\exists!\xi\psi(\xi, \beta_1, \ldots, \beta_k) \wedge x = \lambda]\bigr)\bigr],\end{aligned}$$

was eine Σ_1–Formel mit Parametern $\lambda, \beta_1, \ldots, \beta_k$ darstellt. Da all diese in $\mathsf{spec}_{\Sigma_1}(\mathrm{T})$ liegen, gibt es zugehörige Σ_1–Formeln $\varphi_\lambda, \varphi_{\beta_1}, \ldots, \varphi_{\beta_k}$, so daß man Ψ durch Einsetzen dieser zu einer äquivalenten Σ_1–Formel Ψ' umschreiben kann mit $\mathrm{T} \vdash \exists!\zeta\Psi'(\zeta)$ und $\mathrm{L} \models \Psi'(\alpha)$, mithin $\alpha \in \mathsf{spec}_{\Sigma_1}(\mathrm{T})$.
Fall 2: Für alle Limeszahlen $\lambda \in \mathsf{spec}_{\Sigma_1}(\mathrm{T})$ mit $\lambda > \max\{\omega, \alpha\}$ ist $\alpha = \rho_{\lambda\alpha}$. Mit Satz 1.4.9 (iii) wäre α für all solche λ schon λ–stabil. Andererseits ist σ_{T} das Supremum dieser λ und es wäre α damit σ_{T}–stabil (denn aus $\mathrm{L}_{\sigma_{\mathrm{T}}} \models \exists x\, \phi(x)$ mit $\phi \in \Delta_0$ folgt schon $\mathrm{L}_\lambda \models \exists x\, \phi(x)$ für ein solches λ und damit auch $\mathrm{L}_\alpha \models \exists x\, \phi(x)$). Gilt nun $\mathrm{T} \vdash \exists!\xi\psi(\xi)$ mit einem $\psi \in \Sigma_1$, so folgt mit Lemma 1.4.12: $\mathrm{L}_{\sigma_{\mathrm{T}}} \models \exists\xi\psi(\xi)$ und wegen $\mathrm{L}_\alpha \prec_1 \mathrm{L}_{\sigma_{\mathrm{T}}}$ folgte auch $\mathrm{L}_\alpha \models \exists\xi\psi(\xi)$, was mit der Voraussetzung $\alpha < \sigma_{\mathrm{T}}$ den Widerspruch $\mathsf{spec}_{\Sigma_1}(\mathrm{T}) \subseteq \alpha$ ergäbe. Also kann Fall 2 gar nicht eintreten. □

1.4.11 Lemma. *Falls $\alpha \in \mathsf{spec}_{\Sigma_1}(\mathrm{T})$ und $\mathrm{T} \vdash (\exists\lambda > \alpha)\mathsf{Lim}(\lambda)$, so gibt es einen Limes $\lambda > \alpha$ mit $\lambda \in \mathsf{spec}_{\Sigma_1}(\mathrm{T})$.*
Beweis. Aus $\mathrm{T} \vdash \exists!x\varphi_\alpha(x)$ und $\mathrm{T} \vdash (\exists\lambda > \alpha)\mathsf{Lim}(\lambda)$ folgt

$$\mathrm{T} \vdash \exists!x_0\bigl[\exists!x_1[(\varphi_\alpha(x_1) \wedge \mathsf{Lim}(x_0) \wedge (\forall y \in x_0)(x_1 \in y \to \neg\mathsf{Lim}(y))]\bigr],$$

was nach geeignetem Codieren eine gute Σ_1–Definition von $\alpha + \omega$ ergibt. □

1.4.12 Lemma. *Falls $\mathrm{T} \vdash \exists!\xi\exists x\, \psi(\xi, x)$ mit einem $\psi \in \Delta_0$, so gilt schon*

$$\mathrm{L}_{\sigma_{\mathrm{T}}} \models \exists\xi\exists x\, \psi(\xi, x).$$

Beweis. Das Problem ist der zweite Existenzquantor, da man über die Größe der dazugehörigen Zeugen noch nichts weiß. Allerdings läßt sich dies ändern. Die Idee ist, daß man eine Situation der Gestalt

$$\mathrm{T} \vdash \exists!\gamma\exists z\exists y\, [z = \mathrm{L}_\gamma \wedge y \in z \wedge \phi] \quad \text{mit } \phi \in \Delta_0$$

gut in den Griff bekommt: Die Formel „$z = \mathrm{L}_\gamma$“ ist uniform $\Delta_1^{\mathrm{L}_\lambda}$ für Limeszahlen λ, und $\gamma + \omega \in \mathsf{Lim} \cap \sigma_{\mathrm{T}}$, also findet sich das gesuchte Existenzbeispiel erst recht in $\mathrm{L}_{\sigma_{\mathrm{T}}}$. Somit sind z und y auch in $\mathrm{L}_{\sigma_{\mathrm{T}}}$. Um nun eine solch günstige Situation zu erhalten, verfährt man wie folgt

$$\begin{aligned}
& \mathrm{T} \vdash \exists!\xi\exists x\, \psi(\xi, x)\\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{T} \vdash \exists!\xi\exists!\alpha\exists z_1[z_1 = \mathrm{L}_\alpha \wedge (\exists x \in z_1)\, \psi(\xi, x) \wedge\\
& \qquad (\forall\beta < \alpha)(\forall z_2 \in z_1)(z_2 = \mathrm{L}_\beta \to \neg(\exists x \in z_2)\psi(\xi, x))]\\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{T} \vdash \exists!y\exists z_1\bigl[z_1 = \mathrm{L}_{y_1} \wedge y = \langle y_0, y_1\rangle \wedge y_1 \in \mathsf{On} \wedge y_2 \in \mathsf{On} \wedge\\
& \qquad (\exists x \in z_1)\psi(y_0, x) \wedge (\forall y_2 \in y_1)(\forall z_2 \in z_1)\\
& \qquad [z_2 = \mathrm{L}_{y_2} \to \neg(\exists x \in z_2)\psi(y_0, x)]\bigr],
\end{aligned}$$

wobei $\langle a,b\rangle$ das geordnete Paar von a und b sei und in der Rückrichtung die Eindeutigkeit des ξ aus der des y folgt,

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad \mathrm{T}\vdash \exists!\gamma\exists z_3\exists!y\Big[& z_3=\mathrm{L}_\gamma\wedge\gamma\in\mathsf{Lim}\wedge y\in z_3\wedge(\exists z_1\in z_3)\\ &\big[z_1=\mathrm{L}_{y_1}\wedge y=\langle y_0,y_1\rangle\wedge y_0,y_1\in\mathsf{On}\wedge\\ &(\exists x\in z_1)\psi(y_0,x)\wedge(\forall y_2\in y_1)(\forall z_2\in z_1)\\ &[z_2=\mathrm{L}_{y_2}\rightarrow\neg(\exists x\in z_2)\psi(y_0,x)]\big]\\ &\wedge(\forall\delta<\gamma)(\forall z_4\in z_3)\big(z_4=\mathrm{L}_\delta\wedge\delta\in\mathsf{Lim}\rightarrow y\notin z_4\big)\Big]\end{aligned}$$

Dabei können wir die versteckten Existenzquantoren (in „$z_1=\mathrm{L}_{y_1}$“ und „$z_2=\mathrm{L}_{y_2}$“) auf z_3 beschränken (deshalb haben wir $\gamma\in\mathsf{Lim}$ gefordert), so daß die Formel die gewünschte Gestalt hat. □

1.4.13 Lemma. *Für alle untersuchten Theorien gilt*

$$|\mathrm{T}|_{\Sigma_1}=\sup(\mathsf{spec}_{\Sigma_1}(\mathrm{T}))=\mathsf{spec}_{\Sigma_1}(\mathrm{T}).$$

Beweis. Wir können (da es ja nur um Σ_1–Formeln geht) mit der Definition „$|\mathrm{T}|_{\Sigma_1}=\mu\alpha.\mathrm{L}_\alpha\models\Sigma_1$–Kons(T)“ arbeiten.
„$\leq$“ Sei $\varphi\in\Sigma_1$ mit $\mathrm{T}\vdash\varphi$. Ergänze φ geschickt durch einen leeren Quantor und erhalte $\mathrm{T}\vdash\exists!\xi\varphi'(\xi)$ und somit $\mathrm{L}_{\sigma_\mathrm{T}}\models\varphi$. Damit ist $|\mathrm{T}|_{\Sigma_1}\leq\sigma_\mathrm{T}$.
„$\geq$“ Gilt nun

$$\mathrm{T}\vdash\exists!\xi\ \psi_\alpha(\xi),$$

so folgt insbesondere

$$\mathrm{T}\vdash\underbrace{\exists\xi\ \psi_\alpha(\xi)}_{\text{äq. zu }\Sigma_1\text{–Formel}}.$$

Damit gilt aber $\mathrm{L}_{|\mathrm{T}|_{\Sigma_1}}\models\exists\xi\ \psi_\alpha(\xi)$ und somit $\alpha<|\mathrm{T}|_{\Sigma_1}$, also $|\mathrm{T}|_{\Sigma_1}\geq\sigma_\mathrm{T}$. □

Eine Σ_1–Analyse eines solchen Systems liefert also gleichzeitig eine Charakterisierung des Spektrums.

1.5 $|\mathrm{T}|$ vs $|\mathrm{T}|_{\Sigma_1}$

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir die in der Einleitung angedeuteten Unterschiede (bei der Berechnung) der Ordinalzahlen $|\mathrm{T}|$ und $|\mathrm{T}|_{\Sigma_1}$ kurz erläutern. Dazu setzen wir für eine Theorie T der Mengenlehre

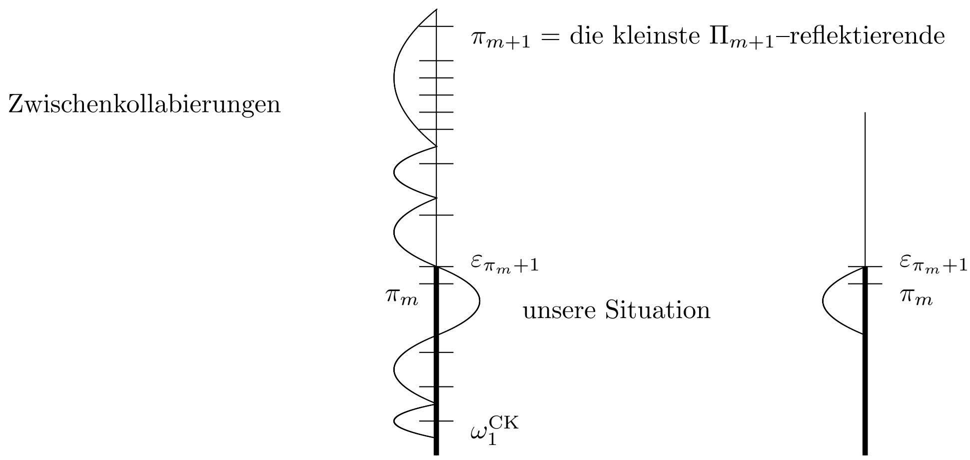
$$|\mathrm{T}|:=\mu\alpha.\,\mathrm{L}_\alpha\models\Sigma_1^{\omega_1^{\mathrm{CK}}}\text{–Kons (T)}=|\mathrm{T}|_{\Sigma_1^{\mathrm{L}_{\omega_1^{\mathrm{CK}}}}}=:|\mathrm{T}|_{\Sigma_1^{\omega_1^{\mathrm{CK}}}}$$

als sogenannte „beweistheoretische Ordinalzahl von T“, wobei eine Formel $F\in\mathcal{F}^\kappa$ ist, falls es eine $\mathcal{F}$–Formel G gibt mit $F=G^{\mathrm{L}_\kappa}$. Alternative Definitionen von $|\mathrm{T}|$ finden sich in [Poh98] und [Ra99]. Das Interesse an dieser Ordinalzahl geht auf folgendes Resultat zurück:

1.5.1 Satz (Spector-Gandy). *Eine Relation R auf den natürlichen Zahlen ist genau dann Π^1_1, wenn sie Σ_1 auf $\mathrm{L}_{\omega_1^{\mathrm{CK}}}$ ist.*

Beweis. Z. B. in [Ba75]. □

Bei der Definition von $|\mathrm{T}|$ muß gewährleistet sein, daß ω_1^{CK} irgendwie charakterisiert werden kann.
Lassen wir bei den kommenden Überlegungen den Sonderfall KPω einmal außen vor. Da man z. B. von $\Sigma_1^{\omega_1^{\mathrm{CK}}}$–Formeln sprechen möchte, muß man Formeln (i. a. unendliche) Ränge zuordnen. Nachdem man die benötigten Axiome weggeschnitten hat, hat eine Herleitung von F in der Regel die Gestalt $\vdash^{> \Omega}_{> \Omega} F$.
Die Prozedur, die Herleitungslänge und Schnittrang (durch Manipulationen am Beweisbaum) kleiner als Ω macht, heißt „Kollabierung“, die dabei verwendete Funktion „Kollabierungsfunktion“. Normalerweise findet man sich nach der ersten Kollabierung zwar unterhalb von Ω wieder, aber noch nicht notwendigerweise unterhalb von ω_1^{CK}, so daß weitere Kollabierungen vonnöten sind. Im Gegensatz dazu geben wir uns mit einem Sprung unter Ω zufrieden.



Im Fall T = Π_m–Ref sind unsere Untersuchungen aber dennoch eine gute Fallstudie, was wir jetzt zu erklären versuchen. Dabei wird an jeder Stelle bezug genommen auf Rathjens Analyse der Π_3–Reflexion [Ra94b] und die Folien [Mö00b].
Die kritische Regel $\mathcal{R}$ des Systems Π_m–Ref ist zweifellos die (Π_m–Ref). Der Bereich, über den sie Aussagen macht, ist $\Omega = \pi_m$ die kleinste Π_m–reflektierende. Man kann nun eine Anwendung dieser kritischen Regel entfalten in (sehr viele iterierte) Anwendungen von Π_{m-1}–Reflexionen (für welche man neue Regeln einzuführen hat), die auf Ordinalzahlen $\pi < \Omega$ arbeiten. Diese neuen, einfacheren Regeln werden nach demselben Schema eliminiert, bis zum Schluß keine wirklich kritischen Regeln übrigbleiben, und man unter ω_1^{CK} springen kann. Es stellt sich die Frage, wie sich die Hierarchien, die bei der Auflösung von $\mathcal{R}$ entstehen (Rathjens M^{α}'s) durch $\mathcal{R}$ beschreiben lassen. An diesem Punkt kommen die Ausdünnhierarchien $\mathcal{A}_{\alpha}^{m}$ ins Spiel: Die Elemente von $\mathcal{A}_1^m$ sind die Π_{m-1}–reflektierenden, $\pi \in \mathcal{A}_2^m$ ist Π_{m-1}–reflektierend auf die Π_{m-1}–reflektierenden …
Es läßt sich festhalten, daß die Techniken der vorliegenden Arbeit veranschaulichen, was bei der Auflösung *einer* kritischen Regel geschieht, und sie damit zeigt, wie (mit einigem Mehraufwand) die Auflösung sämtlicher Reflexionsregeln vor sich gehen sollte.

Teil I

Theorien mit voller Fundierung

2 Schnittelimination

Zuerst führen wir einen halbformalen Kalkül mit Konstanten aus L_Ω ein, in den wir eine Basismengenlehre einbetten können. Dieser wird durch Hinzunahme der jeweiligen Reflexionsregel später derart vervollständigt, daß diese Einbettung für die gesamte Theorie realisiert wird. Da diese Regel die Stärke des Systems entscheidend bestimmt, nennen wir sie ab jetzt „kritische Regel". Um aus dem Wissen, in dem Kalkül eine endliche Formelmenge Δ herleiten zu können, Rückschlüsse auf minimale Modelle in der konstruktiblen Welt zu ziehen, benötigt man die Aussage von Lemma 2.3.5. In dem Beweis sieht man aber bald, daß die Formelmenge nicht beliebig sein darf, sondern vielmehr $\Delta \subseteq \Pi_m$ sein muß. Dies bedeutet keine Einschränkung für unsere Analyse – wir interessieren uns ohnehin nur für $|\Pi_m\text{–Ref}|_{\Sigma_1}$ bzw. $|\Pi_m\text{–Ref}|_{\Pi_m}$ – zwingt uns aber, Schnitte der Komplexität m oder größer zu eliminieren. Da dabei die Reflexionsregel keine Rolle spielt, verschieben wir ihre Einführung auf Abschnitt 2.3. Um das Ergebnis dieses Kapitels, nämlich

$$\boxed{|\Pi_m\text{–Ref}|_{\Sigma_1} \leq \mu\varepsilon_{\Omega+1}}$$

zu beweisen (die Definitionen folgen in Kürze), bedarf es nur noch der Einbettung, die in Abschnitt 2.4 bewerkstelligt wird.

2.1 Das Bezeichnungssystem

In diesem Abschnitt werden die Definitionen bereitgestellt, die die ganze Arbeit prägen werden. Dazu bedarf es einiger elementarer Begriffe, die zunächst vorgestellt werden sollen.
Jede Ordinalzahl α läßt sich eindeutig schreiben als

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k} \text{ mit } \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_k.$$

Solch eine Darstellung heißt *Cantor-Normalform.* Darauf aufbauend definiert man die natürliche Summe # (siehe jeweils [Poh89]).
Eine Ordinalzahl α mit $\omega^\alpha = \alpha$ heißt *Epsilon-Zahl.* Die Klasse der Epsilon-Zahlen wird mit Eps bezeichnet, ihre Aufzählungsfunktion mit $\varepsilon_\cdot$. Jede zulässige Ordinalzahl α ist die α-te Epsilon-Zahl, es gilt also $\alpha = \varepsilon_\alpha$. Ist $\alpha \in \mathsf{On}$, so sei α^+ die nächstgrößere Epsilon-Zahl. Alle ab jetzt auftretenden Ordinalzahlen sind kleiner als $\Omega^+ = \varepsilon_{\Omega+1}$.

2.1.1 Definition. Für $\alpha < \varepsilon_{\Omega+1}$ definieren wir α^* wie folgt:

- Für $\alpha < \Omega$ sei $\alpha^* = \bigcup\{\xi \leq \alpha \mid \xi \in \mathsf{Eps}\}$ der maximale Epsilon–Anteil von α in Cantor–Normalform
- $\Omega^* = 0$
- Ist $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k} > \Omega$, so sei $\alpha^* = \alpha_1^* \cup \ldots \cup \alpha_k^*$.

Es folgen die angekündigten wichtigen Definitionen:

2.1.2 Definition. Im folgenden seien $\alpha, \alpha_0 < \varepsilon_{\Omega+1}$ und $\xi < \Omega$. Weiter ist $\mathcal{A}$ eine Ausdünnoperation (d. h. $\mathcal{A} : \mathsf{Pot}(\Omega) \to \mathsf{Pot}(\Omega)$).

