Zur Stärke topologischer Regularitätsaxiome auf der Basis zweitstufiger Arithmetik

Anna Warzecha

dem Institut für
mathematische Logik und Grundlagenforschung
am FB 10-Mathematik und Informatik
als Diplomarbeit eingereicht
im März 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **i**

2 Die formalen Systeme SOA und ZFC$^-$+V=HC **1**

2.1 Grundlagen 1

2.2 Äquikonsistenz von SOA und ZFC$^-$+V=HC und Beweisführung in SOA 4

2.3 Das konstruktible Universum 11

3 Deskriptive Mengenlehre **13**

3.1 Grundlagen 13

3.2 Regularitätseigenschaften 18

3.3 Borel-Codes 22

3.4 Deskriptive Mengenlehre in ZFC$^-$+V=HC bzw. in SOA . . . 25

3.5 Eine Darstellung von $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Klassen als Projektionen von Bäumen 28

4 $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP **32**

4.1 Analytische Klassen und die Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft 33

4.2 Die Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft in L[x] 35

4.3 Eine Charakterisierung von $\Pi^1_1[x]$-PSP 39

5 $\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM **44**

5.1 Rapide Filter 44

5.2 $\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM und $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP 55

6 Zur Stärke von SOA + $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP und SOA + $\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM **65**

6.1 Äquikonsistenz mit ZFC 65

6.2 Zur Gültigkeit von ZFC-Sätzen in SOA+$\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP und SOA+$\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM 68

6.3 Eine überraschende Anwendung: Borel-Determiniertheit in SOA+$\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP bzw. SOA+$\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM 71

6.4 Hauptresultat 80

A Zur Stärke mathematischer Axiomatisierungen – einige metamathematische Überlegungen **81**

Literaturverzeichnis **90**

1 Einleitung

Die folgende Arbeit umfasst – bis auf Kapitel 5 – eine Ausarbeitung des ersten Teils des Artikels "Topological Regularity and Second Order Arithmetic" von M. Möllerfeld und P. Koepke.
Unser Ziel wird es sein, die Stärke einiger topologischer Regularitätsaxiome genauer zu untersuchen. Dabei gehen wir nicht, wie in der Mengenlehre sonst üblich, von ZFC, sondern von dem schwächeren Axiomensystem SOA (Second Order Arithmetic) aus.
Topologische Regularitätsaxiome sind Aussagen über Teilmengen reeller Zahlen und gehören somit zum Gebiet der deskriptiven Mengenlehre. SOA bietet sich uns daher vor allem deswegen an, da es im Unterschied zu ZFC keine mengentheoretischen Objekte, deren Kardinalitäten weit größer als die des Kontinuums sind und welche damit sicher nicht zu den direkten Untersuchungsobjekten der deskriptiven Mengenlehre gehören, postuliert. Dies ist insofern ein wichtiger Aspekt, als dass in der üblichen, das heißt auf der Basis von ZFC ausgeführten, deskriptiven Mengenlehre diese "higher-type-objects" häufig dennoch als "Hilfsmittel" eine tragende Rolle spielen. Beispielsweise beruht der von Martin geführte Beweis von Borel-Determiniertheit in starkem Maße auf der iterierten Anwendung des Potenzmengenaxioms und H. Friedman konnte sogar zeigen, dass der Beweis dieses Satzes nicht ohne die Existenz von mengentheoretischen Objekten mit Kardinalitäten, welche viel größer als die der reellen Zahlen sind, auskommen kann.
In SOA gibt es kein Potenzmengenaxiom und daher muss bei Beweisen in SOA auf jegliche "Hilfsmittel", welche nicht aus dem eigentlichen Gegenstandsbereich der deskriptiven Mengenlehre stammen, verzichtet werden. Somit kann SOA in Bezug auf das Studium der Struktur der reellen Zahlen in berechtigter Weise als eine recht "natürliche Axiomatisierung" aufgefasst werden.
Auch wenn viele der (aus der Sicht von ZFC) gängigen Theoreme der deskriptiven Mengenlehre in SOA gezeigt werden können, stößt man auch hier, ebenso wie in der üblichen Mengenlehre mit ZFC, schnell auf Aussagen, die aus den Axiomen von SOA alleine nicht mehr bewiesen oder widerlegt werden können. Es stellt sich daher die Frage nach möglichen axiomatischen Erweiterungen von SOA. Soll die "Natürlichkeit" von SOA dabei nicht zerstört werden, so bieten sich hierbei vor allem Axiome an, welche "nur" Aussagen über reelle Zahlen oder deren definierbare Teilmengen (in SOA sind dies Teilklassen) machen.
Zu zeigen, warum es nahe liegt, dass "nur" dabei in Anführungsstriche zu setzen, wird das Hauptanliegen dieser Arbeit sein. Denn es lässt sich zeigen, dass selbst die Hinzunahme eines der schwächsten topologischen Regularitätsaxiomen, nämlich der Annahme, dass jede überabzählbare $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-Klasse reeller Zahlen eine perfekte Teilklasse besitzt ($\boldsymbol{\Pi}^1_1$-PSP), bereits einen großen Gewinn an axiomatischer Stärke impliziert und zwar in folgender Hinsicht.

Zum einen werden wir zeigen, dass die Konsistenz von $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP bereits die Konsistenz von ZFC nach sich zieht. Gibt es also ein Modell von $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP, so gibt es damit auch ein Modell von ZFC, in dem insbesondere das Potenzmengenaxiom gilt. Diese Tatsache alleine ist schon bemerkenswert, da das (mathematisch eher bodenständig erscheinende!) $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP Axiomenschema doch zunächst wenig mit der Existenz von den doch teilweise etwas seltsam anmutenden Objekten der modernen Mengenlehre zu tun zu haben scheint.
Zum anderen werden wir zeigen, dass bereits alle in ZFC beweisbaren Π^1_4-Sätze auch schon in $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP bewiesen werden können, unabhängig davon, welche Mengenexistenzaxiome zu ihrem Beweis verwendet wurden. Dieses Ergebnis erhalten wir aus der Methode, mit der wir die relative Konsistenz von ZFC zu $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP nachweisen. Diese ist die in der Mengenlehre für relative Konsistenzbeweise neben der Methode des Forcing üblicherweise verwendete Methode der inneren Modelle: Wir werden zeigen, dass unter der Annahme von $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP für jede reelle Zahl x das relativ zu x definierte konstruktible Universum $L[x]$ ein Modell von ZFC ist. Damit lässt sich dann nicht nur die relative Konsistenz von ZFC, sondern, mit Hilfe von Shoenfield-Absolutheit, auch die obige Aussage über Π^1_4-Sätze herleiten.
Des Weiteren werden wir zeigen, dass auch eine Erweiterung von SOA um eine Annahme über Lebesgue-Messbarkeit die oben beschriebenen Aussagen zur Folge hat. Dazu beweisen wir, dass das Axiomenschema $\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM, welches besagt, dass jeder $\mathbf{\Sigma}^1_3$ Klasse reeller Zahlen Lebesgue-Messbar ist, bereits $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP impliziert.
Mit Hilfe der Forcing-Methode lässt sich ferner zeigen, dass $SOA+$"Jede projektive Klasse reeller Zahlen ist Lebesgue-messbar, hat die Bairesche Eigenschaft und besitzt, falls sie überabzählbar ist, eine perfekte Teilmenge" und damit insbesondere auch $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP und $SOA + \mathbf{\Sigma}^1_3$-LM relativ konsistent zu ZFC ist (vgl.[Busche]). Somit ergibt sich schließlich die Äquikonsistenz dieser vier Theorien.

Ich bedanke mich bei all denjenigen, die mich bei meiner Diplomarbeit unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt dabei meinem Betreuer Herrn Dipl.-Mathematiker Christoph Duchhard sowie Herrn Dr. Michael Möllerfeld, Herrn Prof. Wolfram Pohlers und Herrn Prof. Ralf Schindler.

2 Die formalen Systeme SOA und ZFC$^-$+V=HC

2.1 Grundlagen

I. SOA

Das formale System SOA (Second Order Arithmetic) wurde in ähnlicher Form von Hilbert und Bernays im Zuge ihrer Grundlagenforschung eingeführt. Dabei ging es um die Frage, welche Sprache und welche Axiome geeignet sind, um die bis dahin bekannte Mathematik zu beschreiben, ohne dabei auf all zu starke Mengenexistenzaxiome zurückzugreifen.
$\mathcal{L}_2$, die Sprache von SOA, ist die schwächste zweistufige Sprache, welche es erlaubt den Großteil der klassischen Mathematik auszudrücken und die Axiome von SOA genügen, um diese in befriedigender Weise zu entwickeln (vgl.[Simpson]).
Später beschäftigten sich insbesondere Friedman und Simpson weiter mit ähnlichen, oft noch schwächeren Systemen als SOA, und es stellte sich heraus, dass in vielen Fällen ein mathematisches Theorem äquivalent ist zu den Mengenexistenzaxiomen, die zu seinem Beweis benötigt wurden.
Bezüglich dem Studium der deskriptiven Mengenlehre und insbesondere der Frage, wie viel von dieser in einem für die Struktur der reellen Zahlen angemessenen System ausgeführt werden kann, erweist sich SOA als sehr geeignet, da es in einer natürlichen Art und Weise die Struktur der reellen Zahlen beschreibt.