(i) $\alpha_0 <^\circ_\xi \alpha :\Leftrightarrow \alpha_0 < \alpha \wedge \alpha_0^* < \xi^* \cup (\alpha^* + 1)$

(ii) $\alpha_0 <^*_\xi \alpha :\Leftrightarrow \alpha_0 < \alpha \wedge \alpha_0^* \leq \xi^* \cup \alpha^*$

(iii) $\mathcal{A}_\alpha = \{\xi \in \mathsf{Eps} \cap \Omega \mid \xi \in \bigcap\limits_{\beta <^\circ_\xi \alpha} \mathcal{A}(\mathcal{A}_\beta)\}$

(iv) $\mu\alpha = \mu\mathcal{A}_\alpha$

(v) Es sei Ω_k definiert durch

- $\Omega_0 = 1$
- $\Omega_{l+1} = \Omega^{\Omega_l}$

(vi) $\mu\varepsilon_{\Omega+1} = \sup_{k \in \mathbb{N}}(\mu\Omega_k)$

Bemerkung. (i) Für $\alpha < \beta < \Omega$ gilt $\alpha^* \leq \beta^*$, ist außerdem $\beta \in \mathsf{Eps}$, so ist $\alpha^* < \beta^*$.

(ii) Der *–Anteil ist stabil bzgl. $\omega^{\cdot}$ und $\#$, d. h. es ist $(\omega^\alpha)^* = \alpha^*$ und $\alpha <^*_0 \alpha \# \beta$ für alle $\beta \geq 1$.

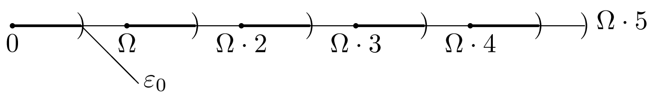
α^* mißt die Parameter, die zur Konstruktion von α benötigt werden. Wie wir sehen werden, vergrößert sich der *–Anteil der Herleitungslänge bei der Schnittelimination nicht.
Der Grund, warum in der Definition von $\mathcal{A}_\alpha$ ein $<^\circ$ statt eines $<^*$ steht, wird erst im Satz 3.2.8 deutlich.
Es ist $\mathcal{A}$ immer monoton, d. h. aus $X \subseteq Y$ folgt $\mathcal{A}(X) \subseteq \mathcal{A}(Y)$, später wird man dies an der Definition der konkreten Operatoren $\mathcal{A}$ ablesen können.
An manchen Stellen werden wir benötigen, daß

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}_\alpha) \subseteq \mathcal{A}_\alpha \qquad (\subseteq)$$

für alle α gilt. Auch diese Eigenschaft hängt mit der Definition von $\mathcal{A}$ zusammen. Deshalb können wir sie erst beweisen, wenn wir $\mathcal{A}$ definiert haben, was in Abschnitt 2.3 geschieht. Bis dahin ist $(\subseteq)$ als zusätzliche Eigenschaft zu lesen.
Sei $X \subseteq \mathsf{On}$. Mit $X[\gamma]$ bezeichnen wir alle Elemente aus X, die größer als γ sind. Dann wollen wir es mit der folgenden Eigenschaft genauso halten wie mit $(\subseteq)$:

$$\mathcal{A}(X[\gamma]) = \mathcal{A}(X)[\gamma]. \qquad ([])$$

Das folgende Bild möge verdeutlichen, über welche $\beta < \alpha$ für $\alpha = \Omega \cdot 5$ bei der Berechnung von $\mathcal{A}_\alpha$ immer geschnitten wird:



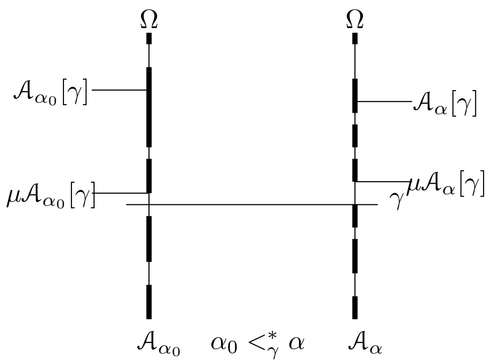
Das Problem bei der Definition der $\mathcal{A}_\alpha$'s ist, daß nicht über zu viele β geschnitten werden darf, da sonst $\mathcal{A}_\Omega = \emptyset$ wird. Deshalb schneidet man nur über einige $\mathcal{A}_\beta$,

die der zusätzlichen *–Bedingung genügen. Ein weiterer Vorteil des Ansatzes mit *–Anteil ist, daß beim Wohlordnungsbeweis die entscheidenden β in einer Menge aufgesammelt werden können (vgl. Satz 3.2.3).
Der folgende Sachverhalt ist grundlegend.

2.1.3 Lemma. *Aus $\alpha_0 <^*_\gamma \alpha$ folgt bereits $\mathcal{A}_\alpha[\gamma] \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{A}_{\alpha_0}[\gamma]) \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_0}[\gamma]$.*

Beweis. Sei $\gamma < \xi \in \bigcap\limits_{\beta <^\circ_\xi \alpha} \mathcal{A}(\mathcal{A}_\beta)$. Nun folgt aus $\alpha_0 <^*_\gamma \alpha$ schon $\alpha_0 <^\circ_\xi \alpha$, denn falls $\alpha_0^* \leq \gamma^*$, so $\alpha_0^* < \xi^*$, da ja $\gamma < \xi$ und $\xi \in \mathsf{Eps}$. Damit ist $\xi \in \mathcal{A}(\mathcal{A}_{\alpha_0}) \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_0}$. □

Dazu eine Skizze



Man kann sich die $\mathcal{A}_\alpha$ als dichte, unbeschränkte Teilmengen von Ω vorstellen.

2.1.4 Lemma. *Für $\alpha, \beta < \varepsilon_0$ gilt*

$$\alpha < \beta \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\beta \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{A}_\alpha).$$

Beweis. Für $\beta < \varepsilon_0$ folgt aus $\delta < \beta$ bereits $\delta <^\circ_\xi \beta$ für beliebige ξ (und die Rückrichtung gilt per Definition). Also hat man

$$\mathcal{A}_\beta = \{\xi < \Omega \mid \xi \in \bigcap_{\delta <^\circ_\xi \beta} \mathcal{A}(\mathcal{A}_\alpha)\} = \{\xi < \Omega \mid \xi \in \bigcap_{\delta < \beta} \mathcal{A}(\mathcal{A}_\delta)\} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{A}_\alpha).$$

□

Zum Abschluß wollen wir noch ein paar interessante Rechenregeln beweisen:

2.1.5 Lemma. *Mit obigen Definitionen gilt*

(i) $\mathcal{A}_{\alpha+1} = \mathcal{A}(\mathcal{A}_\alpha)$.

(ii) *Für Limeszahlen $\lambda < \Omega$ ist $\mathcal{A}_\lambda = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} \mathcal{A}_\alpha$.*

(iii) $\mathcal{A}_\Omega = \mathop{\triangle}\limits_{\alpha<\Omega} \mathcal{A}_\alpha$.

(iv) $\mathcal{A}_{\Omega+\Omega} = \mathop{\triangle}\limits_{\alpha<\Omega} \mathcal{A}_{\Omega+\alpha}$ *usw.*

(v) $\mathcal{A}_{\Omega\cdot\Omega} = \mathop{\triangle}\limits_{\alpha<\Omega} \mathcal{A}_{\Omega\cdot\alpha}$ *usw.*

(vi) $\mathcal{A}_{\Omega^\Omega} = \underset{\alpha<\Omega}{\triangle} \mathcal{A}_{\Omega^\alpha}$ *usw.*

Beweis. Zu (i): „$\subseteq$“ ist wegen $\alpha <_0^\circ \alpha + 1$ klar. Die Rückrichtung wird später (in Lemma 2.3.2) gezeigt.
(ii): Da für $\alpha < \lambda < \Omega$ bereits $\alpha <_0^\circ \lambda$ folgt, gilt:

$$\mathcal{A}_\lambda = \{\xi \mid \xi \in \bigcap_{\alpha<_\xi^\circ\lambda} \mathcal{A}(\mathcal{A}_\alpha)\} = \{\xi \mid \xi \in \bigcap_{\alpha<\lambda} \mathcal{A}(\mathcal{A}_\alpha)\} \underset{\text{(i)}}{=} \bigcap_{\alpha<\lambda} \mathcal{A}_\alpha.$$

Zu (iii): Mit (i) ist wieder $\underset{\alpha<\Omega}{\triangle} \mathcal{A}_\alpha = \{\xi \mid \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} \mathcal{A}(\mathcal{A}_\alpha)\}$. Da aber alle vorkommenden $\xi \in \mathsf{Eps}$ sind, und somit $\xi^* = \xi$ gilt, ist diese Menge $= \{\xi \mid \xi \in \bigcap_{\alpha<_\xi^\circ\Omega} \mathcal{A}(\mathcal{A}_\alpha)\} = \mathcal{A}_\Omega$.
(iv)–(vi) haben alle dieselbe Beweisidee. Wir zeigen nur (iv):

$$\mathcal{A}_{\Omega+\Omega} = \{\xi \mid \xi \in \bigcap_{\alpha<_\xi^\circ\Omega+\Omega} \mathcal{A}(\mathcal{A}_\alpha)\} \underset{\xi\in\mathsf{Eps}}{=} \{\xi \mid \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} \mathcal{A}(\mathcal{A}_\alpha) \wedge \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} \mathcal{A}(\mathcal{A}_{\Omega+\alpha})\}$$
$$= \{\xi \mid \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} \mathcal{A}(\mathcal{A}_{\Omega+\alpha})\} \underset{\text{(i)}}{=} \underset{\alpha<\Omega}{\triangle} \mathcal{A}_{\Omega+\alpha}.$$

□

2.2 Das Verfahren ohne kritische Regel

Wir führen nun den angekündigten halbformalen Kalkül ein. Man sieht leicht, daß die Regeln (noch) symmetrisch sind. Die Schnittelimination bereitet also keine Probleme: Komplizierte Schnitte werden durch einfachere ersetzt. Entscheidend ist dabei das Reduktionslemma 2.2.8.

2.2.1 Definition. Wir ordnen Formeln wie folgt einen Rang rk zu:

- $\mathrm{rk}(F) = 0$ für Δ_0–Formeln F.
- $\mathrm{rk}(A_0 \wedge A_1) = \mathrm{rk}(A_0 \vee A_1) = \max\{\mathrm{rk}(A_0), \mathrm{rk}(A_1)\} + 1$.
- $\mathrm{rk}(\forall x\, F(x)) = \mathrm{rk}(\exists x\, F(x)) = \mathrm{rk}(F) + 1$.

Ist Γ eine endliche Formelmenge, so bezeichnen wir mit $\mathrm{par}(\Gamma)$ die Menge der (L-Ränge der) Parameter in Γ.

Bemerkung. Mit obiger Definition haben Π_k– und Σ_k–Formeln den Rang k.

2.2.2 Definition. Sei Γ eine endliche Formelmenge mit $\mathrm{par}(\Gamma) \leq \gamma$. Dann gelte

(Ax) Falls es ein $\varphi \in \Gamma \cap \Delta_0$ gibt mit $\mathrm{L} \models \varphi$, so $\gamma \mid\frac{\alpha}{k}\; \Gamma$ für alle α, k.

($\wedge$) Falls $\gamma \mid\frac{\alpha_i}{k}\; \Gamma,\, A_i$ und $\alpha_i <_\gamma^* \alpha$ für $i = 0, 1$, so auch $\gamma \mid\frac{\alpha}{k}\; \Gamma,\, A_0 \wedge A_1$.

($\vee$) $\gamma \mid\frac{\alpha_i}{k}\; \Gamma,\, A_i$ mit $\alpha_i <_\gamma^* \alpha$ für ein $i \in \{0, 1\} \Longrightarrow \gamma \mid\frac{\alpha}{k}\; \Gamma,\, A_0 \vee A_1$.

($\forall$) $\gamma, b \mid\frac{\alpha_{|b|}}{k}\; \Gamma,\, F(b)$ mit $\alpha_{|b|} <_{\gamma,b}^* \alpha$ für alle $b \in \mathrm{L}_\Omega \Longrightarrow \gamma \mid\frac{\alpha}{k}\; \Gamma,\, \forall x F(x)$.

(∃) $\gamma, b_0 \,\big|\!\frac{\alpha_0}{k}\; \Gamma,\, F(b_0)$ mit $\alpha_0 <^*_\gamma \alpha$ sowie $b_0 < \mu\,\mathcal{A}_\alpha[\gamma]$
$\Longrightarrow \gamma \,\big|\!\frac{\alpha}{k}\; \Gamma,\, \exists x F(x)$.

(cut) Falls $\mathrm{rk}(C) < k$ und $\gamma_0 \,\big|\!\frac{\alpha_0}{k}\; \Gamma,\, (\neg)C$ mit $\alpha_0 <^*_\gamma \alpha$ sowie $\gamma_0 < \mu\,\mathcal{A}_\alpha[\gamma]$, so auch $\gamma \,\big|\!\frac{\alpha}{k}\; \Gamma$.

Dabei bezeichne $\gamma \,\big|\!\frac{\alpha}{k}\; \Gamma,\, (\neg)C$ die beiden Herleitungen $\gamma \,\big|\!\frac{\alpha}{k}\; \Gamma,\, C$ und $\gamma \,\big|\!\frac{\alpha}{k}\; \Gamma,\, \neg C$. Ausdrücke der Art „$\gamma, b \vdash \ldots$" sind wohlwollend zu lesen als „$\gamma \cup \{|b|\} \vdash \ldots$". Formeln von der Gestalt $\exists x\varphi$ oder $\varphi_0 \vee \varphi_1$ werden „vom $\bigvee$–Typ" genannt werden, die entsprechenden Negationen „vom $\bigwedge$–Typ".

2.2.3 Definition. Diejenigen Formeln, die explizit in der Konklusion eines Schlusses angezeigt werden, heißen *Hauptformeln* des letzten Schlusses, die explizit in den Prämissen erwähnten Formeln *Nebenformeln* und alle übrigen *Seitenformeln.* (Man beachte, daß eine Formel gleichzeitig Haupt- und Seitenformel sein kann!)

Leicht beweist sich das nützliche Monotonielemma:

2.2.4 Lemma. *Seien $k \le k'$, $\gamma \le \gamma'$, $\alpha \le^*_{\gamma'} \alpha'$ und $\mathrm{par}(\Delta) \le \gamma'$. Dann gilt*

$$\gamma \,\big|\!\frac{\alpha}{k}\; \Gamma \quad\Longrightarrow\quad \gamma' \,\big|\!\frac{\alpha'}{k'}\; \Gamma, \Delta.$$

Beweis. Wir machen eine Herleitungsinduktion. In fast allen Fällen folgt die Behauptung sofort aus der IV zusammen mit der Tatsache, daß aus $\alpha_0 <^*_\gamma \alpha$ und den Voraussetzungen bereits $\alpha_0 <^*_{\gamma'} \alpha'$ folgt. Einzig in den Fällen eines (∃)– oder (cut)–Schlusses muß man noch die Bedingung an das γ_0 (bzw. das b) nachprüfen. Aber mit Lemma 2.1.3 weiß man $\mathcal{A}_{\alpha'}[\gamma'] \subseteq \mathcal{A}_\alpha[\gamma'] \subseteq \mathcal{A}_\alpha[\gamma]$ und somit auch $\mu\mathcal{A}_{\alpha'}[\gamma'] \ge \mu\mathcal{A}_\alpha[\gamma]$. □

Es folgt ein Vorgeschmack auf den schönsten Teil der Analyse (siehe auch die Erläuterungen in Abschnitt 1.3).

2.2.5 Lemma. *Falls $\gamma \,\big|\!\frac{\alpha}{k}\; \Gamma$, so gilt $\mathcal{A}_\alpha[\gamma] \models \Gamma$, was heißen soll, daß für jedes $\xi \in \mathcal{A}_\alpha[\gamma]$ auf L_ξ die Disjunktion über Γ gilt.*

Beweis. Man muß die Bedingungen an „$X \models \Gamma$" aus der Forderung auf Seite 8 nachrechnen und erledigt dies mit einer Herleitungsinduktion.
Der Fall (Ax) ist sofort klar wegen der Parameterbeschränkung und Absolutheit von Δ_0–Formeln.
Im Falle (∧) liefert die IV (mit Lemma 2.2.4)

$$\mathcal{A}_{\alpha_i}[\gamma] \models \Gamma,\, A_i \quad \text{für } i = 0, 1.$$

$\mathcal{A}_\alpha[\gamma] \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_i}[\gamma]$ folgt aber schon aus Lemma 2.1.3, was die Behauptung ergibt.
Der (∨)–Fall verläuft analog.
Wirklich spannend ist der (∀)–Fall: Man hat als IV

$$\mathcal{A}_{\alpha_{|b|}}[\gamma, b] \models \Gamma,\, F(b) \quad \text{für alle } b \in \mathrm{L}_\Omega.$$

Sei $\beta := |b|$. Dann ist zu zeigen, daß

$$\mathcal{A}_\alpha[\gamma] \subseteq \mathop{\triangle}_{\beta<\Omega} \mathcal{A}_{\alpha_\beta}[\gamma, \beta] = \{\xi \mid \xi \in \bigcap_{\eta<\xi} \mathcal{A}_{\alpha_\eta}[\gamma, \eta]\}.$$

Seien dazu also $\gamma < \xi \in \bigcap\limits_{\delta <^\circ_\xi \alpha} \mathcal{A}(\mathcal{A}_\delta)$ und $\eta < \xi$ gegeben. Zu zeigen ist, daß $\xi \in \mathcal{A}_{\alpha_\eta}[\gamma, \eta]$. $\xi > \gamma \cup \eta$ sind Voraussetzungen. Analog zu Lemma 2.1.3 folgt auch schon

$$\alpha_\eta <^*_{\gamma,\eta} \alpha \Rightarrow \alpha_\eta <^\circ_\xi \alpha$$

und damit $\xi \in \mathcal{A}(\mathcal{A}_{\alpha_\eta}) \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_\eta}$.
Zum $(\exists)$–Fall: Wir haben zu zeigen, daß $\mathcal{A}_\alpha[\gamma] \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_0}[\gamma, b]$ ist. Wegen der Voraussetzung $b < \mu\mathcal{A}_\alpha[\gamma]$ gilt aber

$$\mathcal{A}_\alpha[\gamma] = \mathcal{A}_\alpha[\gamma, b],$$

und mit Lemma 2.1.3 folgt $\mathcal{A}_\alpha[\gamma] \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_0}[\gamma, b]$.
Der (cut)–Fall wird mit demselben Argument erledigt. ☐

Das folgende Lemma wird zwar nirgendwo gebraucht, soll aber die Natürlichkeit des Kalküls verdeutlichen.