Die zweistufige Sprache $\mathcal{L}_2$ hat einen erst- und einen zweitstufigen Teil, wobei die Objekte des erststufigen Teils als natürliche Zahlen und die des zweitstufigen als Mengen natürlicher Zahlen (und somit als reelle Zahlen) aufgefasst werden.

Freie Variablen für erststufige Objekte werden durch kleine Buchstaben und freie Variablen für zweitstufige Objekte durch große Buchstaben notiert.

Die nichtlogischen Zeichen von $\mathcal{L}_2$ sind die erststufigen Konstantensymbole 0 und 1, die erststufigen zweistelligen Funktionssymbole $+$ und $\cdot$ und das ebenfalls erststufige zweistellige Relationssymbol $<$. Des Weiteren gibt es das zweistellige Relationssymbol $\in$ zwischen erst- und zweitstufigen Objekten.

Terme und Formeln werden wie üblich induktiv definiert.

Wir definieren eine Codierungsfunktion $[\cdot,\cdot]$, welche Paare von erststufigen Objekten injektiv auf erststufige Objekte abbildet, durch

$$[x, y] := (x + y)^2 + x.$$

Des Weiteren verwenden wir folgende abkürzende Schreibweisen:

$X \subseteq Y :\Leftrightarrow (\forall x)\ [x \in X \to x \in Y],$
$X = Y :\Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X,$
$(X)_x := \{y : [x, y] \in X\},$
$X^c := \{x : \neg(x \in X)\}.$

Wie üblich arbeiten wir mit dem Klassenbegriff, das heißt für einen Klassenterm A steht "$n \in A$" bzw. "$X \in A$" als Abkürzung für $\varphi(n)$ bzw. $\varphi(X)$, wobei φ die definierende Formel von A sei. Wir nennen eine Klasse A abzählbar, wenn

$$(\exists X)\ (\forall Y)\ [Y \in A \to (\exists x)\, Y = (X)_x]$$

gilt, ansonsten überabzählbar.

Die Axiome von SOA sind:

- Definierende Axiome für $0,\ 1,\ +,\ \cdot$ und $<$ (im Sinne der intendierten Bedeutung) (vgl.[Simpson]).
- Das Induktions-Axiom (IND):
  $(\forall X)[[0 \in X \wedge (\forall x)[x \in X \to x + 1 \in X]] \to (\forall x) x \in X].$
- Das Kollektionsschema (AC):
  Für jede Formel $\phi(x, X)$ von $\mathcal{L}_2$ das Axiom
  $(\forall x)\ (\exists X)\ \phi(x, X) \to (\exists X)\ (\forall x)\ \phi(x, (X)_x).$
- Das Komprehensionsschema (CA):
  Für jede Formel $\phi(x)$ von $\mathcal{L}_2$, in der X nicht frei auftritt, das Axiom
  $(\exists X)\ (\forall x)\ [x \in X \leftrightarrow \phi(x)].$

II. ZFC und ZFC$^-$ + V = HC

Die Sprache der Mengenlehre, $\mathcal{L}_\in$, besitzt als einziges nichtlogisches Zeichen das zweistellige Relationssymbol $\in$.

Terme, Formeln, Klassen, etc. werden in gängiger Weise definiert.

Wir verwenden im Folgenden die üblichen mengentheoretischen Bezeichnungen. Da einige von diesen in unterschiedlicher Literatur verschieden notiert werden, geben wir hier kurz die in dieser Arbeit verwendete Notation an.

- V bezeichne wie üblich das Mengenuniversum, d.h. die durch $x \in V :\leftrightarrow x = x$ definierte Klasse.
- x^C steht für das Komplement der Menge x in einer Menge y, wobei sich y, soweit nicht explizit angegeben, aus dem jeweiligen Zusammenhang ergeben wird.
- $P(x)$ sei die Potenzmenge der Menge x.
- $p(x)$ bezeichne die (Rechts-)Projektion der Menge x.
- OR ist die Klasse der Ordinalzahlen.
- ${}^x y$ bezeichne die Menge aller Funktionen mit Definitionsbereich x und Wertebereich y.
- $[x]^\kappa$ sei die Menge aller κ-elementigen Teilmengen von x, wobei κ eine Kardinalzahl sei.
- $|x|$ steht für die Kardinalität der Menge x.
- α^+ bezeichne den kardinalen Nachfolger der Ordinalzahl α.
- $TC(x)$ sei die transitive Hülle der Menge x.
- $\exists^\infty n\ A(n)$ ist definiert durch $\forall m \exists n\ n > m \wedge A(n)$.

Obige Notation verwenden wir gegebenenfalls nicht nur für Mengen, sondern auch für Klassen. Dabei muss sicher gestellt sein, dass sich die entsprechende Klasse auch tatsächlich über eine Formel definieren lässt.

Das üblicherweise verwendete Axiomensystem der Mengenlehre, das Zermelo-Fraenkelsche System ZFC, besteht aus folgenden Axiomen:
Extensionalitätsaxiom (Ext), Paarmengenaxiom (Pair), Vereinigungsaxiom (Union), Kollektionsaxiom (Col), Unendlichkeitsaxiom (Inf), Separationsschema (Sep), Fundierungsaxiom (Found), Potenzmengenaxiom (Pot) und Auswahlaxiom (Ac).
Anstelle des Kollektionsaxioms kann auch das Ersetzungsschema (Repl) verwendet werden, welches unter Voraussetzung der übrigen Axiome (insbesondere des Separationsschemas) äquivalent zu diesem ist.
Nähere Ausführungen zu diesen Axiomen finden sich in jedem Buch über Mengenlehre, beispielsweise in [Jech].

Mit ZFC^- bezeichnen wir ZFC ohne das Potenzmengenaxiom, mit V=HC die Aussage, dass jede Menge erblich abzählbar ist. Dabei ist eine Menge x erblich abzählbar, wenn $|TC(x)|$ abzählbar ist.

2.2 Äquikonsistenz von SOA und ZFC^{-}+V=HC und Beweisführung in SOA

In diesem Abschnitt soll die Äquikonsistenz von SOA und $ZFC^- + V = HC$ gezeigt werden. Dazu konstruieren wir ein Modell der einen Theorie innerhalb eines gegebenen Modells der anderen Theorie.
Auf den ersten Blick scheint dieses Vorhaben schon aufgrund der Tatsache, dass es sich bei $\mathcal{L}_2$ und $\mathcal{L}_\in$ um verschiedene Sprachen handelt, wobei $\mathcal{L}_\in$ scheinbar über komplexere Objekte (z.B. Mengen von Mengen) sprechen kann, auf Schwierigkeiten zu stoßen.
Es gilt also insbesondere eine Möglichkeit zu finden, Sätze der einen Sprache als Sätze der jeweils anderen aufzufassen und umgekehrt.

I. SOA als Teilsystem von ZFC^{-}+V = HC

Sätze aus $\mathcal{L}_2$ lassen sich in natürlicher Weise als Sätze von $\mathcal{L}_\in$ auffassen. Aus (Inf) folgt in $ZFC^- + V = HC$ die Existenz der ersten Limesordinalzahl, welche üblicherweise mit ω bezeichnet wird. Auf ω lassen sich kanonische Interpretationen für die nichtlogischen Zeichen von $\mathcal{L}_2$ wählen. Ist ein $\mathcal{L}_2$-Satz φ gegeben, so übersetzen wir ihn in einen $\mathcal{L}_\in$-Satz, indem alle auftretenden Quantoren auf ω relativiert werden. Wir schreiben also $\forall x \in \omega$ $(\exists x \in \omega)$ für $\forall x$ $(\exists x)$ bzw. $\forall x \subseteq \omega$ $(\exists x \subseteq \omega)$ für $\forall X$ $(\exists X)$.
In einem gegebenen $ZFC^- + V = HC$ Modell $\mathcal{M}$ definieren wir $\mathcal{U}^{\mathcal{M}}$ als den analytischen Teil von $\mathcal{M}$, welcher aus ω zusammen mit der Kollektion aller $\mathcal{M}$-Teilmengen von ω besteht.

Satz 2.1 *Sei $\mathcal{M}$ ein Modell von $ZFC^- + V = HC$. Dann ist $\mathcal{U}^{\mathcal{M}}$ mit der Standard-Interpretation der Symbole von $\mathcal{L}_2$ ein definierbares Modell von SOA. Insbesondere ist also SOA relativ konsistent zu $ZFC^- + V = HC$.*

Beweis:
(IND): Folgt wie üblich aus dem Fundierungsaxiom.
(AC): Nehmen wir an, dass gilt $\forall n \in \omega\ \exists y \subseteq \omega\ \phi(n, y)$. Aus dem Kollektionsaxiom folgt die Existenz einer Menge z mit $\forall n \in \omega\ \exists y \in z\ [y \subseteq \omega \wedge \phi(n, y)]$. Aufgrund des Auswahlaxioms gibt es eine Funktion f mit Definitionsbereich ω, so dass gilt $\forall n \in \omega\ \phi(n, f(n))$. Mit dem Separationsaxiom bilden wir die Menge $y := \{\langle n, \hat{n}\rangle \in \omega : n \in \omega \wedge \hat{n} \in f(n)\}$ und erhalten $\forall n \in \omega\ \phi(n, (y)_n)$, da $(y)_n = f(n)$ gilt für alle $n \in \omega$.
(CA): Folgt direkt aus dem Separationsaxiom und dem Unendlichkeitsaxiom. (Wir separieren aus der Menge ω.) □

II. $\mathbf{ZFC^- + V = HC}$ als Teilsystem von SOA

Diese Richtung ist nicht ganz so "natürlich" wie im obigen Fall, aber auch nicht schwer. Der Trick besteht darin, erblich abzählbare Mengen durch fundierte Bäume auf natürlichen Zahlen und diese wiederum als zweitstufige Objekte in SOA zu codieren.
Die folgenden Ausführungen orientieren sich an der Dissertation von M. Möllerfeld (vgl. [Möllerfeld]).