2.2.6 Lemma. *Sei C eine falsche Δ_0–Formel (d. h. $\mathrm{L} \not\models C$). Dann gilt*

$$\gamma \,\big|\!\frac{\alpha}{k}\, \Gamma, C \quad \Longrightarrow \quad \gamma \,\big|\!\frac{\alpha}{k}\, \Gamma.$$

Beweis. Die einzigen Schwierigkeiten könnten bei den Quantorenschlüssen auftreten. Wir betrachten exemplarisch den $(\forall)$–Fall. Hier hatte man (mit $C = (\forall x \in a)\, C_0(x)$) schlimmstenfalls

$$\gamma, b \,\big|\!\frac{\alpha_{|b|}}{k}\, \Gamma,\, C,\, (b \in a \to C_0(b)),$$

woraus die IV schnell

$$\gamma, b \,\big|\!\frac{\alpha_{|b|}}{k}\, \Gamma,\, (b \in a \to C_0(b))$$

macht. Nun gibt es ein b_0 mit $\mathrm{L} \models b_0 \in a \wedge \neg C_0(b_0)$, da ja C eine falsche Δ_0–Formel war. Erneute Anwendung der IV liefert nun

$$\gamma, b_0 \,\big|\!\frac{\alpha_{|b_0|}}{k}\, \Gamma,$$

und wegen $|b_0| < |a| \le \gamma$ folgt die Behauptung. Ließe man die Beschränkung auf Δ_0–Formeln weg, so könnte man die Beweisführung an dieser Stelle nicht mehr retten, da ea kein a gäbe, das den Parameter b_0 auffängt! ☐

Bevor wir mit der Schnittelimination beginnen, wollen wir kurz überlegen, welches Ziel wir anstreben. Da wir für $F \in \Sigma_1$ aus $\gamma \,\big|\!\frac{\alpha}{k}\, F$ auf $\mathrm{L}_{\Omega_l} \models F$ für ein $l \in \mathbb{N}$ schließen möchten, müssen wir an dieser Stelle Lemma 2.2.4 anwenden. Dies ist aber wegen $\Omega_l^* = \emptyset$ nur möglich mit $\alpha^* = \emptyset$. Also muß es Ziel sowohl der Schnittelimination als auch der Einbettung sein, keine Parameter zu erzeugen. Wir bereiten nun die Reduktion vor und beginnen mit dem Inversionslemma:

2.2.7 Lemma. *Es gilt*

(i) $\gamma \,\big|\!\frac{\alpha}{k}\, \Gamma,\, A_0 \wedge A_1 \Longrightarrow \gamma \,\big|\!\frac{\alpha}{k}\, \Gamma,\, A_i$ *für* $i = 0, 1$.

(ii) $\gamma \,\big|\!\frac{\alpha}{k}\, \Gamma,\, \forall x F(x) \Longrightarrow \gamma, b \,\big|\!\frac{\alpha}{k}\, \Gamma,\, F(b)$ *für alle* $b \in \mathrm{L}_\Omega$.

Beweis. Jeweils per Herleitungsinduktion.
Zu (i): War $A_0 \wedge A_1$ ein Axiom, d. h. $\mathrm{L} \models A_0 \wedge A_1$, so muß auch $\mathrm{L} \models A_i$ gelten und somit die Behauptung. Wurde $A_0 \wedge A_1$ im letzten Schritt mittels $(\wedge)$ erschlossen, so war die Voraussetzung (evtl. mit 2.2.4)

$$\gamma \mid\frac{\alpha_i}{k}\ \Gamma,\ A_0 \wedge A_1,\ A_i.$$

Man wendet zuerst die IV an, um

$$\gamma \mid\frac{\alpha_i}{k}\ \Gamma,\ A_i$$

zu erhalten und schließt nun mit Lemma 2.2.4. War $A_0 \wedge A_1$ nicht die Hauptformel des letzten Schlusses, so folgt die Behauptung sofort aus der Induktionsvoraussetzung.
Zu (ii): Die Argumentation ändert sich nicht. War $\forall x F(x)$ ein Axiom, so gilt bereits $\mathrm{L} \models \Gamma,\ F(b)$ für alle $b \in \mathrm{L}_\Omega$ und mithin $\gamma, b \mid\frac{\alpha}{k}\ \Gamma,\ F(b)$. Wurde die Formel per $(\forall)$ erschlossen, so hatte man

$$\gamma, b \mid\frac{\alpha_b}{k}\ \Gamma,\ \forall x F(x),\ F(b)$$

und nach Anwendung der IV erreicht man wieder mittels Abschwächung (2.2.4) die Behauptung. □

2.2.8 Lemma (Reduktion). *Falls* $\gamma \mid\frac{\alpha}{k}\ \Gamma,\ C$ *und* $\gamma \mid\frac{\beta}{k}\ \Delta,\ \neg C$, *so folgt*

$$\gamma \mid\frac{\alpha \,\#\, \beta}{k}\ \Gamma,\ \Delta,$$

falls $\mathrm{rk}(C) = k > 0$ *ist.*

Beweis. Sei ohne Einschränkung $\neg C$ vom $\bigvee$–Typ. Dann verläuft der Beweis mit Induktion nach β.
Im Axiomfall war die wahre Primformel schon $\in \Delta$ (da ja $\mathrm{rk}(C) > 0$) und somit folgt die Behauptung sofort (Lemma 2.2.4).
War $\neg C$ nicht die Hauptformel des letzten Schlusses, so kann man einfach die IV anwenden und danach denselben Schluß wiederholen.
Sei also $C \equiv \neg A_0 \vee \neg A_1$ die Hauptformel des letzten Schlusses. Dann hatte man als Voraussetzung $\gamma \mid\frac{\beta_0}{k}\ \Delta,\ \neg C,\ \neg A_i$ für ein i. Die IV liefert nun $\gamma \mid\frac{\alpha \,\#\, \beta_0}{k}\ \Gamma,\ \Delta,\ \neg A_i$. Wendet man Inversion (2.2.7) auf die Herleitung von $\Gamma,\ A_0 \wedge A_1$ an, so erhält man $\gamma \mid\frac{\alpha \,\#\, \beta_0}{k}\ \Gamma,\ \Delta,\ A_i$. Damit ergibt ein (cut) (der Rang von A_i ist kleiner als k!) die Behauptung.
Zum $(\exists)$–Fall: Sei $C \equiv \exists x \neg C_0(x)$ die HF des letzten Schlusses. Man hatte also $\gamma, b \mid\frac{\beta_0}{k}\ \Delta,\ \neg C,\ \neg C_0(b)$ für ein b, das die entsprechenden Bedingungen erfüllt. Die IV ergibt $\gamma, b \mid\frac{\alpha \,\#\, \beta_0}{k}\ \Gamma,\ \Delta,\ \neg C_0(b)$. Inversion liefert nun – angewandt auf die Herleitung der $\bigwedge$–Formel – $\gamma, b \mid\frac{\alpha \,\#\, \beta_0}{k}\ \Gamma,\ \Delta,\ C_0(b)$. Da die Bedingung $b < \mu\mathcal{A}_{\alpha\#\beta}[\gamma]$ nach Voraussetzung erfüllt ist, folgt mit einem (cut) wieder die Behauptung. □

Nun sind wir in der Lage, die Schnittelimination zu beweisen.

2.2.9 Satz (Schnittelimination). *Sei $k > 0$. Dann gilt*

$$\gamma \vdash^{\alpha}_{k+1} \Gamma \quad \Longrightarrow \quad \gamma \vdash^{\omega^\alpha}_{k} \Gamma.$$

Beweis. Herleitungsinduktion. War der letzte Schluß kein (cut), so braucht man nur die IV anzuwenden. Im Falle eines Schnitts muß man zur Trickkiste greifen: Man hatte $\gamma_0 \vdash^{\alpha_0}_{k+1} \Gamma, (\neg)C$ und erhält $\gamma_0 \vdash^{\omega^{\alpha_0}}_{k} \Gamma, (\neg)C$.
Fall 1: $\mathrm{rk}(C) < k$. Dann genügt ein einfacher Schnitt.
Fall 2: $\mathrm{rk}(C) = k$. Reduktion ergibt $\gamma_0 \vdash^{\omega^{\alpha_0} \cdot 2}_{k} \Gamma$. Hier würde man gerne eine Abschwächung (Lemma 2.2.4) anwenden, da aber i. a. $\gamma < \gamma_0$ ist, bringt dies keinen Erfolg. Aber zum Glück ist noch genug Platz, um einen Schnitt durchzuführen (an einer (negierten) Primformel, hinzugefügt mit Lemma 2.2.4). Dieser Trick führt zum Ziel. □

Sei jetzt

$$\omega_0(\alpha) = \alpha,$$
$$\omega_{(k+1)}(\alpha) = \omega^{\omega_k(\alpha)}.$$

Dann folgt

2.2.10 Korollar. *Es gilt*

$$\gamma \vdash^{\alpha}_{m+k} \Gamma \quad \Longrightarrow \quad \gamma \vdash^{\omega_k(\alpha)}_{m} \Gamma.$$

2.3 Die Hinzunahme der Ref–Regel

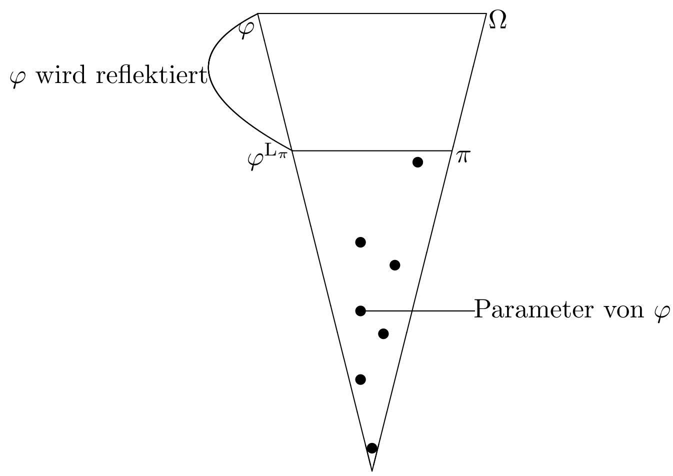
Wir führen nun die kritische Reflexionsregel in unseren halbformalen Kalkül ein. Sei $\varphi(\vec{a}) \in \Pi_m$ (Parameter sind natürlich erlaubt) und $\alpha_0 <^*_\gamma \alpha$. Dann hat die Regel die folgende Gestalt:

$$\frac{\gamma \vdash^{\alpha_0}_{k} \Delta, \varphi(\vec{a})}{\gamma \vdash^{\alpha}_{k} \Delta, \exists z\, (z \models \varphi(\vec{a}))} \qquad (\Pi_m\text{–Ref})$$

wobei wir hier wieder „$z \models \varphi(\vec{a})$“ als Kurzschreibweise für

$$z \neq \emptyset \wedge \mathsf{tran}(z) \wedge \vec{a} \in z \wedge \varphi(\vec{a})^z$$

lesen.
Zur Veranschaulichung ein Bild:



Um die Natur dieser Regel zu erklären, zuerst folgende

Bemerkung. Für Axiome der Gestalt „$A \to B$“ (wir denken an Reflexionsaxiome der Gestalt $\varphi \to \exists z\,(z \models \varphi)$) sind das Axiomenschema $\mathrm{T} + (A \to B)$ und das Regelschema

$$\mathrm{T} + \frac{\Delta, A}{\Delta, B} \qquad \text{(so etwas liegt vor !)}$$

äquivalent.

Zum *Beweis* muß man sich nur die Rückrichtung überlegen. $\neg A, A$ kann man per Tautologie herleiten und als Anwendung der Regel auch $\neg A, B$, d. h. $A \to B$. Ohne Nebenformeln ist diese Aussage falsch. □

Reflexionsregeln machen komplizierte (Π_m–)Formeln einfach (zu Σ_1–Formeln). Somit werden bei der Berechnung des kleinsten Σ_1–Modells mehr Formeln betrachtet, und das Modell wächst entsprechend bei wachsenden m.
Es ist nun an der Zeit, das Aussehen der Ausdünnoperationen (und damit auch den Zusammenhang mit der Reflexionsstärke) zu verraten.

2.3.1 Definition. Zur Theorie Π_m–Ref sei die Ausdünnoperation $\mathcal{A}^m$ wie folgt definiert

$$\alpha \in \mathcal{A}^m(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ ist } \Sigma_m\text{–reflektierend auf } X.$$

Da im Zusammenhang immer klar ist, welche Operation gemeint ist, lassen wir das m in $\mathcal{A}^m$ weiterhin oft weg.

Bemerkung. Mit dieser Definition folgt die Monotonie von $\mathcal{A}$:

$$X \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}(X) \subseteq \mathcal{A}(Y).$$

Wir sind damit in der Lage, die geforderte Ausdünneigenschaft der Operatoren $\mathcal{A}$ zu beweisen.

2.3.2 Lemma. *Für alle α gilt*

(i) $\mathcal{A}(\mathcal{A}_\alpha) \subseteq \mathcal{A}_\alpha$. $(\subseteq)$

(ii) $\mathcal{A}(\mathcal{A}_\alpha) = \mathcal{A}_{\alpha+1}$.

Beweis. Induktion nach α.
Beim Induktionsanfang $\underline{\alpha = 0}$ muß man für (i) folgende Überlegungen anstellen: Für $m \geq 3$ ist ξ genau dann Σ_m–reflektierend, wenn es Σ_m–reflektierend auf Eps ist, da die Aussage „ich bin abgeschlossen unter $\omega^{\cdot}$" eine Π_2–Formel ist. Also ist in diesen Fällen $\mathsf{Eps} \subseteq \mathcal{A}_1$. Für $m = 2$ überlegt man sich (gemäß Lemma 1.2.8), daß das Supremum einer Menge von Epsilon-Zahlen wieder eine solche ist. Für (ii) ist dies die Definition.
Zum Nachfolgerfall $\underline{\alpha = \beta + 1}$. In (i) schließt man mit der Monotonie: $\mathcal{A}(\mathcal{A}_{\beta+1}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{A}_\beta))$ und $\mathcal{A}_{\beta+1} = \mathcal{A}(\mathcal{A}_\beta)$ jeweils mit der IV. In (ii) sei $\pi \in \mathcal{A}(\mathcal{A}_{\beta+1})$. Zu zeigen ist

$$\pi \in \mathcal{A}_{\beta+2} = \{\xi \mid \xi \in \bigcap_{\delta <^\circ_\xi \beta+2} \mathcal{A}(\mathcal{A}_\delta)\}.$$

Ist dabei $\delta = \beta + 1$, so ist dies die Voraussetzung. Ist andererseits $\delta < \beta + 1$, so auch $\delta <^\circ_\pi \beta + 1$, und mit der IV $\pi \in \mathcal{A}_{\beta+1}$ folgt die Behauptung.
Der spannendste Fall ist $\underline{\alpha = \lambda \in \mathsf{Lim}}$: Zu (i) sei π also Σ_m–reflektierend auf $\{\xi \mid \xi \in \bigcap_{\delta <^\circ_\xi \lambda} \mathcal{A}_\delta\}$. Sei weiter $\delta_0 <^\circ_\pi \lambda$ gegeben sowie $\varphi \in \Sigma_m$ mit $\mathrm{L}_\pi \models \varphi$. Erweitere φ um den Parameter δ_0^* zu φ', so daß weiterhin $\mathrm{L}_\pi \models \varphi'$ gilt (das geht wegen $\delta_0^* < \pi^*$). Nach der Voraussetzung gibt es ein

$$\xi \in \bigcap_{\delta <^\circ_\xi \lambda} \mathcal{A}_\delta$$

mit $\mathrm{L}_\xi \models \varphi'$. Aber dieses ξ ist schon $\in \mathcal{A}_{\delta_0}$, denn mit der Wahl von φ' bzw. ξ gilt $\delta_0 <^\circ_\xi \lambda$. Für (ii) ist die Argumentation dieselbe wie im Nachfolgerfall. $\square$

In Gedanken kann man also die Definition von $\mathcal{A}(X)$ ersetzen durch

$$\mathcal{A}(X) = \{\xi \in X \mid \xi \text{ ist } \Sigma_m\text{–reflektierend auf } X\}.$$

Damit beweist sich die zweite wichtige Eigenschaft der $\mathcal{A}$'s von selbst:

2.3.3 Lemma. *Für eine Klasse X von Ordinalzahlen gilt*

$$\mathcal{A}(X[\gamma]) = \mathcal{A}(X)[\gamma]. \qquad ([])$$

Beweis. „$\subseteq$": Wegen obiger Bemerkung ist ein $\xi \in \mathcal{A}(X[\gamma])$ größer als γ, und wegen der Monotonie von $\mathcal{A}$ folgt diese Richtung.
„$\supseteq$": Sei $\xi \in \mathcal{A}(X)[\gamma]$. Dann kann man γ als Parameter verwenden und somit Reflexionspunkte in $X[\gamma]$ erzwingen. $\square$

Bemerkung. Die Hierarchien $(\mathcal{A}^k_\alpha)_{k\in\mathbb{N}}$ sind echt aufsteigend, d. h. es ist $\mu^k(\alpha) < \mu^l(1)$ für alle α, falls $k < l$ gilt. Es ist nämlich jedes $\zeta \in \mathcal{A}^l_1$ schon Π_k–reflektierend, im Gegensatz zu allen $\xi \in \mathcal{A}^k_\alpha$, die kleiner als die kleinste Π_k–reflektierende sind.

Macht es eigentlich einen Unterschied, daß wir von vorneherein nur Epsilon-Zahlen, statt ganz Ω, betrachten (davon abgesehen, daß die Technik einfach wird)? Die Antwort auf diese Frage ist vor allem für die Untersuchung der Teilsysteme in Teil II wichtig, da man dort keine Ω–Potenzen zu verschenken hat. Für die Theorien Π_m–Ref bzw. Π_m–Ref$^-$ + (Π_n–Fund) mit $m \geq 3$ lautet sie auf jeden Fall Nein, denn schon in $\mathcal{A}_1$ holen sich beide Ansätze wieder ein. Im Falle Π_2–Ref sei $\mathcal{A}'_\alpha$ definiert mit Ω als Startmenge. Dann zeigt man

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'_\alpha &= \{\xi \mid \xi = \omega^\alpha \cdot \beta \text{ für ein } \beta < \Omega\},\\
\mathcal{A}'_\Omega &= \{\xi \mid \xi \in \mathsf{Eps}\},\\
\mathcal{A}'_{\Omega^{k+1}} &\subseteq \mathcal{A}_{\Omega^k} \text{ sowie}\\
\mathcal{A}'_{\Omega_l(\Omega^{k+1})} &\subseteq \mathcal{A}_{\Omega_l(\Omega^k)},
\end{aligned}$$

wobei hier $\Omega_1(\Omega^\alpha) := \Omega^{\Omega^\alpha}$ und $\Omega_{l+1}(\Omega^\alpha) := \Omega^{\Omega_l(\Omega^\alpha)}$ ist.
Dies genügt, um später zu sehen, daß sich die Ergebnisse nicht ändern.
Das folgende Lemma bildet (zumindest im ästhetischen Sinne) das Kernstück von Kapitel 2. Man beachte, daß es entscheidend ist, daß die Seitenformeln $\subseteq \Pi_m$ sind.

2.3.4 Lemma (Reflexionslemma). *Seien $\Delta, F \subseteq \Pi_m$. Dann folgt aus $X \models \Delta, F$ bereits*

$$\mathcal{A}(X) \models \Delta, \exists z\,(z \models F).$$

Beweis. Sei $\beta \in \mathcal{A}(X)$, d. h. β sei Σ_m–reflektierend auf X. Angenommen, es gilt $\mathrm{L}_\beta \not\models \exists z\,(z \models F)$. Dann ist insbesondere für alle $\xi < \beta$ $\mathrm{L}_\xi \not\models F$ (denn $\mathrm{L}_\xi^{\mathrm{L}_\beta} = \mathrm{L}_\xi$ wegen $\beta \in \mathsf{Lim}$ und Lemma 1.2.5 (ii)). Also gilt für alle $\xi \in \beta \cap X$: $\mathrm{L}_\xi \models \Delta$. Nehmen wir weiter an, es gilt auch $\mathrm{L}_\beta \models \bigwedge\neg\Delta$. Da $\bigwedge\neg\Delta$ äquivalent zu einer Σ_m–Formel ist, gibt es ein $\xi \in \beta \cap X$, so daß $\mathrm{L}_\xi \models \bigwedge\neg\Delta$, Widerspruch!

2.3.5 Lemma. *Falls $\Gamma \subseteq \Pi_m$, $k \leq m$ und $\gamma \mathrel{\Big|\!\frac{\alpha}{k}} \Gamma$, so gilt*

$$\mathcal{A}_\alpha[\gamma] \models \Gamma.$$

Beweis. Gegenüber Lemma 2.2.5 ist nur die Reflexionsregel hinzugekommen. War der letzte Schluß also eine Anwendung von (Π_m–Ref), so galt

$$\gamma \mathrel{\Big|\!\frac{\alpha_0}{k}} \Delta, F$$

mit $\Gamma = \Delta, \exists z\,(z \models F)$. Dann gibt die IV

$$\mathcal{A}_{\alpha_0}[\gamma] \models \Delta, F.$$

Mit Lemma 2.3.4 folgt

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}_{\alpha_0}[\gamma]) \models \Delta, F,$$

woraus sich mit $\mathcal{A}(\mathcal{A}_{\alpha_0}[\gamma]) = \mathcal{A}(\mathcal{A}_{\alpha_0})[\gamma]$ und Lemma 2.1.3 die Behauptung ergibt. $\square$

2.4 Die Einbettung

Außer der Reflexion bzw. der (Δ_0–Koll) lassen sich alle Axiome von Π_m–Ref wie gewohnt in den Grundkalkül (also ohne Reflexionsregel) einbetten.

2.4.1 Lemma ((Paar), (Vm), (Δ_0–Sep)).

(i) $\left|\frac{3}{0}\right.\ \forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z)$ *(Paar)*

(ii) $\left|\frac{2}{0}\right.\ \forall x \exists y \forall z \in x \forall w \in z(w \in y)$ *(Vm)*

(iii) $\left|\frac{3}{0}\right.\ \forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z))$ *für alle Δ_0–Formeln φ* *(Δ_0–Sep)*

Beweis. (i): Mit (Ax) erhält man $a, b, c \left|\frac{0}{0}\right.\ a \in c \wedge b \in c$ für $c = \{a, b\}$. Ein $(\exists)$–Schluß ergibt $a, b \left|\frac{1}{0}\right.\ \exists x(a \in x \wedge b \in x)$, denn $|c| = \max\{|a|, |b|\} + 1 < \mu\mathcal{A}_1[\max\{|a|, |b|\}]$, da $\mathcal{A}_1$ nur Limes-Zahlen enthält. Zwei $(\forall)$–Schlüsse ergeben die Behauptung.
(ii): Zu gegebenem a sei $b = \bigcup a$. Dann gilt wieder mit (Ax)
$a, b \left|\frac{0}{0}\right.\ (\forall z \in a)(\forall w \in z)(w \in b)$. $(\exists)$ liefert $a \left|\frac{1}{0}\right.\ \exists y[(\forall z \in a)(\forall w \in z)(w \in y)]$ mit derselben Begründung wie eben. Mit $(\forall)$ folgt erneut das Gewünschte.
(iii): Seien a gegeben und $b = \{z \in a \mid \varphi(z)\}$. Man bekommt

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Ax}) &\Longrightarrow a, b, c \left|\frac{0}{0}\right.\ c \in b \leftrightarrow c \in a \wedge \varphi(c) \\
&\overset{(\forall)}{\Longrightarrow} a, b \left|\frac{1}{0}\right.\ \forall z(z \in b \leftrightarrow z \in a \wedge \varphi(z)) \\
&\overset{(\exists)}{\Longrightarrow} a \left|\frac{2}{0}\right.\ \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in a \wedge \varphi(z)) \text{ mit demselben Argument wie oben} \\
&\overset{(\forall)}{\Longrightarrow} \text{Behauptung.}
\end{aligned}
$$

□

Jetzt kann man sich fragen, warum das Argument von (i)–(iii) nicht auch bei der (Δ_0–Koll) zum Ziel führt. Dies liegt daran, daß – im Gegensatz zu obigem Lemma, wo das Existenzbeispiel jeweils schon in der nächsten Schicht der konstruktiblen Welt erscheint – hier keine Aussage über den Zeugen getroffen werden kann.
Wir bereiten nun die Einbettung der Fundierung vor.

2.4.2 Lemma (Tautologien). *Es bedeute $\vec{x} = \vec{y} :\equiv x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_i = y_i$ und $\vec{x} \neq \vec{y} :\equiv \neg \vec{x} = \vec{y}$. Dann gilt*

$$\vec{c} \left|\frac{2(\mathrm{rk}(F) + 2 + i)}{0}\right.\ \forall \vec{x} \forall \vec{y}\, [\vec{x} \neq \vec{y} \vee \neg F(\vec{x}, \vec{c}) \vee F(\vec{y}, \vec{c})],$$

wobei $\vec{c} = c_1, \ldots, c_j$.

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$\vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \left|\frac{2\,\mathrm{rk}(F)}{0}\right.\ \vec{a} \neq \vec{b}, \neg F(\vec{a}, \vec{c}), F(\vec{b}, \vec{c}) \qquad (*)$$

mit Induktion nach dem Aufbau von F.

- $\mathrm{rk}(F) = 0$, also $F \in \Delta_0$. Dann gilt $\mathrm{L} \models \vec{a} \neq \vec{b}, \neg F(\vec{a}, \vec{c}), F(\vec{b}, \vec{c})$ und somit $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \left|\frac{0}{0}\right.\ \vec{a} \neq \vec{b}, \neg F(\vec{a}, \vec{c}), F(\vec{b}, \vec{c})$.

- $\mathrm{rk}(F) > 0$.

– $F \equiv F_0 \vee F_1$. Die IV liefert $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \mathrel{|\!\frac{2\,\mathrm{rk}(F_\iota)}{0}} \vec{a} \neq \vec{b}, \neg F_\iota(\vec{a}, \vec{c}), F_\iota(\vec{b}, \vec{c})$, woraus $(\vee)$–Schlüsse

$$\vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \mathrel{|\!\frac{2\,\mathrm{rk}(F_\iota)+1}{0}} \vec{a} \neq \vec{b}, \neg F_\iota(\vec{a}, \vec{c}), F(\vec{a}, \vec{b})$$

ergeben (jeweils für $\iota = 0, 1$). Nun führt ein $(\wedge)$–Schluß zusammen mit der Tatsache, daß $\mathrm{rk}(F) = \max\{\mathrm{rk}(F_0), \mathrm{rk}(F_1)\} + 1$ ist, zum Ziel.

– $F \equiv \exists x F_0(x)$. Die IV gibt hier

$$c, \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \mathrel{|\!\frac{2\,\mathrm{rk}(F_0)}{0}} \vec{a} \neq \vec{b}, \neg F_0(c, \vec{a}, \vec{c}), F(c, \vec{b}, \vec{c}),$$

worauf man zunächst einen $(\exists)$–, dann einen $(\forall)$–Schluß anwendet, um die Behauptung zu zeigen.

– Die übrigen Fälle sind symmetrisch.

Damit ist $(*)$ gezeigt. Vierfache Anwendung von $(\vee)$ führt zu

$$\vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \mathrel{|\!\frac{2\,(\mathrm{rk}(F)+2)}{0}} \vec{a} \neq \vec{b} \vee \neg F(\vec{a}, \vec{c}) \vee F(\vec{b}, \vec{c}),$$

worauf noch $2i$ $(\forall)$–Schlüsse anzuwenden sind. □

2.4.3 Lemma (Fundierung). *Für alle Formeln F und $\vec{c} = c_1, \ldots, c_j$ gilt*

$$\vec{c} \mathrel{|\!\frac{\Omega+2}{0}} \big[\exists x\, [(\forall y \in x)\, F(y, \vec{c}) \wedge \neg F(x, \vec{c})] \vee \forall x\, F(x, \vec{c})\big]$$

und somit

$$\mathrel{|\!\frac{\Omega+j+2}{0}} \forall \vec{z}\, \big[\exists x\, [(\forall y \in x)\, F(y, \vec{z}) \wedge \neg F(x, \vec{z})] \vee \forall x\, F(x, \vec{z})\big].$$

Beweis. Zuerst zeigen wir

$$\vec{c}, a \mathrel{|\!\frac{\omega|a|+2}{0}} \underbrace{\exists x\, [(\forall y \in x)\, F(y, \vec{c}) \wedge \neg F(x, \vec{c})]}_{\equiv \neg \mathsf{Prog}(F, \vec{c})}, F(a, \vec{c}) \tag{$*$}$$

mit $\mathrm{Ind}(|a|)$. Gelte also $(*)$ für alle b mit $|b| < |a|$. Dann folgt

$$\vec{c}, a \mathrel{|\!\frac{\omega|a|}{0}} \neg \mathsf{Prog}(F, \vec{c}), \forall y\, (y \in a \to F(y, \vec{c})), \tag{$**$}$$

denn

Fall 1: $b \notin a$. Dann folgt $\vec{c}, b, a \mathrel{|\!\frac{1}{0}} b \notin a \vee F(b, \vec{c})$.

Fall 2: $b \in a$. Laut IV gilt $\vec{c}, b, a \mathrel{|\!\frac{\omega|b|+3}{0}} \neg \mathsf{Prog}(F, \vec{c}), (b \notin a \vee F(b, \vec{c}))$,

es führt also ein $(\forall)$–Schluß zum Ziel, damit gilt $(**)$.

Als Anwendung des Tautologielemmas 2.4.2 und des Monotonielemmas 2.2.4 erhält man zudem

$$\vec{c}, a \mathrel{|\!\frac{\omega|a|}{0}} F(a, \vec{c}), \neg F(a, \vec{c}), \neg \mathsf{Prog}(F, \vec{c}),$$

woraus ein $(\wedge)$–Schluß mit $(**)$ $\vec{c}, a \;\Big|\!\frac{\omega|a|+1}{0}\; F(a,\vec{c}), \neg\mathsf{Prog}(F,\vec{c}), \neg F(a,\vec{c}) \wedge \forall y\,(y \in a \to F(y,\vec{c}))$ macht. Daraus folgt mit $(\exists)$ $(*)$.
Von $(*)$ aus kommt man mittels $(\forall)$ zu

$$\vec{c} \;\Big|\!\frac{\Omega}{0}\; \neg\mathsf{Prog}(F,\vec{c}), \forall x\, F(x,\vec{c}).$$

Zweimal $(\vee)$ und danach j–mal $(\forall)$ ergeben nun die Behauptung. □

Die Axiome der Π_m–Reflexion lassen sich offenbar mit der $(\Pi_m$–Ref$)$–Regel einbetten.
Die Existenz einer unendlichen Menge folgt ebenfalls schon mit Π_2–Reflexion: Es gilt $\forall x \exists y\,(y = x \cup \{x\})$. Wird diese Aussage auf eine Menge z reflektiert, so muß diese unendlich sein.
Abschließend läßt sich sagen, daß es zu jedem Axiom $\mathrm{Ax}(\vec{c})$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\vec{c} \;\Big|\!\frac{\Omega + k}{0}\; \mathrm{Ax}(\vec{c}).$$

Dabei ist anzumerken, daß nur die Fundierungen die Herleitungslänge größer als Ω werden lassen.
Die Arbeit, die in Kapitel 2 geleistet wurde, läßt sich damit wie folgt formulieren:

2.4.4 Korollar. *Sei $\Delta(\vec{s}) \subseteq \Pi_m$ eine Formelmenge mit Π_m–Ref $\vdash \Delta(\vec{s})$ und sei $\gamma = \max(|\vec{s}|)$. Dann gibt es ein $\alpha < \varepsilon_{\Omega+1}$ mit $\alpha^* = 0$, so daß*

$$\mathcal{A}_\alpha[\gamma] \models \Delta(\vec{s}).$$

Insbesondere ist für $\Delta = \{F\} \subseteq \Sigma_1$ nun $|F| < \mu\varepsilon_{\Omega+1}$.

Beweis. Einbettung, Schnittelimination (2.2.9) und Lemma 2.3.5. □

Zum Schluß wollen wir noch anmerken, daß man die durch die Schnittelimination erzeugten ω–Türme auch durch Ω–Türme ersetzen kann. Dazu definiert man in Analogie zu $\omega_k(\alpha)$:

$$\Omega_0(\alpha) = \alpha$$
$$\Omega_{(k+1)}(\alpha) = \Omega^{\Omega_k(\alpha)}.$$

2.4.5 Lemma. *Es gilt*

(i) $\omega^{\Omega^{1+\alpha}} = \Omega^{\Omega^\alpha}$ *für alle α und damit*

(ii) $\omega_l(\Omega^{1+\alpha}) = \Omega_l(\Omega^\alpha)$ *für $\alpha, l \geq 1$.*

Beweis. Zu (i): $\omega^{\Omega^{1+\alpha}} = \omega^{\Omega \cdot \Omega^\alpha} = (\omega^\Omega)^{\Omega^\alpha} = \Omega^{\Omega^\alpha}$.
Zu (ii): Induktion nach l. Der Fall $\underline{l = 1}$ war gerade Teil (i). Im Schritt $\underline{l \rightsquigarrow l+1}$ hilft folgender Trick:

$$\omega_{(l+1)}(\Omega^{1+\alpha}) \underset{\text{Def.}}{=} \omega^{\omega_l(\Omega^{1+\alpha})} \underset{\text{IV}}{=} \omega^{\Omega_l(\Omega^\alpha)}$$
$$\underset{l \neq 0}{=} \omega^{\Omega^{\Omega_{(l-1)}(\Omega^\alpha)}} \underset{\alpha \geq 1}{=} \omega^{\Omega^{1+\Omega_{(l-1)}(\Omega^\alpha)}} \underset{\text{(i)}}{=} \Omega^{\Omega^{\Omega_{(l-1)}(\Omega^\alpha)}} = \Omega_{(l+1)}(\Omega^\alpha).$$

□

2.4.6 Korollar. *Es gilt*

$$\omega_l(\Omega^{k+1}) = \Omega_l(\Omega^k)$$

für alle $k, l \geq 1$.

3 Der Wohlordnungsbeweis

In diesem Kapitel wollen wir die Schärfe der in Kapitel 2 erhaltenen oberen Schranken nachweisen. Ziel ist also der Beweis von

$$\boxed{|\Pi_m\text{–Ref}|_{\Sigma_1} \geq \mu\varepsilon_{\Omega+1}}$$

Um in der Theorie (bzw. in einem beliebigen Modell selbiger) über alle Ordinalzahlen $< \varepsilon_{\Omega+1}$ sprechen zu können, muß man diese (und eine „kleiner"-Relation $\lhd$) zuerst geeignet codieren. Der Trick besteht dann darin, mit transfiniter Induktion nach $\lhd$ alle $\mathcal{A}_t$ (wobei t eine Ordinalzahl $< \varepsilon_{\Omega+1}$ darstellt) als nichtleer nachzuweisen (das geschieht in Abschnitt 3.2). Dazu muß die transfinite Induktion mindestens eine Länge t haben. Der Beweis, das dies für jedes t möglich ist, ist das Thema von Abschnitt 3.1.
Wir sind dabei gezwungen, die neuen Definitionen und Konstruktionen innerhalb der jeweiligen Theorie zu rechtfertigen. Das wesentliche Hilfsmittel dabei ist der Σ–Rekursionssatz (vgl. [Ba75, II 6.4]). Dieser erlaubt es uns zum Beispiel, Σ–Funktionszeichen für die gewöhnlichen Rechenoperationen (wie $+, \#$ etc.) einzuführen.

3.1 Herleitung der Transfiniten Induktion

Dies ist nur ein Hilfsabschnitt. Das angestrebte Ergebnis in 3.2, die Totalität der Kollabierungsfunktion innerhalb unserer Theorie zu beweisen, benötigt allerdings Transfinite Induktion (über Π_m–Formeln). Ihr formaler Beweis bis zu möglichst großen Ordinalzahlen steht also im Mittelpunkt dieses Abschnittes. Grob gesagt verläuft alles wie bei einer Analyse von PA (wie z. B. in [Poh89]). Die Techniken in diesem Abschnitt entstammen [Ra92].
In der Folge bezeichnet $\langle .,. \rangle$ das geordnete Paar zweier Mengen.

3.1.1 Definition. Wir definieren simultan die Klasse OR, die die Ordinalzahlen unterhalb $\varepsilon_{\Omega+1}$ darstellen soll, und ein dazu gehörendes $\lhd$.