In ZFC bzw. in $ZFC^- + V = HC$ versteht man unter einem *Baum* auf einer nichtleeren Klasse A eine nichtleere Klasse T von endlichen Folgen von Elementen aus A mit der Eigenschaft:

$$\langle\ \rangle \in T \wedge (\forall s,t)[s \subseteq t \wedge t \in T \rightarrow s \in T].$$

Gilt $A = A_1 \times ... \times A_n$ gilt, so identifizieren wir eine endliche Folge s in A mit $(s_1, ..., s_n)$, wobei jedes s_i eine Folge in A_i ist und $dom(s) = dom(s_1) = ... = dom(s_n)$ sowie $s(k) = (s_1(k), ..., s_n(k))$ für alle $k \in dom(s)$ gilt. Einen Baum auf A nennen wir in diesem Fall n-dimensional.

Für einen Baum T nennen wir eine Funktion $f : \omega \rightarrow A$ einen *Pfad* durch T, wenn gilt

$$\forall n\ \langle f(0), ..., f(n)\rangle \in T.$$

Mit $[T]$ bezeichnen wir die Klasse aller Pfade in T.

Ein Baum T heißt *fundiert*, wenn es keine Pfade in ihm gibt, wenn also $[T] = \emptyset$ gilt.

Ein Baum T heißt *blattlos*, wenn für jedes $s \in T$ ein Pfad f durch T existiert mit $s \subset f$.

Sei T ein Baum auf A und s eine endliche Folge in A. Dann nennen wir $T_s := \{t : s^\frown t \in T\}$ den *Teilbaum von T am Knoten s*.
Für $\langle n\rangle \in T$ heißt $T_{\langle n\rangle}$ *ein direkter Teilbaum* von T.

Ein fundierter Baum T auf ω codiert eine erblich abzählbare Menge $\bar{T}$, nämlich genau die, deren Elemente durch die direkten Teilbäume von T codiert werden. Formal definieren wir induktiv:

$$\bar{T} = \{\bar{T}_{\langle x\rangle} : \langle x\rangle \in T\}.$$

Auch in SOA lassen sich die zur Codierung erblich abzählbarer Mengen benötigten Bäume auf ω definieren. Da wir jedoch nicht beliebig Mengen von Mengen bilden können, müssen wir so vorgehen, dass wir durch geeignete Codierung zunächst Paare natürlicher Zahlen als natürliche Zahlen

auffassen und dann ebenso endliche Mengen von Paaren natürlicher Zahlen (endliche Folgen) als natürliche Zahlen codieren. Auf diese Weise kann ein Baum auf ω dann als Menge von natürlichen Zahlen und damit als zweitstufiges Objekt aufgefasst werden.
Auch die Pfade eines Baumes auf ω lassen sich in SOA definieren, da eine Funktion $f : \omega \to \omega$ sich offensichtlich leicht als zweitstufiges Objekt, nämlich als Menge der Codes der Paare $(n, f(n))$, codieren lässt.

Wir definieren nun ein "Baummodell" $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ innerhalb eines gegebenen SOA-Modells $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{U}} := \ (\mathcal{V}^{\mathcal{U}}, \simeq^{\mathcal{U}}, \widetilde{\in}^{\mathcal{U}}),$$

mit:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{V}^{\mathcal{U}} & := & \text{Klasse der Codes fundierter Bäume}, \\ S \simeq^{\mathcal{U}} T & :\Leftrightarrow & \forall m\ (\langle m\rangle \in S \to \exists n\ (\langle n\rangle \in T \wedge S_{\langle m\rangle} \simeq^{\mathcal{U}} T_{\langle n\rangle})) \wedge \\ & & \forall m\ (\langle m\rangle \in T \to \exists n\ (\langle n\rangle \in S \wedge T_{\langle m\rangle} \simeq^{\mathcal{U}} S_{\langle n\rangle})), \\ S\ \widetilde{\in}^{\mathcal{U}} T & :\Leftrightarrow & \exists n\ [\langle n\rangle \in T \wedge S \simeq^{\mathcal{U}} T_{\langle n\rangle}]. \end{array}$$

Da Fixpunkte induktiver Definitionen durch Π^1_1-Formeln definiert werden können[1] (vgl. [Pohlers]), ist $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ Π^1_1-definierbar.

Wir erhalten nun eine Einbettung der Sätze von $\mathcal{L}_\in$ in die Sprache $\mathcal{L}_2$ wie folgt: Ist ein $\mathcal{L}_\in$-Satz φ gegeben, so ordnen wir diesem denjenigen $\mathcal{L}_2$-Satz zu, der sich aus φ ergibt, indem $\in$ durch $\widetilde{\in}^{\mathcal{U}}$ und $=$ durch $\simeq^{\mathcal{U}}$ ersetzt und die auftretenden Quantoren auf $\mathcal{V}^{\mathcal{U}}$ relativiert werden. Diesen Satz, der dann offenbar eine Formalisierung von "$\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \varphi$" darstellt, kürzen wir im Folgenden mit $|\varphi|$ ab.

$\mathcal{L}_\in$ wird üblicher Weise als eine Sprache mit Identität aufgefasst, d.h. das Relationssymbol $=$ wird als logisches Zeichen definiert und in einer Struktur für die Sprache als die Identität auf dem Träger interpretiert. In diesem Sinne ist unser Baummodell $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ keine Struktur für $\mathcal{L}_\in$, da zwei Bäume auch dann in der Relation $\simeq^{\mathcal{U}}$ stehen können, wenn sie nicht identisch gleich sind.
Man sieht jedoch leicht, dass $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ ein Modell folgender Satzmenge ist:

(1) $\forall S\ (S \simeq^{\mathcal{U}} S)$.
(2) $\forall S\ \forall T\ (S \simeq^{\mathcal{U}} T \to T \simeq^{\mathcal{U}} S)$.
(3) $\forall S\ \forall T\ \forall Z\ (S \simeq^{\mathcal{U}} T \wedge T \simeq^{\mathcal{U}} Z \to S \simeq^{\mathcal{U}} Z)$.

[1] Zur Definition von Π^1_1-Formeln vgl. Abschnitt 3.1

(4) $\forall S_1\ \forall S_2\ \forall T_1\ \forall T_2\ (S_1 \simeq^{\mathcal{U}} T_1 \wedge S_2 \simeq^{\mathcal{U}} T_2 \rightarrow (S_1 \widetilde{\in}^{\mathcal{U}} S_2 \leftrightarrow T_1 \widetilde{\in}^{\mathcal{U}} T_2))$.

Wegen (1), (2) und (3) kann man daher $\simeq^{\mathcal{U}}$ als Äquivalenzrelation auf $\mathcal{V}^{\mathcal{U}}$ auffassen und wegen (4) gilt für das Modell $\widetilde{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}}$, welches die zugehörigen Äquivalenzklassen als Individuen enthält und in welchem $\in$ und $=$ auf den Äquivalenzklassen entsprechend $\widetilde{\in}^{\mathcal{U}}$ und $\simeq^{\mathcal{U}}$ auf den jeweiligen Repräsentanten definiert werden, dass es eine Struktur für $\mathcal{L}_{\in}$, aufgefasst als Sprache mit Identität, ist.
Mit dem Beweis des nächsten Satzes zeigen wir, dass in jedem SOA-Modell $\mathcal{U}$ das Baummodell $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ ein Modell von $ZFC^- + V = HC$ ist, wobei wir hierbei $\mathcal{L}_{\in}$ als Sprache ohne Identität auffassen. Nach obigen Überlegungen folgt daraus auch die relative Konsistenz von $ZFC^- + V = HC$ zu SOA wenn wir $\mathcal{L}_{\in}$ als Sprache mit Identität betrachten.

Satz 2.2 *Sei $\mathcal{U}$ ein Modell von SOA. Dann ist $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ ein Π^1_1-definierbares Modell von $ZFC^- + V = HC$.*

Beweis:
Im folgenden Beweis schreiben wir aus Gründen der Lesbarkeit für einen Satz φ aus $\mathcal{L}_{\in}$ oft $\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \varphi$ anstelle von $\mathcal{U} \models |\varphi|$, wobei evtl. in φ auftretende Mengenparameter der Form $\bar{S}$ in der $\mathcal{L}_2$-Formel $|\varphi|$ dann natürlich wieder durch S interpretiert werden.