- $0 \in \mathsf{OR}$
- Falls $1 \leq k,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathsf{On} \setminus \{0\},\ s_1, \ldots, s_k \in \mathsf{OR}$ und $s_k \lhd \cdots \lhd s_1$, so ist auch

$$\hat{\Omega}^{s_1}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \hat{\Omega}^{s_k}\alpha_k := \langle k, \langle s_1, \alpha_1 \rangle, \ldots, \langle s_k, \alpha_k \rangle \rangle \in \mathsf{OR}$$

- Falls $s \in \mathsf{OR} \setminus \{0\}$, so ist $0 \lhd s$.
- Seien $s = \hat{\Omega}^{s_1}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \hat{\Omega}^{s_k}\alpha_k \in \mathsf{OR}$ und $t = \hat{\Omega}^{s_1}\beta_1 \oplus \cdots \oplus \hat{\Omega}^{s_l}\beta_l \in \mathsf{OR}$. Es gilt $s \lhd t$ genau dann ,wenn
  - $k < l$ und $s_i = t_i$ für $1 \leq i \leq k$ oder
  - es ein $p \leq k, l$ gibt, so daß
    - $s_i = t_i$ und $\alpha_i = \beta_i$ für $1 \leq i < p$ und
    - entweder $s_p \lhd t_p$ oder $s_p = t_p$ und $\alpha_p < \beta_p$.

Wir wollen nun zeigen, daß diese Definitionen bereits in Π_2–Ref Δ–Relationszeichen ergeben. Dazu bedienen wir uns des folgenden Satzes über Rekursion entlang wohlfundierter Relationen (eine Folgerung aus dem 2. Rekursionssatz), vgl. [Ba75, V 2.3 und V 3.1].

3.1.2 Satz. *Sei z zulässig und p eine z–rekursive Funktion. Sei weiter für $y \in$* $\mathrm{dom}(p)$ *definiert*

$$x \prec y \quad \Longleftrightarrow \quad x \in p(y).$$

Bezeichne nun $\mathcal{W}(\prec)$ den wohlfundierten Teil von $\prec$. Ist G eine totale 2-stellige z–rekursive Funktion, so gibt es ein z–rekursives F mit $\mathrm{dom}(F) = \mathcal{W}(\prec)$*, so daß*

$$F(x) = G(x, \{\langle y, F(y)\rangle \mid y \prec x\})$$

für alle $x \in \mathcal{W}(\prec)$ gilt.

Für unsere Anwendung definieren wir die Funktion p wie folgt:

$$\begin{aligned}
p(\langle y_0, y_1\rangle) = a \Leftrightarrow \exists \beta_0, \beta_1, \gamma, A\, \big[&\beta_i = \mathrm{rk}(y_i) \wedge \gamma = \beta_0 \,\#\, \beta_1 \wedge A = \mathrm{L}_\lambda \wedge \\
&\big((\forall x \in a)(\exists x_0, x_1 \in x)\exists \alpha_0, \alpha_1, \delta \\
&(x = \langle x_0, x_1\rangle \wedge \alpha_i = \mathrm{rk}(x_i) \wedge \delta = \alpha_0 \,\#\, \alpha_1 \wedge \delta < \gamma)\big) \wedge \\
&\big((\forall x, x_0, x_1, \alpha_0, \alpha_1, \delta \in A) \\
&\ ((x = \langle x_0, x_1\rangle \wedge \alpha_i = \mathrm{rk}(x_i) \wedge \delta = \alpha_0 \,\#\, \alpha_1 \wedge \delta < \gamma) \to x \in a)\big)\big].
\end{aligned}$$

Dabei sind Zeichen wie # (natürliche Summe) oder rk (der L–Rang) mit dem Σ–Rekursionssatz definiert, so daß p tatsächlich einen Σ–Graphen hat. Die etwas verschlüsselte Bedeutung von p ist

$$\langle x_0, x_1\rangle \in p(\langle y_0, y_1\rangle) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{rk}(x_0) \,\#\, \mathrm{rk}(x_1) < \mathrm{rk}(y_0) \,\#\, \mathrm{rk}(y_1).$$

Man erkennt damit $\prec$ als wohlfundiert.
Unser Ziel ist es, χ_{OR} und $\chi_\lhd$ als Σ–Funktionszeichen zu etablieren. Dazu wenden wir Satz 3.1.2 auf das soeben definierte $\prec$ an, um ein F mit

$$F(\langle s, t\rangle) = \langle \chi_{\mathsf{OR}}(s), \chi_\lhd(s, t)\rangle$$

zu erhalten. Aus Lesbarkeitsgründen zuvor zwei Abkürzungen.
Zu $s, t \neq 0$ seien $T = \mathrm{TC}(t)$, $S = \mathrm{TC}(s)$, $\mathcal{T} = \mathsf{Seq}_T$ und $\mathcal{S} = \mathsf{Seq}_S$, wobei $\mathrm{TC}(a)$ den transitiven Abschluß der Menge a und Seq_a die Menge der endlichen Sequenzen über a bezeichnet. Dann bedeuten

$$\begin{aligned}
\mathrm{Term}(t) \equiv &(\exists t_1, \ldots, t_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in T)(\exists n \in \omega)(\exists s \in \mathcal{S})\big(\\
&\quad (F(\langle t_1, 0\rangle))_0 = \cdots = (F(\langle t_k, 0\rangle))_0 = 1 \wedge \\
&\quad \mathsf{lh}(s) = n + 1 \wedge (s)_0 = n \wedge (s)_i = \langle t_i, \alpha_i\rangle \wedge s = t\big)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\mathrm{kleiner}(s, t) \equiv &\big[\mathsf{lh}(s) < \mathsf{lh}(t) \wedge \big(\forall i < \mathsf{lh}(s)\big)\big((s)_i = (t)_i\big)\big] \\
&\vee \big[\big(\exists j \leq \mathsf{lh}(s), \mathsf{lh}(t)\big)\big[\big(\forall i < j\big)\big((s)_i = (t)_i\big) \wedge \\
&\quad \big((F(\langle (s_j)_0, (t_j)_0\rangle))_1 = 1 \vee \big((s_j)_0 = (t_j)_0 \wedge (s_j)_1 < (t_j)_1\big)\big)\big]\big].
\end{aligned}$$

Jetzt kann man F durch folgende Rekursion definieren:

$$F(\langle s,t\rangle) = \begin{cases} \langle 1,0\rangle & \text{für } s,t=0 \\ \langle 1,0\rangle & \text{falls } s=0,\ t\neq 0 \text{ und} \\ & \exists T\exists\mathcal{T}(T=\mathrm{TC}(t)\wedge\mathcal{T}=\mathsf{Seq}_T\wedge\neg\mathrm{Term}(t)) \\ \langle 1,1\rangle & \text{falls } s=0,\ t\neq 0 \text{ und} \\ & \exists T\exists\mathcal{T}(T=\mathrm{TC}(t)\wedge\mathcal{T}=\mathsf{Seq}_T\wedge\mathrm{Term}(t)) \\ \langle 0,0\rangle & \text{falls } s\neq 0,\ t=0 \text{ und} \\ & \exists S\exists\mathcal{S}(S=\mathrm{TC}(s)\wedge\mathcal{S}=\mathsf{Seq}_S\wedge\neg\mathrm{Term}(s)) \\ \langle 1,0\rangle & \text{falls } s\neq 0,\ t=0 \text{ und} \\ & \exists S\exists\mathcal{S}(S=\mathrm{TC}(s)\wedge\mathcal{S}=\mathsf{Seq}_S\wedge\mathrm{Term}(s)) \\ \langle 0,0\rangle & \text{falls } s,t\neq 0 \text{ und } (F(\langle s,0\rangle))_0=0 \\ \langle 1,0\rangle & \text{falls } s,t\neq 0 \text{ und } (F(\langle s,0\rangle))_0=1\wedge(F(\langle t,0\rangle))_0=0 \\ \langle 1,0\rangle & \text{falls } s,t\neq 0 \text{ und } (F(\langle s,0\rangle))_0=1\wedge \\ & (F(\langle t,0\rangle))_0=1\wedge\neg\mathrm{kleiner}(s,t) \\ \langle 1,1\rangle & \text{falls } s,t\neq 0 \text{ und } (F(\langle s,0\rangle))_0=1\wedge \\ & (F(\langle t,0\rangle))_0=1\wedge\mathrm{kleiner}(s,t) \end{cases}$$

Dabei wurde nur auf erlaubte Terme zurückgegriffen, mit obigem Satz können wir also F als Σ–Funktionszeichen (und somit OR und $\lhd$ als Δ–Relationszeichen) in unsere Sprache aufnehmen.

3.1.3 Definition.
(i) $\hat{1} := \hat{\Omega}^0 1$, $\hat{\Omega} := \hat{\Omega}^{\hat{1}} 1$
(ii) Wir definieren $s+t$ für $s,t\in\mathsf{OR}$ durch folgende Rekursion:

- $s+0 := s$ und $0+s := s$
- Seien $s=\hat{\Omega}^{s_1}\alpha_1\oplus\cdots\oplus\hat{\Omega}^{s_k}\alpha_k$ und $t=\hat{\Omega}^{t_1}\beta_1\oplus\cdots\oplus\hat{\Omega}^{t_l}\beta_l$ mit $1\leq k,l$. Falls $s_1\lhd t_1$ ist, setze $s+t:=t$. Sei anderenfalls p der größte Index $\leq k$ mit $t_1\unlhd s_p$. Setze dann
  - $s+t := \hat{\Omega}^{s_1}\alpha_1\oplus\cdots\oplus\hat{\Omega}^{s_{p-1}}\alpha_{p-1}\oplus\hat{\Omega}^{t_1}(\alpha_p+\beta_1)\oplus\hat{\Omega}^{t_2}\beta_2\cdots\oplus\hat{\Omega}^{t_l}\beta_l$, falls $s_p=t_1$ ist, oder
  - $s+t := \hat{\Omega}^{s_1}\alpha_1\oplus\cdots\oplus\hat{\Omega}^{s_p}\alpha_p\oplus\hat{\Omega}^{t_1}\beta_1\oplus\cdots\oplus\hat{\Omega}^{t_l}\beta_l$, falls $t_1\lhd s_p$.

(iii) Definiere $\hat{\Omega}^s 0 := 0$ und $\hat{\alpha} := \hat{\Omega}^0\alpha$.

Bemerkung. Die Strukturen $(\mathsf{OR},\lhd,+)$ und $(\varepsilon_{\Omega+1},<,+)$ sind kanonisch isomorph.
Dies sieht man z. B. dadurch, daß man $\alpha<\varepsilon_{\Omega+1}$ in Normalform zur Basis Ω entwickelt.
Sei $\mathsf{Prog}^k(\lhd,A)$ die Formel

$$\forall s\left[(\forall t\lhd s)\ A(t)\rightarrow(\forall t\lhd s+\hat{\Omega}^k)\ A(t)\right].$$

3.1.4 Lemma. *Es gilt*

$$\Pi_m\text{–Ref}\vdash\mathsf{Prog}(\lhd,A)\rightarrow\mathsf{Prog}^1(\lhd,A)$$

für alle Formeln A.

Beweis. Offenbar ist $\mathsf{Prog}^0(\lhd, A)$ äquivalent zu $\mathsf{Prog}(\lhd, A)$. Gelte also $\mathsf{Prog}(\lhd, A)$ und $(\forall t \lhd s)\ A(t)$. Sei $B(\alpha) \equiv (\forall t \lhd s + \hat{\Omega}^0\alpha)\ A(t)$. Mit Induktion nach α zeigen wir $B(\alpha)$. Gelte dazu also $(\forall \beta < \alpha)\ B(\beta)$. $\underline{B(0)}$ gilt offensichtlich. Falls $\underline{\alpha \in \mathsf{Lim}}$, so gibt es zu jedem $t \lhd s + \hat{\Omega}^0\alpha$ ein $\beta < \alpha$ mit $t \lhd s + \hat{\Omega}^0\beta$, und somit kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden. Sei also $\underline{\alpha = \beta + 1}$. Dann gilt $(\forall t \lhd s + \hat{\Omega}^0\beta)\ A(t)$. Mit Prog^0 erhält man $(\forall t \lhd s + \hat{\Omega}^0\beta + \hat{\Omega}^0)\ A(t)$, also $B(\alpha)$. Da es aber zu jedem $t \lhd s + \hat{\Omega}^1$ ein α mit $t \lhd s + \hat{\Omega}^0\alpha$ gibt, folgt daraus die Behauptung. □

Sei OT die kleinste Teilmenge von OR, die 0 und 1 enthält und abgeschlossen ist unter der Regel:

$$\text{Wenn } s = \hat{\Omega}^{s_1}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \hat{\Omega}^{s_k}\alpha_k \text{ ist und } s_1, \ldots, s_k,\ \hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_k \in \mathsf{OT}, \\ \text{so ist auch } s \in \mathsf{OT}.$$

Dann ist jedes $p \in \mathsf{OT}$ (wieder mit einem einfachen Rekursionsargument) Δ–definierbar in $\mathrm{KP}^- + (\Pi_2\text{–Fund})$. Also kann man jedes dieser p als Konstante auffassen. Bezeichnen wir nun mit

$$\mathsf{TI}(t, \mathcal{F})$$

die transfinite Induktion für Formeln $F \in \mathcal{F}$ bis zu t, also

$$\mathsf{Prog}(\lhd, F) \to (\forall s \lhd t) F(s),$$

so erhalten wir folgendes

3.1.5 Korollar. *Es gilt*

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash \mathsf{TI}(\hat{\Omega}^1, \Pi_k)$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $A \in \Pi_k$. Setze $s = 0$ in der Formel $\mathsf{Prog}^1(\lhd, A)$ aus Lemma 3.1.4. □

3.1.6 Lemma. *Für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *und* $p \in \mathsf{OT}$ *gilt*

$$\Pi_m\text{–Ref} + \mathsf{TI}(p, \Pi_{k+1}) \vdash \mathsf{TI}(\hat{\Omega}^p, \Pi_k).$$

Beweis. Der Beweis wird später unter verschärften Bedingungen (eingeschränkter Fundierung) geführt, deswegen verweisen wir auf 5.1.3. □

Sei $\hat{\Omega}_0(t) := t$ und $\hat{\Omega}_{(l+1)}(t) := \hat{\Omega}^{\hat{\Omega}_l(t)}$ in Analogie zu früher definiert. Dann erhält man

3.1.7 Korollar.

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash \mathsf{TI}(\hat{\Omega}_k(\hat{\Omega}^1), \Pi_l)$$

für alle $k, l \in \mathbb{N}$.

Beweis. Lemmata 3.1.4 und 3.1.6.

Wir haben somit transfinite Induktion für alle erststufigen Formeln bis zu einem beliebig großen Punkt unterhalb $\varepsilon_{\Omega+1}$ bewiesen.

3.2 $\mathcal{A}_s \neq \emptyset$ für beliebig große s

In diesem Abschnitt wollen wir in der Theorie Π_m–Ref zeigen, daß für alle $\alpha < \varepsilon_{\Omega+1}$ (bzw. deren Codierungen) die Menge $\mathcal{A}_\alpha$ nichtleer ist. Natürlich bildet eine Induktion nach α den Rahmen des Beweises. Die Frage ist allerdings, wie man die Induktion formuliert: Einzig die Voraussetzung „$\mathcal{A}_\xi \neq \emptyset$ für alle $\xi < \alpha$“ genügt leider nicht. Stattdessen führen wir folgenden Begriff ein:

3.2.1 Definition. Eine Menge X von Ordinalzahlen $< \Omega$ heiße *m–schön*, falls

- X ist Σ–definierbar und
- X ist Σ_m–reflektierend, in Zeichen $\Sigma_m[X]$..

Dabei gilt $\Sigma_m[X]$, falls für jedes $\varphi \in \Sigma_m$ gilt

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash \varphi^{\mathrm{L}} \to (\exists \pi \in X)\, \mathrm{L}_\pi \models \varphi.$$

(Dabei ist zu beachten, daß φ^{L} in derselben Komplexitätsklasse wie φ liegt.)
Hat man erst einmal alle $\mathcal{A}_\alpha$ mit $\alpha < \varepsilon_{\Omega+1}$ als m–schön nachgewiesen, so folgt, daß diese auch nichtleer sind, denn wahre Σ_m–Formeln findet man immer. Im folgenden sind wir also gezwungen, innerhalb der Theorien bzw. deren Modellen von Formeln, Erfüllbarkeit etc. zu sprechen. Für die Grundlagen dazu sei auf [Dev84] verwiesen. Nur in der Schreibweise werden wir etwas abweichen: Mengen, die Formeln codieren, werden mit $\ulcorner\varphi\urcorner$ usw. bezeichnet. Von besonderer Bedeutung ist dieser Sachverhalt:

3.2.2 Satz. *Für $k \geq 1$ gibt es (in einer einfachen Basismengenlehre) eine Σ_k–Formel Sat_{Σ_k}, die die Erfüllbarkeit für Σ_k–Formeln ausdrückt, d. h. es gilt für $\varphi \in \Sigma_k$*

$$\varphi \iff \mathsf{Sat}_{\Sigma_k}(\ulcorner\varphi\urcorner).$$

Analoges ist damit auch für Π_k wahr.