(Ext): Gilt nach der Definition von $\simeq^{\mathcal{U}}$.

(Pair): Seien $S_1,\ S_2 \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$. Dann ist $T := \{\langle i\rangle^\frown s : s \in S_i,\ i = 1, 2\} \cup \{\langle\rangle\}$ eine Paarmenge von S_0, S_1 in $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$.

(Union): Sei $S \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$. Definiere $T := \{\langle[m, n]\rangle^\frown s : \langle m, n\rangle^\frown s \in S\} \cup \{\langle\rangle\}$. Dann gilt in $\mathcal{M}^{\mathcal{U}} : T \simeq^{\mathcal{U}} \bigcup S$.

(Col): Sei $S \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ und ϕ eine Formel von $\mathcal{L}_{\in}$ mit $\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \forall x \in \bar{S}\ \exists y\ \phi(x, y)$. Dann gilt $\mathcal{U} \models \forall n\ \exists Y\ [\langle n\rangle \in S \rightarrow (Y \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}} \wedge \mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \phi(\bar{S}_{\langle n\rangle}, \bar{Y}))]$. (Gilt $T \widetilde{\in}^{\mathcal{U}} S$, so existiert ein n mit $T \simeq^{\mathcal{U}} S_{\langle n\rangle}$.) Wegen (AC) existiert ein $Y \in \mathcal{U}$, so dass gilt $\mathcal{U} \models \forall n\ (\langle n\rangle \in S \rightarrow ((Y)_n \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}} \wedge \mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \phi(\bar{S}_{\langle n\rangle}, (\bar{Y})_n))$. Nach (CA) existiert $Z := \{\langle n\rangle^\frown s : \langle n\rangle \in S \wedge s \in (Y)_n\} \cup \{\langle\rangle\}$ und ist offensichtlich die gesuchte Menge.

(Inf): Wir definieren rekursiv $0^* = \{\langle\rangle\}$ und $(n+1)^* = n^* \cup \{\langle n\rangle^\frown s : s \in n^*\}$. Dann bezeugt $\omega^* := \{\langle n\rangle^\frown s : n \in \omega \wedge s \in n^*\} \cup \{\langle\rangle\}$ die Gültigkeit von (Inf).

(Sep): Sei $S \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ und ϕ eine $\mathcal{L}_{\in}$-Formel. Wir suchen eine Menge $Z \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ mit $\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \forall x\ (x \in \bar{Z} \leftrightarrow x \in \bar{S} \wedge \phi(x))$. Wegen (CA) existiert die Menge $\{\langle n\rangle^\frown s : \langle n\rangle \in S \wedge s \in S_{\langle n\rangle} \wedge \mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \phi(\bar{S}_{\langle n\rangle})\} \cup \{\langle\rangle\}$ und erfüllt offensichtlich die gewünschten Eigenschaften der gesuchten Menge Z.

(Found): Angenommen (Found) gelte nicht. Dann existiert ein $S \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$, $S \neq \{\langle\rangle\}$, welches kein $\widetilde{\in}^{\mathcal{U}}$-minimales Element in $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ besitzt. Es gibt also eine Folge (S_n) in $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$, so dass $S_0 \widetilde{\in}^{\mathcal{U}} S$ und $S_{n+1} \widetilde{\in}^{\mathcal{U}} S_n$ für alle n gilt. Dies ist ein Widerspruch, da S fundiert ist, also keine unendlichen Pfade besitzt.

(Ac): Sei $S \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$, $S \neq \{\langle\rangle\}$ derart, dass in $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ gilt $T \widetilde{\in}^{\mathcal{U}} S \to T \neq \{\langle\rangle\}$ und $T_1, T_2 \widetilde{\in}^{\mathcal{U}} S \to \forall R \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}}\ (R \widetilde{\in}^{\mathcal{U}} T_1 \to \neg R \widetilde{\in}^{\mathcal{U}} T_2)$. Dann existiert nach (CA) $T := \{s : \exists m\ \exists n\ (S_{\langle m\rangle} \widetilde{\in}^{\mathcal{U}} S \wedge n = min\{k : \langle k\rangle \in S_{\langle m\rangle}\}) \wedge s \in S_{\langle m,n\rangle}\} \cup \{\langle\rangle\}$ und ist eine Auswahlmenge für S. Denn sei $R \widetilde{\in}^{\mathcal{U}} S$, dann existiert ein m mit $R \simeq^{\mathcal{U}} S_{\langle m\rangle}$ und daher gilt $R \cap T \simeq^{\mathcal{U}} \{S_{\langle m,n\rangle}\}$ für n minimal mit $\langle m,n\rangle \in S$.

(V=HC): Sei $T \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ und sei $S \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ ein Baum, der die transitive Hülle von $\bar{T}$ codiert (die bisher gezeigten Axiome genügen, um die Existenz der transitiven Hülle zu zeigen, vgl. [Jech]). O.b.d.A. sei $S_{\langle n\rangle} \widetilde{\in}^{\mathcal{U}} S$ für alle n. Dann existiert nach (Pair) für jedes n ein Baum $P_n \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$, der das geordnete Paar $(n, S_{\langle n\rangle})$ beschreibt. Wegen (CA) existiert $F := \{\langle n\rangle^\frown s : n \in \omega \wedge s \in P_n\} \cup \{\langle\rangle\}$ und ist offensichtlich eine Surjektion von ω auf S in $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$. □

III. Zur Beweisführung in SOA

In den folgenden Kapiteln werden hauptsächlich Aussagen in SOA bewiesen. In diesem Abschnitt soll erläutert werden, warum man dies in äquivalenter Weise in $ZFC^- + V = HC$ tun kann. Einen Beweis in $ZFC^- + V = HC$ zu führen ist oft bequemer, zum einen, weil sich viele bekannte Beweise aus ZFC direkt übertragen lassen, sofern sie nicht Gebrauch vom Potenzmengenaxiom machen (hier muss man beachten, dass auch Konzepte wie beispielsweise das der überabzählbaren Ordinalzahlen das Potenzmengenaxiom benötigen), zum anderen, da man ohne aufwendige Codierung oder die Zurückführung auf Klassen auch komplexere mathematische Objekte, nämlich Mengen von Mengen, handhaben kann.

Wir haben bereits gesehen, dass jeder $\mathcal{L}_2$-Satz kanonisch in einen $\mathcal{L}_\in$-Satz überführt werden kann. Jedoch kann nicht jeder $\mathcal{L}_\in$-Satz in ebenso natürlicher Art in einen $\mathcal{L}_2$-Satz übersetzt werden. Wohl können wir aber, wie oben ausgeführt, eine Einbettung definieren, indem wir einem $\mathcal{L}_\in$-Satz φ den $\mathcal{L}_2$-Satz $|\varphi|$, welcher "$\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \varphi$" formalisiert, zuordnen. Da wir jeden $\mathcal{L}_2$-Satz kanonisch als $\mathcal{L}_\in$-Satz auffassen können, können wir $|\varphi|$ auch für einen $\mathcal{L}_2$-Satz φ definieren, wobei $|\varphi|$ dann sowohl als "$\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \varphi$" als auch als "$\mathcal{U}^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}} \models \varphi$" gelesen werden kann.
Verallgemeinern wir dies auf Formeln (mit Mengenparametern) und definieren wir zusätzlich für jede $\mathcal{L}_\in$-Formel φ eine Formalisierung $|\varphi|$ von "$\mathcal{M}^{\mathcal{U}^{\mathcal{M}}} \models \varphi$", so können wir damit zeigen, dass jedes SOA-Modell $\mathcal{U}$ isomorph zum analytischen Teil $\mathcal{U}^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}}$ des in $\mathcal{U}$ definierten Baummodells $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ und jedes $ZFC^- + V = HC$-Modell $\mathcal{M}$ isomorph zum Baummodell $\mathcal{M}^{\mathcal{U}^{\mathcal{M}}}$ des in $\mathcal{M}$ definierten analytischen Teils $\mathcal{U}^{\mathcal{M}}$ ist. Dies werden wir im Folgenden

skizzieren, wobei wir für eine detaillierte Ausführung auf [Simpson] verweisen.

Wir definieren zunächst induktiv eine Abbildung $(\cdot)^*$ durch

$$0^* = \{\langle\rangle\},$$
$$(n+1)^* = n^* \cup \{\langle n\rangle^\frown s : s \in n^*\},$$
$$X^* = \{\langle\rangle\} \cup \{\langle m\rangle^\frown s : m \in X \wedge s \in m^*\}$$

sowie eine weitere Abbildung $(\cdot)^{**}$ durch

$$\emptyset^{**} = \{\langle\rangle\},$$
$$u^{**} = \{\langle\rangle\} \cup \{f(y)^\frown s : y \in u \wedge s \in y^{**}\},$$

wobei f eine (wegen $V = HC$ existierende) Injektion von u nach ω sei.