Beweis. Wir bewegen uns jetzt in dieser Basismengenlehre und zitieren [Dev84, I 9.10], um einzusehen, daß die Formel $\mathsf{Sat}(u, \ulcorner\varphi\urcorner) :\leftrightarrow u \models \varphi$ in die Klasse Δ_1 fällt. Dann können wir definieren

$$\mathsf{Sat}_{\Sigma_1}(\ulcorner\exists x\varphi_0(x,\vec{a})\urcorner) \Leftrightarrow \exists b(\exists a \in b)\,[\vec{a} \in b \wedge \mathsf{Sat}(b, \ulcorner\varphi_0(a,\vec{a}))],$$

wobei wir Funktion, die $\ulcorner\exists x\varphi_0(x,\vec{a})\urcorner$ in $\ulcorner\varphi_0(a,\vec{a})\urcorner$ umrechnet, unterschlagen dürfen, da sie mit einfachen Mitteln zu definieren ist.
Für Π_1 erhält man damit

$$\mathsf{Sat}_{\Pi_1}(\ulcorner\forall x\varphi_0(x,\vec{a})\urcorner) \Leftrightarrow \neg\mathsf{Sat}_{\Sigma_1}(\ulcorner\exists x\neg\varphi_0(x,\vec{a})\urcorner).$$

Dieses Verfahren läßt sich entlang der arithmetischen Hierarchie fortsetzen, z. B. gilt

$$\mathsf{Sat}_{\Sigma_2}(\ulcorner\exists x\forall y\varphi_0(x,y,\vec{a})\urcorner) \Leftrightarrow \exists a\,\mathsf{Sat}_{\Pi_1}(\ulcorner\forall y\varphi_0(a,y,\vec{a})\urcorner).$$

□

Zu einem Term $t \in \mathsf{OR}$ wollen wir nun t^* wie folgt definieren:

$$t^* = \alpha \iff \alpha = \sup\{\xi \mid \xi \in \mathrm{TC}(t) \wedge \xi \in \mathsf{Eps}\}.$$

Damit ist dann auch die Relation $\lhd^\circ_x$ als Abkürzung erklärt.
Wir können nun die erste Bedingung an „m–schön“ nachweisen:

3.2.3 Satz. *Es ist $\mathcal{A}_s$ uniform Σ–definierbar für alle $s \in \mathsf{OR}$, genauer gibt es eine Σ–Formel $\varphi_{\mathcal{A}}$ mit*

$$\xi \in \mathcal{A}_s \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_{\mathcal{A}}(s, \xi).$$

Beweis. Wir möchten wieder Satz 3.1.2 anwenden, um ein entsprechendes F mit

$$F(s, \xi) \quad \Longleftrightarrow \quad \xi \in \mathcal{A}_s$$

zu erhalten. Bei der Definition von „$\xi \in \mathcal{A}_s$“ erkennt man, daß für $\zeta < \xi$ auf alle $\mathcal{A}_t$ mit $t \lhd_\xi^\circ s$ zurückgegriffen wird. Um das in der Voraussetzung des obigen Satzes geforderte p geeignet zu definieren, müssen wir also gewährleisten, daß

$$\langle t, \zeta \rangle \prec \langle s, \xi \rangle \leftrightarrow \langle t, \zeta \rangle \in p(\langle s, \xi \rangle) \leftrightarrow t \lhd_\xi^\circ s \wedge \zeta < \xi$$

gilt. Wir realisieren dies wie folgt:

$$\begin{aligned} p(x) = a \leftrightarrow \exists x_0, x_1, y_0, y_1, y, e, E \big[\\ & x = \langle x_0, x_1 \rangle \wedge y_0 = x_0^* \wedge x_1 \in \mathsf{On} \wedge y_1 = x_1^* \wedge \\ & y = y_0 \cup y_1 \wedge e = y^+ \wedge E = \mathrm{L}_e \wedge \\ & \big((\forall z' \in a)(\exists z_0, z_1, z) \\ & \ (z' = \langle z_0, z_1 \rangle \wedge z = z_0^* \wedge z_0 \lhd x_0 \wedge z_1 < x_1 \wedge z < y)\big) \wedge \\ & \big((\forall z', z_0, z_1, z \in E) \\ & \ (z = \langle z_0, z_1 \rangle \wedge z = z_0^* \wedge z_0 \lhd x_0 \wedge z_1 < x_1 \wedge z < y \rightarrow z \in a)\big)\big]. \end{aligned}$$

(An dieser Stelle wird die Bedeutung des *–Ansatzes klar: Er ermöglicht es hier, die entscheidenden Terme in einer Menge (E) aufzusammeln!)
Man erkennt $\prec$ als wohlfundiert. Definieren wir nun

$$\begin{aligned} F(s, \xi) = 1 \quad \longleftrightarrow \quad & \big[s = 0 \wedge \xi \in \mathsf{Eps}\big] \vee \\ & \big[(\forall t \lhd_\xi^\circ s)(\xi \in \mathcal{A}(\mathcal{A}_t))\big] \end{aligned}$$

und lösen die Abkürzungen durch

$$\begin{aligned} (\forall t \lhd_\xi^\circ s) A \quad \longleftrightarrow \quad & \exists y \, [\beta = \xi^* \cup (s^* + 1) \\ & \wedge \exists \gamma \exists Z \, (\gamma = \beta^+ \wedge E = \mathrm{L}_\gamma \wedge (\forall t \in E)(t \lhd s \rightarrow A))] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \xi \in \mathcal{A}(\mathcal{A}_t) \quad \longleftrightarrow \quad & \exists X \, [X = \mathrm{L}_\xi \wedge (\forall \varphi \in X)(\mathsf{Fml}_{\Sigma_m}(\varphi) \wedge X \models \varphi \\ & \rightarrow (\exists \zeta \exists Y (Y = \mathrm{L}_\zeta \wedge \zeta < \xi \wedge F(t, \zeta) \wedge Y \models \varphi)))] \end{aligned}$$

auf, so erkennt man, daß die Formel in der Tat Σ ist und nur auf erlaubte $F(t, \zeta)$ bezug nimmt. $\square$

Bemerkung. Es gilt

$$\varphi_{\mathcal{A}}(s, \xi) \Leftrightarrow (\varphi_{\mathcal{A}}(s, \xi))^{\mathrm{L}}.$$

Um auch die zweite Forderung zu erfüllen, muß man sich etwas mehr anstrengen und zunächst einige Hilfssätze beweisen.

3.2.4 Lemma. *Die Formeln*

$$\Sigma_m[X] \quad \textit{für } \Sigma\textit{–definierbares } X$$

und

$$\forall t \lhd s\ \Sigma_m[\mathcal{A}_t] \quad \textit{mit } \Sigma\textit{–definierbaren } \mathcal{A}_t \textit{ für alle } t \lhd s$$

sind jeweils äquivalent zu einer Π_m*–Formel.*

Beweis.

$$\begin{aligned}\Sigma_m[X] \Longleftrightarrow & \forall x \forall y \forall \vec{v} \forall \vec{z} \forall \lambda \\ & \big[(y = \mathrm{L}_\lambda \wedge \mathsf{Fml}_{\Sigma_m}(x) \wedge \mathsf{FrVar}(x) = \{v_1, \ldots, v_k\} \wedge \\ & \quad z_1, \ldots, z_k \in y \wedge \mathsf{Sat}_{\Sigma_m}(x^{\mathrm{L}}/\vec{z})) \\ & \quad \longrightarrow \exists \alpha \exists w (w = \mathrm{L}_\alpha \wedge \alpha \in X \wedge w \models x)\big]\end{aligned}$$

Dabei sind alle Formeln bis auf $\mathsf{Sat}_{\Sigma_m}(x^{\mathrm{L}}/\vec{z})$ (wobei die Schreibweise „$x'/\vec{z}$“ das Ersetzen der freien Variablen in x' durch $\vec{z}$ bedeuten soll) einfach (Π_2). Somit ist die erste Formel als Π_m nachgewiesen.
Es folgt sofort die Aussage für die zweite Formel, da $\lhd \in \Delta$ ist. □

3.2.5 Lemma. *Sei* $\pi \in \mathsf{Eps}$*. Aus* $t \lhd_\pi^\circ s$ *und* $s \in \mathrm{L}_\pi$ *folgt schon* $\mathrm{L}_\pi \models t \lhd s$*.*

Beweis. Sei $t \lhd_\pi^\circ s$, d. h. $t \lhd s$ sowie $t^* < \pi^* \cup (s^* + 1)$. Da $s \in \mathrm{L}_\pi$, folgt, daß $(s^* + 1) < \pi^*$ ist, also $t^* < \pi^* \underset{\pi \in \mathsf{Eps}}{=} \pi$. Damit hat man $t \in \mathrm{L}_\pi$, und wegen $\lhd \in \Delta$ erhält man $\mathrm{L}_\pi \models t \lhd s$. □

Bemerkung. An dieser Stelle würde der Beweis mit „$<^*$“ statt „$<^\circ$“ scheitern: Es ist $\hat{\pi} \lhd_\pi^* \hat{\Omega}$, aber natürlich nicht $\hat{\pi} \in \mathrm{L}_\pi$.

3.2.6 Lemma. $\mathrm{L}_\pi \models \Sigma_m[X]$ *impliziert für* Σ*–definierbares* X *bereits, daß* π Σ_m*–reflektierend auf* X *ist, in Zeichen* $\Sigma_m^\pi[X]$*.*

Beweis. Klar, da X ja Σ–definierbar ist. □

Für den Beweis von Satz 3.2.8 benötigt man außerdem den folgenden Sachverhalt:

3.2.7 Lemma. *Es gilt für* $k \geq 1$

$$\mathsf{Sat}_{\Pi_k}(\ulcorner \varphi^{\mathrm{L}} \urcorner) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{Sat}_{\Pi_k}(\ulcorner \varphi \urcorner)^{\mathrm{L}}.$$

Beweis. Induktion nach dem Formelaufbau mit Hilfe der Definition des Sat–Prädikates. □

Wir wollen jetzt zeigen, daß zu jedem gegebenen $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash (\forall s \lhd \hat{\Omega}_k(\hat{\Omega}^1))\Sigma_m[\mathcal{A}_s].$$

Mit der zur Verfügung stehenden $\mathsf{TI}(\hat{\Omega}_k(\hat{\Omega}^1), \Pi_m)$ genügt es, zu zeigen, daß für festes s

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash (\forall t \lhd s)\, \Sigma_m[\mathcal{A}_t] \rightarrow \Sigma_m[\mathcal{A}_s]$$

wahr ist. Um dies einzusehen, begeben wir uns in ein beliebiges Modell von Π_m–Ref (und unterdrücken zusätzliche Parameter):

3.2.8 Satz (Progressivitätssatz). *Wir befinden uns in einem beliebigen Modell der Theorie* Π_m–Ref. *Dann gilt*

$$(\forall t \lhd s)\, \Sigma_m[\mathcal{A}_t] \to \Sigma_m[\mathcal{A}_s].$$

Beweis. Gelte also $(\forall t \lhd s)\, \Sigma_m[\mathcal{A}_t]$ und sei φ eine Π_{m-1}–Formel mit $\mathsf{Sat}_{\Pi_{m-1}}(\ulcorner \varphi^{\mathrm{L}} \urcorner)$. Gemäß der Bemerkung zur Definition von $\varphi_{\mathcal{A}}$ gilt dann auch

$$\Big(\underbrace{(\forall t \lhd s)\, \Sigma_m[\mathcal{A}_t] \wedge \mathsf{Sat}_{\Pi_{m-1}}(\ulcorner \varphi \urcorner)}_{=:\chi}\Big)^{\mathrm{L}}.$$

Dann ist $\chi \in \Pi_m$. Eine Anwendung der Π_m–Reflexion ergibt also ein π mit

$$\mathrm{L}_\pi \models \chi,$$

also $\mathrm{L}_\pi \models \varphi$ und

$$\mathrm{L}_\pi \models (\forall t \lhd s)\, \Sigma_m[\mathcal{A}_t].$$

Mit Lemma 3.2.5 (denn natürlich ist $s \in \mathrm{L}_\pi$) folgt nun aus $t \lhd_\pi^\circ s$ schon $\mathrm{L}_\pi \models t \lhd s$ und somit $t \lhd_\pi^\circ s \to \mathrm{L}_\pi \models \Sigma_m[\mathcal{A}_t]$. Aus Lemma 3.2.6 erschließt man die Behauptung, da

$$\pi \in \mathcal{A}_s \iff (\forall t \lhd_\pi^\circ s)\ \Sigma_m^\pi[\mathcal{A}_t].$$

$\square$

Bemerkung. Mit demselben Beweis hätten wir auch zeigen können, daß unter denselben Voraussetzungen gilt

$$\Pi_m\text{–Ref} \vdash (\forall s \lhd \hat{\Omega}_k(\hat{\Omega}^1))\Pi_m[\mathcal{A}_s].$$

Dies ist aber erstens nicht nötig, zweitens benötigt der Beweis Π_{m+1}–Fundierung, und wir könnten ihn bei der Analyse der Teilsysteme in Kapitel 5 nicht wörtlich übernehmen.

Teil II

Theorien mit eingeschränkter Fundierung

Wir betrachten nun die Theorien Π_m–$\mathrm{Ref}^- + (\Pi_n$–Fund), es wird also das Fundierungsschema eingeschränkt auf Π_n–Formeln. Dabei wollen wir stets $n \geq 2$ voraussetzen, um sinnvoll Mathematik betreiben zu können. Zum Beweis des Σ–Rekursionssatzes genügt z. B. Π_1–Fundierung nicht, man benötigt Fundierung auch für Σ_1–Formeln. Diese Theorien sind für den Fall $n < m$ eher uninteressant. Deshalb werden wir diese Fälle jeweils in kleinen Abschnitten am Ende der Kapitel betrachten. Es sei also bis auf weiteres $m \leq n$ vorausgesetzt. Bemerkenswert ist, daß Σ_n–Fundierung ungleich schwieriger zu handhaben ist (für $n > 1$ sind noch keine Ergebnisse bekannt). Die folgenden Techniken können durch Hinzunahme von $\mathbb{N}$ als Urelementmenge und Benutzung einer ω–Regel auch für eine Analyse von Π_m–$\mathrm{Ref}^- + (\Pi_n$–Fund$) + \mathrm{IND}$ (das Schema der vollen Induktion auf $\mathbb{N}$) verwandt werden. Das korrekte Ergebnis kann man an den folgenden ablesen, wenn man k durch ω_k ersetzt.

4 Schnittelimination

Um das Ergebnis vorwegzunehmen: Wir werden in diesem Kapitel

$$\boxed{|\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund})|_{\Sigma_1} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \mu\Omega_{(n-m)}(\Omega^k)}$$

beweisen. Warum bedarf es dazu neuer Techniken? Betrachten wir beispielsweise die Theorie Π_m–$\mathrm{Ref}^- + (\Pi_m$–Fund) (es sei also $m = n$). Wendet man das Verfahren aus Kapitel 2 an (und erlaubt nur Π_m–Fundierung in Herleitungen), so erhält man nach dem Wegschneiden der Axiome in der Herleitung

$$\vdash \neg \mathrm{Ax}_1, \ldots, \neg \mathrm{Ax}_l, F$$

von dem Σ_1–Satz F etwa

$$\left|\frac{\Omega + k}{m+4}\right. F.$$

Das Schnitteliminationsverfahren schraubt die Herleitungslänge auf $\omega_4(\Omega + k)$ hoch, was leider größer ist als jedes der oben geforderten Ω^l. Mit einem feineren Ansatz kann man dieses Problem lösen, die Idee und der größte Teil der Technik stammt aus [Ra92]. Zuerst führt man einen formalen Kalkül – K_{mn} – ein, der es erlaubt, Schnitte bis zum Rang n zu eliminieren. Dies geschieht in Abschnitt 4.1. Das Problem dabei ist, daß man das Fundierungsschema ein wenig verdrehen muß. Die Einbettung von K_{mn} in den ursprünglichen halbformalen Kalkül, die in Abschnitt 4.2 erfolgt, bereitet entsprechende Schwierigkeiten und benötigt eine zusätzliche Forderung an die Herleitungen.

4.1 Der formale Kalkül

Damit in diesem Abschnitt alles glatt durchgeht, muß gewährleistet sein, daß die Konklusionen der nichtlogischen Regeln, also der Π_m–Reflexion und der

Π_n–Fundierung, einen Rang $< n$ besitzen. Damit auch in 4.2 nichts schiefgeht, dürfen in der Herleitung einer Menge von Σ_n^*–Formeln (eine Definition folgt bald) nur solche Σ_n^*–Formeln auftreten, d. h. auch die Prämissen dieser nichtlogischen Regeln müssen $\subseteq \Sigma_n^*$ sein.

4.1.1 Definition (Der Kalkül K_{mn}). Wir leiten endliche Formelmengen wie folgt her:

- Axiome

(Log)	$\Gamma, A, \neg A$ für $A \in \Delta_0$
(Ext)	$\Gamma, a = b \wedge A(a) \rightarrow A(b)$ wieder für $A \in \Delta_0$
(Paar)	$\Gamma, \exists x\,(a \in x \wedge b \in x)$
(Vm)	$\Gamma, \exists x (\forall y \in a)(\forall z \in y)(z \in x)$
(Δ_0–Sep)	$\Gamma, \exists x[(\forall y \in a)(\varphi(y) \rightarrow y \in x) \wedge (\forall y \in x)(a \in a \wedge \varphi(y))]$ für eine Δ_0–Eigenschaft φ
(FundAx)	$\Gamma, a \neq \emptyset \rightarrow (\exists x \in a)(\forall y \in x)(y \notin a)$
(Ue)	$\exists x\,\mathsf{Lim}(x)$

- Logische Regeln

($\wedge$)	$\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, A_i$ für $i = 0, 1 \Rightarrow \mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, A_0 \wedge a_1$
($\vee$)	$\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, A_i$ für $i \in \{0, 1\} \Rightarrow \mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, A_0 \vee A_1$
($b\forall$)	$\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, a \in b \rightarrow F(a) \Rightarrow \mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, (\forall x \in b) F(x)$
($\forall$)	$\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, F(a) \Rightarrow \mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, \forall x F(x)$
($b\exists$)	$\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, a \in b \wedge F(a) \Rightarrow \mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, (\exists x \in b) F(x)$
($\exists$)	$\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, F(a) \Rightarrow \mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, \exists x F(x)$
(cut)	$\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, (\neg)C \Rightarrow \mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma$

- Nicht–logische Regeln

(Π_n–FR) Für $F \in \Delta_0$ und $\mathsf{Q}\vec{z}F \in \Sigma_{n-1}$:

$$\frac{\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, \exists x \exists y \neg \mathsf{Q}\vec{z}\,[x \in a \rightarrow F(x, y, \vec{z})], \mathsf{Q}\vec{z}F(a, b, \vec{z})}{\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, \mathsf{Q}\vec{z}F(c, d, \vec{z})}$$

(Π_m–RefR) Für $F \in \Sigma_{m-1}$:

$$\frac{\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, F(a)}{\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, \exists z\,(z \models F(a))}$$

Dabei sollen natürlich die Variablenbedingungen erfüllt sein: Bei ($\forall$) und ($b\forall$) darf das a nicht in Γ auftreten, ebenso bei der (Π_m–RefR). Die Variablen a, b, c, d, die in der Fundierungsregel auftreten sollen auch alle neu sein.
Man erkennt die Symmetrie der Regeln

$$\begin{array}{cc} (\wedge) & (\vee) \\ (b\forall) & (b\exists) \\ (\forall) & (\exists), \end{array}$$

so daß in diesem Bereich die Schnittelimination keine Probleme bereitet. Bei den nichtlogischen Regeln hat die Konklusion der Reflexion den Grad 1 und die der Fundierung den Grad $n-1$. Definiert man

$$2_0^k = k$$
$$2_{l+1}^k = 2^{2_l^k},$$

so folgt daraus

4.1.2 Satz (Schnittelimination in K_{mn}). *Es gilt*

$$\mathrm{K}_{mn}\left|\frac{k}{n+l}\ \Gamma \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{K}_{mn}\right|\frac{2_l^k}{n}\ \Gamma.$$

Beweis. Trivial, da Formeln, die mit nichtlogischen Regeln erschlossen wurden, auch weiterhin geschnitten werden dürfen. □

Um nun zu sehen, daß K_{mn} auch wirklich jedes Theorem von Π_m–Ref$^-$ + (Π_n–Fund)beweist, müssen wir noch die Π_n–Fundierung herleiten.