Dann gilt für jedes SOA-Modell $\mathcal{U}$, dass $(\cdot)^*$ eine in SOA definierbare Funktion ist, welche erststufige Objekte von $\mathcal{U}$ auf endliche fundierte Bäume und zweitstufige Objekte von $\mathcal{U}$ auf beliebige fundierte Bäume, d.h. in beiden Fällen auf Elemente von $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$, abbildet. Fassen wir $(\cdot)^*$ als Funktion von $\mathcal{U}$ in den analytischen Teil $\mathcal{U}^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}}$ von $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ auf und betrachten wir $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ via Äquivalenzklassen als Modell von $\mathcal{L}_\in$ mit Identität, so gilt ferner, dass $(\cdot)^*$ in diesem Fall eine Bijektion ist.
Weiter gilt für jedes $ZFC^- + V = HC$-Modell $\mathcal{M}$, dass $(\cdot)^{**}$ eine in $ZFC^- + V = HC$ definierbare Funktion ist, welche Mengen aus $\mathcal{M}$ auf fundierte Bäume aus $\mathcal{M}^{\mathcal{U}^{\mathcal{M}}}$ abbildet. Fassen wir $\mathcal{M}^{\mathcal{U}^{\mathcal{M}}}$ als Äquivalenzklassenmodell von $\mathcal{L}_\in$ mit Identität auf, so ist $(\cdot)^{**}$ eine Bijektion mit Umkehrabbildung $\bar{(\cdot)}$.

- Ist $\mathcal{U}$ ein SOA-Modell und φ eine $\mathcal{L}_\in$-Formel mit Mengenparametern, so ordnen wir φ analog wie wir dies bereits bei den $\mathcal{L}_\in$-Sätzen getan haben eine $\mathcal{L}_2$-Formel $|\varphi|$ zu, wobei nun zusätzlich die Mengenparameter durch ihre Bilder unter $(\cdot)^{**}$ ersetzt werden. $|\varphi|$ ist dann offenbar wieder eine Formalisierung von "$\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \varphi$".
  Ist φ eine $\mathcal{L}_2$-Formel mit Mengenparametern, so können wir φ durch Relativierung auf $\omega^{(\mathcal{M}^{\mathcal{U}})}$ und Ersetzen von $=$ durch $\simeq^{(\mathcal{U}^{\mathcal{M}})}$, von $\in$ durch $\in^{(\mathcal{U}^{\mathcal{M}})}$ sowie den Mengenparameter durch deren Bilder unter $(\cdot)^*$ ebenfalls eine Formel $|\varphi|$ zuordnen, die "$\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \varphi$" formalisiert. Da φ eine $\mathcal{L}_2$-Formel ist, kann $|\varphi|$ in diesem Fall auch als "$\mathcal{U}^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}} \models \varphi$" gelesen werden kann[2].

- Ist $\mathcal{M}$ ein $ZFC^- + V = HC$-Modell und φ eine $\mathcal{L}_\in$-Formel mit Mengenparametern, so können wir auch hier durch Relativierung der Quan-

[2]Für eine $\mathcal{L}_\in$-Formel wäre letzterer Ausdruck im Allgemeinen nicht definierbar.

toren auf das im analytischen Teil $\mathcal{U}^{\mathcal{M}}$ von $\mathcal{M}$ definierbare Baummodell $\mathcal{M}^{\mathcal{U}^{\mathcal{M}}}$ sowie durch Ersetzung von $=$ durch $\simeq^{(\mathcal{U}^{\mathcal{M}})}$, von $\in$ durch $\in^{(\mathcal{U}^{\mathcal{M}})}$ und von den Mengenparametern durch deren Bilder unter $(\cdot)^{**}$ eine $\mathcal{L}_{\in}$-Formel $|\varphi|$ definieren, welche "$\mathcal{M}^{\mathcal{U}^{\mathcal{M}}} \models \varphi$" formalisiert.

Es gelten nun die folgenden Lemmata, deren vollständige Beweise in [Simpson] nachgelesen werden können:

Lemma 2.3 *Sei $\mathcal{U}$ ein Modell von SOA und φ eine $\mathcal{L}_2$-Formel. Dann gilt*

$$\mathcal{U} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{U} \models |\varphi|.$$

Fassen wir $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ mit Hilfe von Äquivalenzklassen als ein Modell der Sprache $\mathcal{L}_{\in}$ mit Identität auf, so sind $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}}$ zueinander isomorph.

Lemma 2.4 *Sei $\mathcal{M}$ ein Modell von $ZFC^- + V = HC$ und φ eine $\mathcal{L}_{\in}$-Formel. Dann gilt*

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models |\varphi|.$$

Fassen wir $\mathcal{M}^{\mathcal{U}^{\mathcal{M}}}$ mit Hilfe von Äquivalenzklassen als ein Modell der Sprache $\mathcal{L}_{\in}$ mit Identität auf, so sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}^{\mathcal{U}^{\mathcal{M}}}$ zueinander isomorph.

Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen, um die beiden folgenden Sätze zu zeigen:

Satz 2.5 *Sei φ ein $\mathcal{L}_{\in}$-Satz. Dann gilt:*
$ZFC^- + V = HC$ beweist φ genau dann, wenn SOA $|\varphi|$ beweist.

Beweis:
Gelte, dass φ in $ZFC^- + V = HC$ beweisbar ist. Sei $\mathcal{U}$ ein beliebiges Modell von SOA. Da nach Satz (2.2) $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ ein $ZFC^- + V = HC$-Modell ist, gilt dann $\mathcal{M}^{\mathcal{U}} \models \varphi$ und somit $\mathcal{U} \models |\varphi|$. Also leitet SOA $|\varphi|$ her.
Gelte umgekehrt dass $|\varphi|$ in SOA beweisbar ist. Sei $\mathcal{M}$ ein beliebiges Modell von $ZFC^- + V = HC$. Da $\mathcal{U}^{\mathcal{M}}$ nach Satz (2.1) ein SOA-Modell ist, gilt dann $\mathcal{U}^{\mathcal{M}} \models |\varphi|$, d.h. $\mathcal{M}^{\mathcal{U}^{\mathcal{M}}} \models \varphi$. Also gilt $\mathcal{M} \models |\varphi|$ und mit Lemma (2.4) folgt $\mathcal{M} \models \varphi$. Also leitet $ZFC^- + V = HC$ φ her. □

Satz 2.6 *$ZFC^- + V = HC$ ist eine konservative Erweiterung von SOA. Das bedeutet, dass für jeden $\mathcal{L}_2$-Satz φ gilt, dass $ZFC^- + V = HC$ φ (kanonisch aufgefasst als $\mathcal{L}_{\in}$-Satz) genau dann beweist, wenn SOA φ beweist.*

Beweis:
Sei φ ein $\mathcal{L}_2$-Satz. Dann gilt nach Satz (2.6), wobei wir φ kanonisch als $\mathcal{L}_{\in}$-Satz lesen, dass $ZFC^- + V = HC$ φ genau dann beweist, wenn SOA $|\varphi|$ beweist. Da φ ein $\mathcal{L}_2$-Satz ist, gilt letzteres jedoch nach Lemma (2.3) genau dann, wenn SOA φ beweist. □

2.3 Das konstruktible Universum

Die in diesem Abschnitt skizzierten Beweise können in [Jech] nachgelesen werden.

Für eine transitive Menge M definieren wir (zunächst informal)

$$\begin{aligned} Def(M) := \{Y \subseteq M : & \text{ es existieren eine Formel } \varphi \\ & \text{und } x_1, ..., x_n \in M, \text{ so dass gilt} \\ & Y = \{a \in M : (M, \in) \models \varphi(a, x_1, ..., x_n)\}\} \end{aligned}$$

und damit die konstruktible Hierarchie

$$\begin{aligned} L_0 &:= \emptyset, \\ L_{\alpha+1} &:= Def(L_\alpha), \\ L_\lambda &:= \textstyle\bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha \qquad \text{falls } \lambda \text{ eine Limeszordinalzahl ist,} \\ \\ L &:= \textstyle\bigcup_{\alpha \in OR} L_\alpha. \end{aligned}$$

Da die Operation $x \to Def(x)$ in der Sprache der Mengenlehre definierbar ist, kann in dieser über die Hierarchie $(L_\alpha : \alpha \in OR)$ gesprochen werden. L ist das kleinste transitive Modell von ZFC, welches alle Ordinalzahlen enthält. Für jedes $\alpha \in OR$ ist L_α transitiv, $L_\alpha \cap OR = \alpha$ und für $\beta > \alpha$ $L_\alpha \subset L_\beta$. Bildet man ferner L in einem ZFC Modell $\mathcal{W}$, so ist dieses identisch mit L, falls $\mathcal{W}$ alle Ordinalzahlen enthält, und identisch mit L_α, falls α die kleinste Ordinalzahl ist, welche nicht mehr in $\mathcal{W}$ enthalten ist. Daraus folgt unter anderem, dass in L das Konstruktibilitätsaxiom (V=L) gilt.
Es läßt sich nun zeigen, dass das Auswahlaxiom relativ konsistent zu ZF und die verallgemeinerte Kontinuumshypothese (GCH) relativ konsistent zu ZFC ist.
Für ersteres zeigt man, dass sich für jedes $\alpha \in OR$ rekursiv eine Wohlordnung $<_\alpha$ auf L_α definieren lässt. Ist dann $x \in L$ beliebig, so existiert ein $\alpha \in OR$ mit $x \in L_\alpha$ und es gilt, dass $<_\alpha \upharpoonright_x$ eine definierbare Wohlordnung auf x ist.
Für letzteres zeigt man mit dem Kondensationslemma, dass für jedes $\alpha \in OR$ die Potenzmenge $P(\omega_\alpha)$ von ω_α eine Teilmenge von $L_{\omega_{\alpha+1}}$ ist, woraus wegen $|L_{\omega_{\alpha+1}}| = \omega_{\alpha+1}$ folgt, dass gilt $|P(\omega_\alpha)| = 2^{\omega_\alpha} \leq \omega_{\alpha+1}$. Unter der Annahme (V=L) gilt somit also $2^{\omega_\alpha} \leq \omega_{\alpha+1}$ und da nach Cantor die Kardinalität einer Menge immer kleiner als die ihrer Potenzmenge ist folgt $2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$.

Ist A eine weitere Menge, so kann man eine verallgemeinerte konstruktible Hierarchie definieren. Sei

$$
\begin{aligned}
Def_A(M) := \{Y \subseteq M : &\text{ es existieren eine Formel } \varphi \\
&\text{und } x_1, ..., x_n \in M, \text{ so dass gilt} \\
&Y = \{a \in M : (M, \epsilon, A \cap M) \models \varphi(a, x_1, ..., x_n)\}\}.
\end{aligned}
$$

Mit dieser Definition lässt sich analog wie oben eine zu A relativierte konstruktible Hierarchie definieren, wobei wir anstelle von L_α bzw. L nun $L_\alpha[A]$ bzw. $L[A]$ schreiben.
Auch für diese Hierarchie gelten oben gemachte (ggf. relativierte) Aussagen, wobei es jedoch Mengen A geben kann, so dass $L[A] \models 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ erst für alle $\alpha > \alpha_0$ für ein festes $\alpha_0 \in OR$ gilt. Dies folgt daraus, dass sich im Unterschied zu L hier nur zeigen lässt, dass unter der Voraussetzung $A \subset L_{\omega_\alpha}[A]$ die Potenzmenge von ω_α eine Teilmenge von $L_{\omega_{\alpha+1}}$ ist. Wir werden im Folgenden die konstruktible Hierarchie jedoch nur relativ zu Teilmengen natürlicher Zahlen (reeller Zahlen) betrachten, für welche wegen $\omega \subset L_\omega[A]$ somit (GCH) gilt.

Obige Ausführungen beziehen sich üblicherweise auf ZFC, können aber ohne Schwierigkeiten auf $ZFC^- + V = HC$ übertragen werden. Dabei ist zu beachten, dass zwar auch in $ZFC^- + V = HC$ gilt, dass L bzw. $L[A]$ ein Modell von ZFC^- ist, aber dass die Aussage, dass in L bzw. $L[A]$ jede Menge erblich abzählbar ist ($V = HC$) hier im Allgemeinen falsch ist.
Arbeiten wir in SOA, so stellt sich die Frage, was man sich in einem SOA-Modell unter der konstruktiblen Hierarchie vorstellen kann (bzw. wie die entsprechenden definierenden Formeln lauten). Aufgrund des vorherigen Abschnittes werden wir die L, L_α, $L[A]$ bzw. $L_\alpha[A]$ in einem SOA-Modell $\mathcal{U}$ mit denen wie üblich in dem $ZFC^- + V = HC$-Modell $\mathcal{M}^\mathcal{U}$ definierten L, L_α, $L[A]$ bzw. $L_\alpha[A]$ identifizieren.

3 Deskriptive Mengenlehre

3.1 Grundlagen

In diesem Kapitel werden kurz die relevanten Definitionen und einige wichtige Sätze der deskriptiven Mengenlehre erläutert. Um zu verdeutlichen, welche Besonderheiten dabei in $ZFC^- + V = HC$ bzw. in SOA im Vergleich zu ZFC beachtet werden müssen, arbeiten wir zunächst in ZFC und gehen anschließend in einem eigenen Abschnitt (vgl. 3.4) darauf ein, welche Änderungen sich in diesen schwächeren Theorien ergeben.

In der deskriptiven Mengenlehre wird die Struktur der reellen Zahlen und ihrer definierbaren Teilmengen untersucht. Dabei werden reelle Zahlen meist nicht, wie sonst oft üblich, als Dedekindsche Schnitte oder als Cauchyfolgen rationaler Zahlen modulo Nullfolgen definiert, sondern als Elemente des Baireschen Raumes ${}^{\omega}\omega$, üblicherweise als $\mathcal{N}$ bezeichnet, oder auch des Cantor-Raumes ${}^{\omega}2$, der offensichtlich mit dem Raum der Teilmengen von ω identifiziert werden kann und meist mit $\mathcal{C}$ bezeichnet wird. Der Grund dafür ist, dass diese Räume eine für die deskriptive Mengenlehre einfachere Struktur besitzen, insbesondere muss sich nicht mit irrelevanten Problemen bezüglich der Dimension auseinandergesetzt werden, da sie jeweils homöomorph zu ihren endlichen Potenzen, ja sogar zu ihrer ω-Potenz sind.
Keine zwei der Räume $\mathbb{R}$ (im üblichen Sinne definiert), $\mathcal{N}$ und $\mathcal{C}$ sind zueinander homöomorph, denn es gilt:

- $\mathcal{C}$ ist kompakt aber $\mathcal{N}$ ist nicht kompakt.
- $\mathcal{C}$ und $\mathcal{N}$ sind zusammenhängend aber $\mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend.

Dennoch kann man geeignete Homöomorphismen angeben, die zwar nicht surjektiv bzw. nur auf einem Teilraum definiert sind, die aber, da die Elemente, die nicht im Bild- bzw. im Definitionsbereich der Funktion liegen, nur jeweils abzählbar viele sind, genügen, um die in der deskriptiven Mengenlehre interessierenden Eigenschaften von einem Raum auf den anderen übertragen zu können (vgl. [Levy]). Ferner lässt sich zeigen, dass viele dieser Eigenschaften auch allgemeiner in so genannten Polnischen Räumen gelten, welche als topologische Räume, die homöomorph zu einem separablen und vollständigen metrischen Raum sind, definiert werden. ($\mathbb{R}, \mathcal{C}$ und $\mathcal{N}$ sind Beispiele solcher.)
Da $\mathbb{R}, \mathcal{C}$ und $\mathcal{N}$ somit "fast" homöomorph sind, wird es uns bei den folgenden Ausführungen frei stehen, jeweils den Raum zu wählen, der für unser Anliegen am günstigsten scheint.

A. Zur Topologie des Baireschen Raumes und des Cantor-Raumes

Da der Cantor-Raum ein Teilraum des Baireschen Raumes ist und die Definitionen und Eigenschaften sich kanonisch übertragen lassen, beschränken wir uns hier auf den letzteren.
Alle folgenden Ausführungen lassen sich auf beliebige endliche Dimensionen übertragen. Dies werden wir in einigen Sätzen und Definitionen nutzen, ohne zuvor jedesmal explizit daran zu erinnern.

Wir definieren eine Topologie auf $\mathcal{N}$ indem wir eine (abzählbare) Basis angeben. Sei ${}^{<\omega}\omega := \bigcup\{{}^{n}\omega : n \in \omega\}$. Dann definieren wir die basisoffenen Mengen durch

$$\mathcal{U}_s := \{x \in {}^{\omega}\omega : x_{\upharpoonright dom(s)} = s\},$$

wobei $s \in {}^{<\omega}\omega$ sei.
Die $\mathcal{U}_s$ bilden eine Basis für eine Topologie auf ${}^{\omega}\omega$ da gilt, dass $\bigcup_{s\in {}^{<\omega}\omega} \mathcal{U}_s = {}^{\omega}\omega$ ist und für $\mathcal{U}_s$, $\mathcal{U}_t$ mit $s, t \in {}^{<\omega}\omega$ beliebig gilt: Ist $x \in \mathcal{U}_s \cap \mathcal{U}_t$ so ist entweder $s \subseteq t$ oder $t \subseteq s$ und, falls o.B.d.A. $s \subseteq t$ gelte, $x \in \mathcal{U}_t \subseteq \mathcal{U}_s \cap \mathcal{U}_t$.

Die Elemente der Topologie nennen wir *offene*, ihre Komplemente *abgeschlossene* Mengen. Jede basisoffene Menge ist wegen

$${}^{\omega}\omega \setminus \mathcal{U}_s = \bigcup\{\mathcal{U}_t : t \in {}^{<\omega}\omega, dom(t) = dom(s), t \neq s\}$$

auch abgeschlossen, insbesondere ist $\mathcal{N}$ nicht zusammenhängend.
Ferner definieren wir eine Metrik d auf $\mathcal{N}$ durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & , falls\ x = y \\ \frac{1}{min\{n:\ x(n)\neq y(n)\}+1} & , sonst. \end{cases}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass d die oben definierte Topologie erzeugt und dass $\mathcal{N}$ bezüglich dieser Metrik vollständig ist.
Ferner ist $\mathcal{N}$ separabel, da die Menge $\{x \in {}^{\omega}\omega : \exists m\ \forall n \geq m\ x(n) = x(m)\}$ abzählbar und dicht in $\mathcal{N}$ ist.
Damit gilt, dass $\mathcal{N}$ ein polnischer Raum ist.