4.1.3 Lemma. $\mathrm{K}_{mn} \vdash (\Pi_n\text{–Fund})$.

Beweis. Sei also $\mathsf{Q}\vec{z}F(a,b,\vec{z})$ eine Σ_{n-1}–Formel mit $F \in \Delta_0$ und $a \neq b$ als neuen freien Variablen. Elementar erhält man

$$\mathrm{K}_{mn} \vdash (\forall x \in a)\forall y \mathsf{Q}\vec{z}\, F(x,y,\vec{z}), \exists x\exists y\neg\mathsf{Q}\vec{z}\,[x \in a \rightarrow F(x,y,\vec{z})].$$

Dies zusammen mit dem leicht beweisbaren

$$\mathrm{K}_{mn} \vdash \exists y\neg\mathsf{Q}\vec{z}\, F(a,y,\vec{z}), \mathsf{Q}\vec{z}\, F(a,b,\vec{z})$$

ergibt per ($\wedge$)–Schluß

$$\mathrm{K}_{mn} \vdash P(a), \exists x\exists y\neg\mathsf{Q}\vec{z}\,[x \in a \rightarrow F(x,y,\vec{z})], \mathsf{Q}\vec{z}\, F(a,b,\vec{z})$$

mit $P(a) \equiv (\forall x \in a)\forall y\mathsf{Q}\vec{z}\, F(x,y,\vec{z}) \wedge \exists y\neg\mathsf{Q}\vec{z}\, F(a,y,\vec{z})$.
Ein ($\exists$)–Schluß liefert

$$\mathrm{K}_{mn} \vdash \exists u\, P(u), \exists x\exists y\neg\mathsf{Q}\vec{z}\,[x \in a \rightarrow F(x,y,\vec{z})], \mathsf{Q}\vec{z}\, F(a,b,\vec{z}).$$

Darauf kann man nun die (Π_n–FundR) anwenden und erhält nach zwei weiteren ($\forall$)–Schlüssen

$$\mathrm{K}_{mn} \vdash \exists u\, P(u), \forall u\forall y\mathsf{Q}\vec{z}\, F(x,y,\vec{z}).$$

Doppelte Anwendung von ($\vee$) ergibt die Behauptung. □

Damit man diesen Kalkül in unseren eigentlichen, halbformalen einbetten kann (die Π_n–FR macht Probleme!), müssen wir eine zusätzliche Forderung an die Herleitungen in K_{mn} stellen. Dazu nun die Terminologie:

4.1.4 Definition. Eine K_{mn}–Herleitung $\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma$ heiße *n–nett* (in Zeichen $\mathrm{K}_{mn} \vdash^* \Gamma$), falls

- der Schnittgrad der Herleitung $\leq n$ ist und
- jede Σ_n–Formel F, die in der Herleitung als Seitenformel auftritt, schon $\in \Gamma$ ist.

Die komplexeste Formel in der Π_n–Fundierungsregel ist „$\exists x \exists y \neg \mathsf{Q}\vec{z}[x \in a \to F(x,y,\vec{z})]$“. Formeln dieser Gestalt erhalten eine eigene Bezeichnung:

4.1.5 Definition. Sei $\exists\Sigma_n$ die Menge der Formeln der Gestalt $\exists x \exists y\ F(x,y)$ mit $F \in \Pi_{n-1}$ sowie $\Sigma_n^* = \exists\Sigma_n \cup \bigcup_{i \le n} \Sigma_i \cup \bigcup_{i<n} \Pi_i \cup \Sigma$.

An dieser Stelle wollen wir kurz auf den Unterschied zwischen Π– und Σ–Fundierungen eingehen. Fundierungsschemata bieten eine (starke) Möglichkeit, Allaussagen zu beweisen: Um die Aussage $\forall x\, F(x)$ herzuleiten, nimmt man sich einfach ein festes x und zeigt unter der Voraussetzung, daß für alle $y \in x$ bereits $F(y)$ gilt, $F(x)$. Ist F dabei eine Formel, die mit einem Allquantor beginnt, so fallen – sowohl in der Prämisse als auch in der Konklusion – zwei solche Quantoren zusammen. Dadurch wird die Formelkomplexität nicht wirklich erhöht (wie wir sehen werden, bekommt man Σ_n^*–Formeln ganz gut in den Griff). Anders ist die Lage, falls $F \in \Sigma_n$ ist: Der gleiche Ansatz ergibt sowohl in der Prämisse als auch in der Konklusion, daß die Formelkomplexität einfach zu groß ist.
Das besondere an n–netten Herleitungen ist nun, daß sie erlauben, Formeln vom Typ $\exists\Sigma_n$ zu reduzieren. Außerdem bedeutet die n–Nettigkeit keine wirkliche Einschränkung wie das folgende Lemma zeigt.

4.1.6 Lemma. *Sei* $\Gamma \subseteq \Sigma_n^*$, $\Delta = \{\exists z_1\, F_1(a_1,z_1), \ldots, \exists z_k\, F_k(a_k,z_k)\} \subseteq \Sigma_n$ *sowie* $\Delta' = \{\exists y_1 \exists z_1\, F_1(y_1,z_1), \ldots, \exists y_1 \exists z_k\, F_k(y_k,z_k)\}$. *Dann gilt*

(i) *Falls* $\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, \Delta$, *so gibt es eine n–nette Herleitung* $\mathrm{K}_{mn} \vdash^* \Gamma, \Delta'$.

(ii) *Falls* $\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma$, *so gibt es ein n–nettes* $\mathrm{K}_{mn} \vdash^* \Gamma$

Beweis. (ii) ist offenbar eine direkte Konsequenz von (i).
Zu (i): Mit Satz 4.1.2 darf man einen Schnittgrad $\le n$ annehmen. Jetzt kommt eine Herleitungsinduktion. Im Falle eines Axiomes Γ, Δ ist auch Γ und somit Γ, Δ' eines, was eine n–nette Herleitung darstellt. Ist weder die Haupt- noch die Nebenformel des letzten Schlusses Σ_n, so führen die IV und derselbe Schluß zum Ziel. War $\exists z\, F(b,z)$ Nebenformel des letzten Schlusses, so muß dies eine Anwendung der $(\exists)$–Regel gewesen sein (ein Schnitt kann es aus Gradgründen nicht gewesen sein, und alles andere scheidet ohnehin aus). Also ist die Hauptformel $\exists y \exists z\, F(y,z) \in \Gamma$, und man hatte $\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma(\setminus\{\exists y \exists z\, F(y,z)\}), \Delta \cup \{\exists z\, F(b,z)\}$. Wir können die IV anwenden um

$$\mathrm{K}_{mn} \vdash^* \underbrace{\Gamma(\setminus\{\exists y \exists z\, F(y,z)\}), \Delta' \cup \{\exists y \exists z\, F(y,z)\}}_{\equiv\, \Gamma, \Delta'}$$

zu erhalten.
Es bleibt der Fall, daß $\exists z\, F(z)$ Hauptformel des letzten ($(\exists)$–)Schlusses war. Dann findet man eine Herleitung $\mathrm{K}_{mn} \vdash \Gamma, \Delta, F(a)$ von kleinerer Länge und somit induktiv $\mathrm{K}_{mn} \vdash^* \Gamma, \Delta', F(a)$. Ein $(\exists)$–Schluß ergibt eine n–nette Herleitung von $\Gamma, \Delta', \exists x\, F(x)$. War $\exists x\, F(x) \in \Gamma$, so ist man hier fertig, anderenfalls war diese Formel in Δ, und ein weiterer Existenzschluß ergibt die Behauptung. Da beide $(\exists)$–Schlüsse direkt hintereinander ausgeführt wurden, bleibt die gesamte Herleitung n–nett. $\square$

4.2 Die Einbettung in den infinitären Kalkül

Um nun die gewünschten oberen Schranken zu erhalten, müssen wir den Begriff der n–netten Herleitung auf unseren ursprünglichen infinitären Kalkül übertragen. Wir können Definition 4.1.4 fast wörtlich übernehmen:

4.2.1 Definition. Wir nennen eine Herleitung $\gamma \frac{\alpha}{k} \Gamma$ *n–nett* (in Zeichen $\gamma \frac{\alpha}{k}{}^{*} \Gamma$), falls

- der Schnittgrad der Herleitung $\leq n$ ist und
- jede Σ_n–Formel F, die in der Herleitung als Seitenformel auftritt, schon $F \in \Gamma$ gilt.

Die folgenden Lemmata sind genauso leicht einzusehen wie ihre Vorgänger 2.2.4 und 2.2.7.

4.2.2 Lemma. *Es gilt*

$$\gamma \frac{\alpha}{k}{}^{*} \Gamma \quad \Longrightarrow \quad \gamma' \frac{\alpha'}{k'}{}^{*} \Gamma, \Delta$$

für $k \leq k' \leq n$, $\gamma \leq \gamma'$, $\alpha \leq^{*}_{\gamma'} \alpha'$ und $\mathrm{par}(\Delta) \leq \gamma'$.

Beweis. Da die n–Nettigkeit nur etwas von Formeln fordert, die nicht am Ende der Herleitung dastehen, muß man den Beweis von 2.2.4 nicht abändern. □

4.2.3 Lemma. *Es gilt*

$$\gamma \frac{\alpha}{k}{}^{*} \Gamma, \forall x F(x) \quad \Longrightarrow \quad \gamma, b \frac{\alpha}{k}{}^{*} \Gamma, F(b)$$

für alle $b \in \mathrm{L}_\Omega$ (und natürlich das Analogon für Formeln vom $(\wedge)$–Typ, welches wir aber nicht benötigen).

Beweis. Trivial, da $\forall x F(x) \notin \Sigma_n$ ist. □

Wir kommen nun zum zentralen Hilfsmittel der Einbettung, dem verbesserten Reduktionslemma. Dies ist die Stelle, für die man den Begriff der n–Nettigkeit eingeführt hat.

4.2.4 Lemma. *Sei $C \equiv \exists x \exists y\, C_0(x, y) \in \exists\Sigma_n$ sowie $\Gamma, \Delta \subseteq \Sigma_n^*$. Weiter gelte*

$$\gamma \frac{\alpha}{n}{}^{*} \Gamma, C \quad \textit{und} \quad \gamma \frac{\beta}{n}{}^{*} \Delta, \neg C.$$

Dann kann man auch eine n–nette Herleitung

$$\gamma \frac{\alpha \# \beta}{n}{}^{*} \Gamma, \Delta$$

konstruieren.

Beweis. Induktion nach α. War C nicht die Hauptformel des letzten Schlusses, so hilft die Induktionsvoraussetzung. Anderenfalls hatte man $\gamma, b \frac{\alpha_0}{n}{}^{*} \Gamma_0, D$ mit $\Gamma_0 = \Gamma(\cup\{C\})$ und $D = \exists y\, C_0(b, y)$. Aus $D \notin \Gamma$ folgt mit der n–Nettigkeit der Herleitung, daß der letzte Schluß ein $(\exists)$ war mit Hauptformel D – sonst wäre D als Σ_n–Formel Seitenformel des letzten Schlusses, Widerspruch! Man hatte also ein $\alpha_1 <^*_{\gamma,b,c} \alpha_0$ mit $\gamma, b, c \mathrel{|}\!\frac{\alpha_1}{n}{}^{*}\; \Gamma_0, C_0(b,c)$. Die IV liefert an dieser Stelle

$$\gamma, b, c \mathrel{|}\!\frac{\alpha_0 \,\#\, \beta}{n}{}^{*}\; \Gamma_0 \setminus \{C\}, \Delta, C_0(b,c).$$

Andererseits erhält man aus der Voraussetzung mit Inversion (2.2.7) auch

$$\gamma, b, c \mathrel{|}\!\frac{\alpha_0 \,\#\, \beta}{n}{}^{*}\; \Delta, \neg C_0(b,c),$$

und aus diesen Herleitungen macht ein (cut) nun

$$\gamma \mathrel{|}\!\frac{\alpha \,\#\, \beta}{n}{}^{*}\; \Delta, \Gamma,$$

denn wir haben wegen $|b| < \mu\mathcal{A}_{\alpha_0}$ bzw. $|c| < \mu\mathcal{A}_{\alpha_1}$ auch schon $|b,c| < \mu\mathcal{A}_{\alpha\#\beta}[\gamma]$. □

Den Abschuß des Abschnittes bildet der folgende Einbettungssatz, der obere Schranken für die Σ_1–Ordinalzahlen von Reflexionstheorien mit eingeschränkter Fundierung liefert.

4.2.5 Satz. *Sei $\Gamma(\vec{e}) = \{A_1(\vec{e}), \ldots, A_l(\vec{e})\} \subseteq \Sigma^*_n$. Gelte $\mathrm{K}_{mn} \vdash^* \Gamma(\vec{e})$. Dann gibt es ein $k > 0$, so daß zu allen $\vec{s} \in \mathrm{L}_\Omega$ ein $\gamma = |\vec{s}|$ und eine n–nette Herleitung*

$$\gamma \mathrel{|}\!\frac{\Omega^k}{n}{}^{*}\; \Gamma(\vec{s})$$

existieren.

Beweis. Der spannende Fall tritt ein, wenn der letzte Schluß eine Anwendung der Fundierungsregel war. Dann hatte man

$$\mathrm{K}_{mn} \vdash^* \Gamma'(\vec{e}), \underbrace{\exists x \exists y \neg \mathsf{Q}\vec{z}\,(x \in a \to H(x,y,\vec{z},\vec{e}))}_{\in \Sigma^*_n}, \mathsf{Q}\vec{z} H(a,b,\vec{z},\vec{e})$$

mit $\mathsf{Q}\vec{z} H \in \Sigma_{n-1}$ und $\Gamma(\vec{e}) = \Gamma'(\vec{e}) \cup \{\mathsf{Q}\vec{z}\, H(c,d,\vec{z},\vec{e})\}$. Seien nun $\vec{s}, r, t$ beliebig. Zur Vereinfachung führen wir einige Abkürzungen ein. Ab jetzt sei

$$\begin{aligned} X &= \Gamma'(\vec{s}) \\ D(r) &= \exists x \exists y \neg \mathsf{Q}\vec{z}\,(x \in r \to H(x,y,\vec{z},\vec{s})) \\ E(r,t) &= \mathsf{Q}\vec{z}\, H(r,t,\vec{z},\vec{s}) \end{aligned}$$

Die IV liefert dann also für alle r, t

$$\gamma', r, t \mathrel{|}\!\frac{\Omega^{k_0}}{n}{}^{*}\; X, D(r), E(r,t) \tag{1}$$

mit $\gamma' = |\vec{s}|$. Wir wollen nun induktiv zeigen, daß

$$\gamma', r, t \mathrel{|}\!\frac{\Omega^{k_0}\omega^{|r|+1}}{n}{}^{*}\; X, E(r,t) \tag{$\Diamond$}$$

für alle r, t gilt. Dazu werden wir unten

$$\gamma', r, t \mathrel{|}\!\frac{\Omega^{k_0}\omega^{|r|} + 6}{n}{}^{*}\; X, \neg D(r) \tag{2}$$

herleiten, und auf (1) und (2) kann man die verbesserte Reduktion anwenden (die entscheidende Stelle!) um

$$\gamma', r, t \mathrel{\Big|\!\frac{\Omega^{k_0}\omega^{|r|} + 6 \# \Omega^{k_0}}{n}}{}^{*} X, E(r,t)$$

zu erhalten, woraus ($\Diamond$) folgt. Aus ($\Diamond$) folgt die Behauptung nun leicht mit $k := k_0 + 1$.
Es bleibt also noch (2) herzuleiten mit der Voraussetzung, daß für alle t, r' mit $|r'| < |r|$ bereits

$$\gamma', r', t \mathrel{\Big|\!\frac{\Omega^{k_0}\omega^{|r'|+1}}{n}}{}^{*} X, E(r',t) \tag{$*$}$$

gilt.
Man kann sich leicht

$$\gamma', r', p, t \mathrel{\Big|\!\frac{\omega}{n}}{}^{*} p \neq r', \neg E(r',t), E(p,t) \tag{$**$}$$

erschließen. Schneidet man nun ($*$) und ($**$), so ergibt sich

$$\gamma', r', p, t \mathrel{\Big|\!\frac{\Omega^{k_0}\omega^{|r'|+1} + 1}{n}}{}^{*} X, p \neq r', E(p,t)$$

und somit auch

$$\gamma', r, p, t \mathrel{\Big|\!\frac{\Omega^{k_0}\omega^{|r|} + 2}{n}}{}^{*} X, E(p,t), (\forall x \in r)\,(x \neq p). \tag{i}$$

Eine weitere Abkürzung: Sei

$$F(r,p,t) = \mathsf{Q}\vec{z}\,(p \in r \to H(p,t,\vec{z},\vec{s})).$$

Folgende Herleitungen sind wieder elementar (man hangelt sich am Aufbau von F entlang) zu beweisen:

$$\gamma', r, p, t \mathrel{\Big|\!\frac{\omega}{0}}{}^{*} (\exists x \in r)(x = p), F(r,p,t) \tag{ii}$$

und

$$\gamma', r, p, t \mathrel{\Big|\!\frac{\omega}{0}}{}^{*} \neg E(p,t), F(r,p,t). \tag{iii}$$

Aus (i), (ii) und (iii) läßt sich mit Hilfe von zwei Schnitten (die Formel E ist Σ_{n-1}!)

$$\gamma', r, p, t \mathrel{\Big|\!\frac{\Omega^{k_0}\omega^{|r|} + 4}{n}}{}^{*} X, F(r,p,t)$$

gewinnen. Zwei weitere Allschlüsse ergeben schließlich (2).
Man überlegt sich leicht, daß die restlichen Axiome und Regeln keine Schwierigkeiten bereiten (so sind z. B. die in Abschnitt 2.4 gezeigten Herleitungen alle n–nett). $\square$

Bemerkung. Wie man sieht war die Einschränkung auf Σ_n^*–Formeln wichtig. Ansonsten hätte man die verbesserte Reduktion nicht anwenden können.

Wir haben damit folgenden Satz bewiesen:

4.2.6 Satz. *Es ist*

$$|\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund})|_{\Sigma_1} \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \mu\,\Omega_{(n-m)}(\Omega^k).$$

Beweis. Sei A ein Σ_1–Satz mit Π_m–Ref$^-$ + (Π_n–Fund) $\vdash A$. Dann gibt es ein $l \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{K}_{mn} \left|\frac{l}{n}\right.^{*} A$ (4.1.3 und 4.1.2). Mit Satz 4.2.5 gibt es nun ein $k \in \mathbb{N}$, so daß

$$\left|\frac{\Omega^k}{n}\right.^{*} A$$

gilt. Nun bedient man sich der Schnitteliminationsmaschinerie aus Abschnitt 2, um auch

$$\left|\frac{\Omega_{(n-m)}(\Omega^{k-1})}{m}\right.^{*} A$$

einzusehen. Nun aber kommt endlich Lemma 2.2.5 ins Spiel, um die Behauptung zu erhalten. □

Für $m < n$ können wir sogar etwas mehr beweisen:

4.2.7 Korollar. *Sei* $\Delta \subseteq \Pi_m$ *mit* Π_m–Ref$^-$ + (Π_n–Fund) $\vdash \Delta$*. Dann gibt es ein* $k \in \mathbb{N}$*, so daß*

$$\left|\frac{\Omega_{(n-m)}(\Omega^{k-1})}{m}\right.^{*} \Delta$$

gilt.