Eine oft nützliche Charakterisierung von abgeschlossenen Mengen erhält man mit Hilfe von Bäumen auf ω. Für einen Baum T auf ω sei

$$[T] = \{x \in {}^{\omega}\omega : \forall n < \omega\ x_{\upharpoonright(n)} \in T\}.$$

Damit lässt sich leicht zeigen, dass gilt:

$$A \subseteq {}^{\omega}\omega \text{ ist abgeschlossen} \Leftrightarrow A = [T] \text{ mit einen Baum } T \text{ auf } \omega.$$

B. Klassifizierungen definierbarer Teilmengen des Baireschen Raumes

I. Borelmengen

Definition 3.1 *Sei x eine Menge. $\mathcal{S} \subseteq P(x)$ heißt σ-Algebra auf x, wenn gilt:*

i) $x \in \mathcal{S}$.

ii) Ist $y \in \mathcal{S}$, *so ist auch* $x \setminus y \in \mathcal{S}$.

iii) Gilt $a_n \in \mathcal{S}$ *für alle* $n \in \omega$, *so folgt* $\bigcup_{n<\omega} a_n \in \mathcal{S}$.

Wir definieren die Menge der Borelmengen $\mathcal{B}$ als die kleinste σ-Algebra auf $\mathcal{N}$, die alle offenen Mengen enthält.
Auf äquivalente Weise können Borelmengen durch die so genannte *Borel-Hierarchie* definiert werden:

Definition 3.2 *Für* $\alpha \in On$ *seien*
$\mathbf{\Sigma}^0_1 =$ *die Menge der offenen Mengen,*
$\mathbf{\Pi}^0_1 =$ *die Menge der abgeschlossenen Mengen,*
$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \{\bigcup_{(n\in\omega)} A_n : \forall n \; \exists \beta < \alpha \; A_n \in \mathbf{\Pi}^0_\beta\}$,
$\mathbf{\Pi}^0_\alpha = \{{}^\omega\omega \setminus A : A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha\}$,
$\mathbf{\Delta}^0_\alpha = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha$.

Es ergibt sich folgende Hierarchie:

$$\mathbf{\Delta}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Delta}^0_2 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2 \subseteq ... \subseteq \mathbf{\Delta}^0_\omega \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\omega \; ...$$

$$\mathbf{\Delta}^0_1 \subseteq \mathbf{\Pi}^0_1 \subseteq \mathbf{\Delta}^0_2 \subseteq \mathbf{\Pi}^0_2 \subseteq ... \subseteq \mathbf{\Delta}^0_\omega \subseteq \mathbf{\Pi}^0_\omega \; ...$$

Jedes $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ bzw. $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten und Vereinigungen und unter Urbildern stetiger Funktionen.

Man zeigt leicht, dass die Menge der Borelmengen $\mathcal{B}$ gerade $\bigcup_{(\alpha\in On)} \mathbf{\Delta}^0_\alpha$ ($= \bigcup_{(\alpha\in\omega_1)} \mathbf{\Delta}^0_\alpha$) ist. ($\omega_1$ genügt, da für $\alpha_n \in \omega_1$ für jedes $n \in \omega$ auch $sup\{\alpha_n : n \in \omega\} < \omega_1$ gilt.)

Indem man die Existenz so genannter universeller $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-Mengen zeigt, folgt hieraus mit einem Diagonalargument, dass die Borelhierarchie eine echte Hierarchie ist, d.h. es gilt $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \not\subseteq \mathbf{\Pi}^0_\alpha$ und damit $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \neq \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$ für alle $\alpha < \omega_1$.

II. Projektive Mengen

Borelmengen sind nicht abgeschlossen unter Projektionen oder Bildern stetiger Funktionen. Dies gibt Anlass, eine weitere Klassifizierung von Teilmengen des Baireschen Raumes einzuführen.

Definition 3.3 *$A \subseteq {}^\omega\omega$ heißt analytisch, falls A das stetige Bild einer Borelmenge ist.*

Es gelten folgende Charakterisierungen von analytischen Mengen (vgl. [Jech]):

Lemma 3.4 *Sei $A \subseteq {}^\omega\omega$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) A ist analytisch.

ii) A ist das (punktweise) Bild einer stetigen Funktion $f : {}^\omega\omega \to {}^\omega\omega$.

iii) $A = p(B)$ für eine Borelmenge $B \in {}^\omega\omega \times {}^\omega\omega$.

iv) $A = p(C)$ für eine abgeschlossene Menge $C \in {}^\omega\omega \times {}^\omega\omega$.

Ausgehend von den analytischen Mengen lässt sich ähnlich wie bei den Borelmengen eine Hierarchie definieren, wobei wir jedoch die Vereinigungsbildung durch Projektionsbildung ersetzen.
Die projektive Hierarchie ist wie folgt definiert:

Definition 3.5 *Für $n \in \omega$ seien*
$\mathbf{\Sigma}^1_1 =$ *die Menge der analytischen Mengen,*
$\mathbf{\Pi}^1_1 =$ *die Menge der koanalytischen Mengen, d.h. die Menge, die genau die Komplemente analytischer Mengen enthält,*
$\mathbf{\Sigma}^1_{n+1} = \{p(A) : A \in \mathbf{\Pi}^1_n\}$,
$\mathbf{\Pi}^1_{n+1} = \{{}^\omega\omega \setminus A : A \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}\}$,
$\mathbf{\Delta}^1_n = \mathbf{\Sigma}^1_n \cap \mathbf{\Pi}^1_n$.

Es ergibt sich folgende Hierarchie:

$$\mathbf{\Delta}^1_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_1 \subseteq \mathbf{\Delta}^1_2 \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_2 \subseteq \ldots$$

$$\mathbf{\Delta}^1_1 \subseteq \mathbf{\Pi}^1_1 \subseteq \mathbf{\Delta}^1_2 \subseteq \mathbf{\Pi}^1_2 \subseteq \ldots$$

Wie im Falle der Borel-Hierarchie lässt sich auch hier durch die Existenz universeller $\mathbf{\Sigma}^1_n$-Mengen und einem Diagonalargument zeigen, dass es sich um eine echte Hierarchie handelt.

Definition 3.6 *$A \subseteq {}^\omega\omega$ heißt projektiv, falls es ein $n < \omega$ gibt mit $A \in \mathbf{\Sigma}^1_n$.*

Indem Suslin zeigte, dass je zwei disjunkte analytische Mengen durch eine Borelmenge separiert werden können, bewies er folgendes Resultat (vgl. [Jech]):

Satz 3.7 *Die Menge der Borelmengen entspricht genau der Menge* $\mathbf{\Delta}_1^1$.

Die Hierarchie der projektiven Mengen lässt sich auch durch die so genannte Lightface-Hierarchie beschreiben.
Wir nennen eine Formel arithmetisch, wenn in ihr keine andere Quantifikation als solche über ω vorkommt. Weiter heißt eine Formel Σ_n^1, falls sie (in der jeweiligen Theorie) äquivalent ist zu einer Formel der Gestalt

$$\exists x_1 \in {}^\omega\omega\ \forall x_2 \in {}^\omega\omega ...\ Qx_n \in {}^\omega\omega\ \bar{Q}m \in \omega\ \phi(x_{1\upharpoonright m}, x_{2\upharpoonright m}, ..., x_{n\upharpoonright m}),$$

wobei ϕ arithmetisch ist, $\bar{Q}$ den zu Q duale Quantor bezeichne und ferner die Anzahl der alternierenden Quantoren über ${}^\omega\omega$ gleich n ist. Eine Formel wird mit Π_n^1 bezeichnet, falls ihre Negation Σ_n^1 ist und mit Δ_n^1, falls sie sowohl Σ_n^1 als auch Π_n^1 ist.
Die jeweilige arithmetische Formel ϕ kann dabei stets quantorenfrei gewählt werden, da sich mögliche in ihr auftretende Quantoren zusammen mit dem letzten Quantor über ${}^\omega\omega$ und dem Quantor über ω stets zu einem neuen letzten Quantor über ${}^\omega\omega$ und einem neuen Quantor über ω zusammencodieren lassen.