Beweis. Klar, da $\Pi_m \subseteq \Sigma_n^*$. Für $m = n$ scheitert diese Argumentation. □

4.3 Sehr wenig Fundierung

Wir kommen nun zu den Fällen, daß weniger Fundierung als Reflexion vorhanden ist. Dazu können wir den infinitären Kalkül komplett vergessen, es reicht K_{mn} aus. Allerdings ist hier die Σ_1–Analyse so unscharf, daß der Anteil der Fundierung, solange er zwischen 2 und m liegt, das Ergebnis nicht beeinflußt.

4.3.1 Satz. *Es ist*

$$|\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund})|_{\Sigma_1} \le \sup_{k\in\omega} \mu\mathcal{A}_k.$$

Beweis. Wir nutzen wieder den Kalkül K_{mn} aus Abschnitt 4, um

$$\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund}) \vdash A \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{K}_{mn} \left|\frac{k}{n}\right. A$$

zu erhalten. An dieser Stelle muß man sich allerdings nicht mehr die Mühe machen, eine Einbettung in den halbformalen Kalkül zu beweisen, sondern kann einfach auf das folgende Lemma verweisen. □

4.3.2 Lemma. *Falls* $\mathrm{K}_{mn} \left|\frac{k}{n}\right. \Delta(\vec{b})$ *für* $\Delta(\vec{b}) \subseteq \Pi_m$ *und freie Variablen* $\vec{b}$*, so folgt*

$$\mathcal{A}_k[\vec{c}] \models \Delta(\vec{c}) \quad \textit{für alle } \vec{c} \in \mathrm{L}_\Omega.$$

Beweis. Eine Herleitungsinduktion. Dabei sind die Axiome klar, da man sich auf Epsilon-Zahlen befindet, die logischen Regeln folgen mit der IV, nur die Reflexionsregel bewirkt eine Ausdünnung. Wir betrachten exemplarisch die spannendsten Fälle:
($\forall$): Sei dazu $\Delta(\vec{b}) = \Delta'(\vec{b}) \cup \{\forall x F(\vec{b}, x)\}$. Man hatte dann

$$\mathrm{K}_{mn} \overset{k_0}{\underset{n}{\vdash}} \Delta'(\vec{b}), F(\vec{b}, b)$$

und per IV auch

$$\mathcal{A}_{k_0}[\vec{c}, c] \models \Delta'(\vec{c}), F(\vec{c}, c) \quad \text{für alle } \vec{c}, c \in \mathrm{L}_\Omega.$$

Sei nun $\alpha \in \mathcal{A}_k[\vec{c}]$ und $c \in \mathrm{L}_\alpha$ (also insbesondere $|c| < \alpha$ und somit $\alpha \in \mathcal{A}_{k_0}[\vec{c}, c]$). Dann folgt aber schon

$$\mathrm{L}_\alpha \models \Delta'(\vec{c}), F(\vec{c}, c).$$

($\exists$): Hier liefert die IV

$$\mathcal{A}_{k_0}[\vec{c}, c] \models \Delta'(\vec{c}), F(\vec{c}, c) \quad \text{für alle } \vec{c}, c \in \mathrm{L}_\Omega,$$

und für $\alpha \in \mathcal{A}_k[\vec{c}]$ sei c so klein gewählt, daß $\alpha \in \mathcal{A}_{k_0}[\vec{c}, c]$ ist. Dann folgt nach Voraussetzung wieder

$$\mathrm{L}_\alpha \models \Delta'(\vec{c}), F(\vec{c}, c).$$

(cut): Da der Rang der geschnittenen Formeln unterhalb von n liegt, kann man direkt die IV anwenden.
(Π_m–RefR): analog zum Beweis von Lemma 2.2.5. □

5 Der Wohlordnungsbeweis

Wir müssen uns in diesem Kapitel lediglich überlegen, daß alles, was in Kapitel 3 geschehen ist, schon mit eingeschränkter Fundierung zu beweisen ist. Hat man sich aber erst einmal davon überzeugt, daß die zitierten Sätze (vor allem die Rekursionssätze), in der Form, in der wir sie benötigen, bereits mit Π_2–Fundierung beweisbar sind, so sieht man, daß man die Beweise aus Abschnitt 3.1 wörtlich übernommen werden können. Denn dort haben wir schon auf die Formelkomplexität geachtet.

5.1 Die Herleitung der Transfiniten Induktion

Die Definitionen von ON ,$\lhd$ usw. können aus Abschnitt 3 übernommen werden. Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung von 3.1.4.

5.1.1 Lemma. *Sei $A \in \Pi_n$. Dann gilt*

$$\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund}) \vdash \mathsf{Prog}(\lhd, A) \to \mathsf{Prog}^k(\lhd, A)$$

und somit

$$\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund}) \vdash \mathsf{TI}(\hat{\Omega}^k, A)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Der Beweis verläuft formal mit Induktion nach k, wobei der Fall $\underline{k = 0}$ klar ist und der Trick beim Induktionsschritt bereits im Beweis von Lemma 3.1.4 gezeigt wurde. Zusätzlich muß man sich hier nur noch dem Problem der Formelkomplexität stellen. Im Falle $\underline{k \rightsquigarrow k+1}$ sei wieder $B(\alpha)$ die Formel $(\forall t \lhd s + \hat{\Omega}^k \alpha) A(t)$. Dann ist $B(\alpha)$ äquivalent zu einer Π_n–Formel, und es genügt erneut, für festes α $(\forall \beta < \alpha) B(\beta) \to B(\alpha)$ zu zeigen. Im interessanten Fall $\alpha = \gamma + 1$ hat man nach Voraussetzung

$$(\forall t \lhd s + \hat{\Omega}^k \gamma) A(t).$$

Eine Anwendung von $\mathsf{Prog}^k(\lhd, A)$ ergibt nun

$$(\forall t \lhd s + \hat{\Omega}^k \gamma + \hat{\Omega}) A(t),$$

also die Behauptung. □

Natürlich kann man die Terme in OT wieder schön definieren. Im folgenden sei also $s \in \mathsf{OT}$. Jetzt definiert man $\mathsf{Prog}^s(\lhd, A)$ als Verallgemeinerung von $\mathsf{Prog}^k(\lhd, A)$ durch

$$\forall r \left[(\forall t \lhd r)\ A(t) \to (\forall t \lhd r + \hat{\Omega}^s)\ A(t) \right].$$

Das folgende Hilfslemma ist etwas verwirrend:

5.1.2 Lemma. *Es sei $A \in \Pi_n$. Dann gilt*

$$\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund}) \vdash \mathsf{Prog}(\lhd, A) \to \mathsf{Prog}(\lhd, \mathsf{Prog}^s(\lhd, A))$$

Beweis. Zuerst bemerkt man, daß die Formel $\mathsf{Prog}^s(\lhd, A)$ eine Π_{n+1}–Formel ist. Gilt nun $\mathsf{Prog}(\lhd, A)$ und $(\forall s' \lhd s)\mathsf{Prog}(\lhd, \mathsf{Prog}^{s'}(\lhd, A))$, so unterscheiden wir wieder die drei üblichen Fälle.
Fall 1: $s = 0$, aber $\mathsf{Prog}^0(\lhd, A)$ ist äquivalent zu $\mathsf{Prog}(\lhd, A)$.
Fall 2: $s = s' + 1$. Sei r gegeben und gelte $(\forall t \lhd r)A(t)$. Zu zeigen ist $(\forall t \lhd r + \hat{\Omega}^s)A(t)$. Definiere $B(\alpha) :\equiv (\forall t \lhd r + \hat{\Omega}^{s'}\alpha)A(t)$. Dann ist B äquivalent zu einer Π_n–Formel. $\underline{B(0)}$ gilt wieder nach Voraussetzung. Weiter folgt $\underline{B(\beta+1)}$ aus $B(\beta)$ und $\mathsf{Prog}^{s'}(\lhd, A)$. Für $t \lhd r + \hat{\Omega}^{s'}\alpha$ und $\underline{\alpha \in \mathsf{Lim}}$ gibts schon ein $\beta < \alpha$ mit $t \lhd r + \hat{\Omega}^{s'}\beta$, so daß man $(\forall \beta < \alpha)B(\beta) \to B(\alpha)$ erhält.
Fall 3: $s \in \mathsf{Lim}$, d. h. $s = \hat{\Omega}^{s_1}\alpha_1 + \cdots + \hat{\Omega}^{s_j}\alpha_j$ mit $s_j \neq 0$ oder $\alpha_j \in \mathsf{Lim}$. Aber auch dann existiert zu jedem $t \lhd r + \hat{\Omega}^s$ ein $s' \lhd s$ mit $t \lhd r + \hat{\Omega}^{s'}$ und die IV kann angewandt werden. □

Damit sind alle Vorbereitungen getroffen für das folgende

5.1.3 Lemma. *Für festes $p \in \mathsf{OT}$ gilt*

$$\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund}) + \mathsf{TI}(p, \Pi_{n+1}) \vdash \mathsf{TI}(\hat{\Omega}^p, \Pi_n).$$

Beweis. Sei wieder $A \in \Pi_n$. Mit dem vorigen Lemma erschließen wir aus den Voraussetzungen

$$\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund}) + \mathsf{TI}(p, \Pi_{n+1}) \vdash \mathsf{Prog}(\lhd, A) \to (\forall t \lhd p)\mathsf{Prog}^t(\lhd, A),$$

da ja $(\forall t \lhd p)\mathsf{Prog}^t(\lhd, A)$ wieder eine Π_{n+1}–Formel ist. Mithin gilt auch per Progressivität von $\mathsf{Prog}^s(\lhd, A)$

$$\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund}) + \mathsf{TI}(p, \Pi_{n+1}) \vdash \mathsf{Prog}(\lhd, A) \to \mathsf{Prog}^p(\lhd, A).$$

Setzt man in der Formel $\mathsf{Prog}^p(\lhd, A) = \forall r\,[(\forall t \lhd r)A(t) \to (\forall t \lhd r + \hat{\Omega}^p)A(t)]$ nun $r = 0$, so erhält man die Behauptung. □

Bemerkung. Wir haben in diesem Lemma ein wenig mehr bewiesen als nötig. Es hätte genügt, zu zeigen

$$\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund}) + \mathsf{TI}(p, \Pi_n) \vdash \mathsf{TI}(\hat{\Omega}^p, \Pi_{n-1}).$$

5.1.4 Korollar. *Im Zusammenspiel der Lemmata 5.1.1 und 5.1.3 ergibt sich für alle $k \in \mathbb{N}$*

$$\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund}) \vdash \mathsf{TI}(\hat{\Omega}_{(n-m)}(\hat{\Omega}^k), \Pi_m).$$

5.2 $\mathcal{A}_s \neq \emptyset$ für einige s

Betrachtet man das Verfahren aus Abschnitt 3.2, so stellt man fest, daß die entscheidende Argumentation, nämlich mit 3.2.8 die entsprechenden $\mathcal{A}_s$ als m–schön nachzuweisen, gerade Π_m–Fundierung benötigte. (Für die Σ–Definierbarkeit reicht Π_2–Fundierung aus.) Im vorigen Abschnitt haben wir in der vorliegenden Theorie transfinite Induktion für Π_m–Formeln gerade bis $\hat{\Omega}_{(n-m)}(\hat{\Omega}^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ hergeleitet. Derselbe Beweis, der auch bei voller Fundierung benutzt wurde, liefert also

5.2.1 Korollar. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund}) \vdash (\forall t \lhd \hat{\Omega}_{(n-m)}(\hat{\Omega}^k))\,\mathcal{A}_t \neq \emptyset$$

und somit

$$|\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund})|_{\Sigma_1} \geq \sup_{k \in \mathbb{N}} \mu\,\Omega_{(n-m)}(\Omega^k).$$

5.3 Sehr wenig Fundierung

Hier verläuft alles nach dem Schema „X m–schön $\Rightarrow \mathcal{A}(X)$ m–schön", endliche Iteration dieses Argumentes reicht völlig aus.

5.3.1 Lemma. *Es sind alle $\mathcal{A}_k$, mit $k \in \mathbb{N}$ gegeben, m–schön.*

Beweis. Widmen wir uns wieder zuerst der Σ–Definierbarkeit. Hier benutzen wir kein kompliziertes Rekursionsargument mehr, sondern schreiben einfach für jedes k die Formel

$$\varphi_{\mathcal{A}_k}(\xi) \leftrightarrow \xi \in \mathcal{A}_k$$

auf. Es ist also

$$\varphi_{\mathcal{A}_0}(\xi) \leftrightarrow \xi \in \mathsf{Eps}$$

und

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{A}_{l+1}}(\xi) \leftrightarrow & \exists X\,[X = \mathrm{L}_\xi \wedge (\forall \varphi \in X)(\mathsf{Fml}_{\Sigma_m}(\varphi) \wedge X \models \varphi \\ & \rightarrow (\exists \zeta \exists Y(Y = \mathrm{L}_\zeta \wedge \zeta < \xi \wedge \varphi_{\mathcal{A}_l}(\zeta) \wedge Y \models \varphi)))].\end{aligned}$$

Um nun zu sehen, daß $\Sigma_m[\mathcal{A}_k]$ für ein vorgegebenes k gilt, begibt man sich wieder in ein beliebiges Modell der Theorie und zeigt Satz 3.2.8. $\square$

5.3.2 Korollar. *Wir können somit in der vorliegenden Theorie beweisen, daß $\mathcal{A}_k \neq \emptyset$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit hat man*

$$|\Pi_m\text{–Ref}^- + (\Pi_n\text{–Fund})|_{\Sigma_1} \geq \sup_{k \in \omega} \mu\mathcal{A}_k.$$

Literatur

[ASW92] ACZEL, PETER, HAROLD SIMMONS und STANLEY S. WAINER (Herausgeber): *Proof theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992. Papers from the International Summer School and Conference held at Leeds University, Leeds, July 24–August 2, 1990.

[Ba75] BARWISE, JON: *Admissible sets and structures.* Springer-Verlag, Berlin, 1975. An approach to definability theory, Perspectives in Mathematical Logic.

[BFPS81] BUCHHOLZ, WILFRIED, SOLOMON FEFERMAN, WOLFRAM POHLERS und WILFRIED SIEG: *Iterated inductive definitions and subsystems of analysis: recent proof-theoretical studies.* Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[Bla97] BLANKERTZ, BENJAMIN: *Beweistheoretische Techniken zur Bestimmung von Π^0_2-Skolem Funktionen.* Doktorarbeit, Münster, 1997.

[Bus98] BUSS, SAMUEL R. (Herausgeber): *Handbook of proof theory.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1998.

[Dev84] DEVLIN, KEITH J.: *Constructibility.* Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[FH74] FENSTAD, J. E. und P. G. HINMAN (Herausgeber): *Generalized recursion theory.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 79.

[Hin78] HINMAN, PETER G.: *Recursion-theoretic hierarchies.* Springer-Verlag, Berlin, 1978. Perspectives in Mathematical Logic.

[Jae86] JAEGER, GERHARD: *Theories for admissible sets. A unifying approach to proof theory.* Bibliopolis, Neapel, 1986. Studies in Proof Theory. Lecture Notes, 2.

[Jec97] JECH, THOMAS: *Set theory.* Springer-Verlag, Berlin, 2. edition, 1997.

[Mö00a] MÖLLERFELD, MICHAEL: *Berechnung von Σ-Ordinalzahlen.* Folien zu Vorträgen in Münster und München, 1999/2000.

[Mö00b] MÖLLERFELD, MICHAEL: *Resolving Π^1_2-Comprehension.* Folien zu Vorträgen in Münster und München, 1999/2000.

[Mos74] MOSCHOVAKIS, YIANNIS N.: *Elementary induction on abstract structures.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 77.

[MR99] MÖLLERFELD, MICHAEL und MICHAEL RATHJEN: *A note on the Σ_1 spectrum of a theory*, 1999. Erscheint in: Arch. Math. Logic.

[Poh89] POHLERS, WOLFRAM: *Proof theory. An introduction.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[Poh91] POHLERS, W.: *Proof theory and ordinal analysis.* Arch. Math. Logic, 30(5-6):311–376, 1991.

[Poh92] POHLERS, W.: *A short course in ordinal analysis.* In: *Proof theory (Leeds, 1990)*, Seiten 27–78. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[Poh96] POHLERS, WOLFRAM: *Pure proof theory, aims, methods and results.* Bull. Symbolic Logic, 2(2):159–188, 1996.

[Poh98] POHLERS, WOLFRAM: *Subsystems of set theory and second order number theory.* In: *Handbook of proof theory*, Seiten 209–335. North-Holland, Amsterdam, 1998.

[PSW94] PRAWITZ, DAG, BRIAN SKYRMS und DAG WESTERSTÅHL (Herausgeber): *Logic, methodology and philosophy of science. IX*, Amsterdam, 1994. North-Holland Publishing Co.

[RA74] RICHTER, WAYNE und PETER ACZEL: *Inductive definitions and reflecting properties of admissible ordinals.* In: *Generalized recursion theory (Proc. Sympos., Oslo, 1972)*, Seiten 301–381. Studies in Logic and the Foundations of Math., Vol. 79. North-Holland, Amsterdam, 1974.

[Ra89] RATHJEN, MICHAEL: *Untersuchungen zu Teilsystemen der Zahlentheorie zweiter Stufe und der Mengenlehre mit einer zwischen* Δ^1_2-CA *und* Δ^1_2-CA + BI *liegenden Beweisstärke.* Westfälische Wilhelms-Universität Münster Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung, Münster, 1989.

[Ra91] RATHJEN, MICHAEL: *Proof-theoretic analysis of* **KPM**. Arch. Math. Logic, 30(5-6):377–403, 1991.

[Ra92] RATHJEN, MICHAEL: *Fragments of Kripke-Platek set theory with infinity.* In: *Proof theory (Leeds, 1990)*, Seiten 251–273. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[Ra94a] RATHJEN, MICHAEL: *Admissible proof theory and beyond.* In: *Logic, methodology and philosophy of science, IX (Uppsala, 1991)*, Seiten 123–147. North-Holland, Amsterdam, 1994.

[Ra94b] RATHJEN, MICHAEL: *Proof theory of reflection.* Ann. Pure Appl. Logic, 68(2):181–224, 1994.

[Ra99] RATHJEN, MICHAEL: *The realm of ordinal analysis.* In: *Sets and proofs (Leeds, 1997)*, Seiten 219–279. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[Sch93] SCHLÜTER, ANDREAS: *Zur Mengenexistenz in formalen Theorien der Mengenlehre.* Doktorarbeit, Münster, 1993.