Definition 3.8 *Sei* $a \in {}^\omega\omega$. *Eine Klasse* $A \subseteq {}^\omega\omega$ *heißt* Σ_n^1 *bzw.* Π_n^1 *oder* $\Sigma_n^1[a]$ *bzw.* $\Pi_n^1[a]$, *falls es eine* Σ_n^1*- bzw. eine* Π_n^1*-Formel* $\phi(u)$ *oder* $\phi(u,v)$ *der Form* $\exists x_1 \in {}^\omega\omega ...\ Qx_n \in {}^\omega\omega\ \bar{Q}m \in \omega\ \phi(x_{1\upharpoonright m}, ..., x_{n\upharpoonright m}, u_{\upharpoonright n}(, v_{\upharpoonright n}))$ *bzw.* $\forall x_1 \in {}^\omega\omega ...\ Qx_n \in {}^\omega\omega\ \bar{Q}m \in \omega\ \phi(x_{1\upharpoonright m}, ..., x_{n\upharpoonright m}, u_{\upharpoonright n}(, v_{\upharpoonright n}))$ *gibt, mit:*

$$y \in A \Leftrightarrow \phi(y)$$

bzw.

$$y \in A \Leftrightarrow \phi(y, a).$$

A heißt Δ_n^1 *bzw.* $\Delta_n^1[a]$, *falls A sowohl* Σ_n^1 *als auch* Π_n^1 *bzw. sowohl* $\Sigma_n^1[a]$ *als auch* $\Pi_n^1[a]$ *ist.*

Satz 3.9 *Es gilt:*

$$\mathbf{\Sigma}_1^1 = \bigcup_{(a \in \mathcal{N})} \Sigma_1^1[a].$$

Beweis:
Sei $A \subseteq {}^\omega\omega$, $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1$. Dann existiert nach (3.4) ein Baum T auf ω^2 mit $A = p([T])$, d.h. $y \in A \leftrightarrow \exists z \in {}^\omega\omega\ \forall n \in \omega\ (z_{\upharpoonright n}, y_{\upharpoonright n}) \in T$. Da sich T arithmetisch durch eine reelle Zahl a codieren lässt, existiert eine arithmetische Formel ϕ, so dass gilt: $\forall n \in \omega\ (z_{\upharpoonright n}, y_{\upharpoonright n}) \in T \leftrightarrow \forall n \in \omega\ \phi(z_{\upharpoonright n}, y_{\upharpoonright n}, a_{\upharpoonright n})$.
Gilt umgekehrt $A \in \Sigma_1^1[a]$ für ein $a \in {}^\omega\omega$, dann gilt $y \in A \leftrightarrow \exists z \in {}^\omega\omega\ \forall n \in \omega\ \phi(z_{\upharpoonright n}, y_{\upharpoonright n}, a_{\upharpoonright n})$. Somit gilt für $T := \{\vec{t} \in ({}^{<\omega}\omega)^3 : dom(t_1) = dom(t_2) = dom(t_3) \wedge \forall n \in dom(t_1)\ \phi(\vec{t}_{\upharpoonright n})\}$, dass A gerade die Projektion von $[T]$ ist. Also gilt $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1$. □

Erinnert man sich daran, dass die projektive Hierarchie gerade durch Projektionsbildung über $\mathcal{N}$ und über Komplementbildung definiert wurde, so sieht man nun leicht, dass

$$\mathbf{\Sigma}^1_n = \bigcup_{(a \in \mathcal{N})} \Sigma^1_n[a] \quad \text{und} \quad \mathbf{\Pi}^1_n = \bigcup_{(a \in \mathcal{N})} \Pi^1_n[a]$$

für alle $n \in \omega$ gilt.

3.2 Regularitätseigenschaften

I. Die Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft

Die Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft wird die für uns im Folgenden wichtigste Regularitätseigenschaft sein.

Definition 3.10 *Eine Menge $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ heißt perfekt, wenn sie nicht leer und abgeschlossen ist und keine isolierten Punkte besitzt. Letzteres besagt, dass für jedes $x \in A$ für alle basisoffenen Umgebungen $\mathcal{U}_s$ mit $x \in \mathcal{U}_s$ gilt: $\mathcal{U}_s \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.*

Ebenso wie die abgeschlossenen Mengen können auch die perfekten Mengen durch Bäume auf ω charakterisiert werden.
Wir nennen einen Baum T perfekt, wenn $T \neq \emptyset$ ist und für alle $s \in T$ zwei inkompatible Erweiterungen in T existieren, d.h. $r, t \in T$ mit $s = r_{\upharpoonright dom(s)} = t_{\upharpoonright dom(s)}$ aber $r_{\upharpoonright (dom(r) \cap dom(t))} \neq t_{\upharpoonright (dom(r) \cap dom(t))}$.
Damit lässt sich leicht zeigen:

$A \subseteq {}^{\omega}\omega$ ist perfekt $\Leftrightarrow$ es existiert ein perfekter Baum T auf ω mit $A = [T]$.

Definition 3.11 *Eine Menge $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ hat die Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft, wenn sie abzählbar ist oder eine perfekte Teilmenge enthält.*

Das Interesse an der Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft wurde vor allem im Zusammenhang mit der Kontinuums-Hypothese geweckt. Denn da jede perfekte Menge schon gleichmächtig zu den reellen Zahlen ist, erhoffte man sich CH dadurch beweisen zu können, indem man zeigen würde, dass jede überabzählbare Menge reeller Zahlen bereits eine perfekte Teilmenge enthält.
Für $\Gamma \subseteq P({}^{\omega}\omega)$ definieren wir Γ-PSP als das Axiomenschema, welches besagt, dass jede Menge aus Γ die Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft hat.

II. Lebesgue-Messbarkeit

Im folgenden sei X eine Menge.
Eine Mengenalgebra auf X ist definiert wie eine σ-Algebra auf X, nur dass diese nicht mehr unter abzählbaren Vereinigungen (und Schnitten), sondern nur unter endlichen Vereinigungen (und Schnitten) abgeschlossen ist.

Definition 3.12 *Sei $\Theta \subset P(X)$ mit $\emptyset \in \Theta$. Sei $\mu : \Theta \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung mit*

- $\mu(A) \geq 0$ *für alle* $A \in \Theta$,
- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\mu(\sum_{n\in\omega} A_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(A_n)$ *für jede Folge* $(A_n)_{n\in\omega}$ *in* Θ *mit* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$ *und* $\sum_{n\in\omega} A_n \in \Theta$.

Ist Θ eine Mengenalgebra, so heißt μ ein Prämaß auf Θ. Ist Θ eine σ-Algebra, so heißt μ ein Maß auf Θ.

Satz 3.13 *Sei A eine Mengenalgebra auf X und sei μ ein σ-endliches Prämaß auf A (d.h. es existiert eine Folge $(A_n)_{n\in\omega}$ in A mit $\bigcup_{n\in\omega} A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \omega$).*
Dann gibt es genau ein Maß $\tilde{\mu}$ auf der von A erzeugten σ-Algebra $\sigma(A)$ mit $\tilde{\mu}_{\restriction A} = \mu$; dieses Maß ist ebenfalls σ-endlich.

Satz 3.14 *Sei S eine σ-Algebra auf X und μ ein Maß auf S. Sei*

$$S_\mu := \{B \cup M : B \in S \wedge M \in P(X) \wedge \exists N \in S\ (\mu(N) = 0 \wedge M \subseteq N)\}.$$

Dann ist S_μ eine σ-Algebra auf X mit $S \subseteq S_\mu$. Ferner existiert genau eine Fortsetzung von μ zu einem Maß $\tilde{\mu}$ auf S_μ, nämlich genau das durch

$$\tilde{\mu}(C) = \mu(B),\ \text{falls } C = B \cup M \in S_\mu$$

definierte. S_μ heißt die bzgl. μ vervollständigte σ-Algebra, die Elemente aus S_μ heißen μ-messbar.

Die Beweise dieser Sätze können beispielsweise in [Schmitz] oder [Kohnen] nachgelesen werden.

Damit können wir nun die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen und das Lebesgue-Maß definieren. Dazu beziehen wir uns in diesem Fall auf den Cantor-Raum, da dieser für die folgenden Betrachtungen bzgl. des Lebesgue-Maßes in Kapitel 5 zu Grunde gelegt wird.

Sei A die durch die basisoffenen Mengen erzeugte Mengenalgebra auf ${}^{\omega}2$.

Dann können wir auf A ein Prämaß $\tilde{\mu}$ definieren durch

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mu}(\emptyset) = 0,\\
&\tilde{\mu}(\mathcal{U}_s) = \tfrac{1}{2^{dom(s)}} \text{ für } s \in {}^{<\omega}2,\\
&\tilde{\mu}(\bigcup_{n \leq k} C_n) = \sum_{n \leq k} \mu(C_n) \text{ falls } C_n \in A,\ C_i \cap C_j = \emptyset \text{ für } n, i, j \leq k,\\
&\tilde{\mu}({}^\omega\omega \setminus C) = 1 - \tilde{\mu}(C) \text{ für } C \in A.
\end{aligned}$$

Nach Satz (3.13) lässt sich $\tilde{\mu}$ zu einem eindeutigen σ-endlichen Maß auf der durch A erzeugten σ-Algebra auf ${}^\omega 2$, welche gerade die σ-Algebra der Borel-Mengen ist, erweitern. Dieses Maß nennen wir das Borel-Lebesgue-Maß.
Mit Satz (3.14) können wir nun die Menge der Lebesgue-messbaren Mengen als die bzgl. des Borel-Lebesgue-Maßes vervollständigte σ-Algebra auf ${}^\omega 2$ sowie das Lebesgue-Maß als das zugehörige erweiterte Maß auf dieser definieren[3].

Für $\Gamma \subseteq P({}^\omega\omega)$ definieren wir Γ-LM als das Axiomenschema, welches besagt, dass jede Menge aus Γ Lebesgue-messbar ist.

III. Die Bairesche Eigenschaft

Obwohl wir uns mit der Baireschen Eigenschaft im Folgenden nicht näher beschäftigen, werden wir sie der Vollständigkeit halber an dieser Stelle definieren.

Definition 3.15 *Eine Menge $A \subseteq {}^\omega\omega$ heißt nirgends dicht, wenn ihr Komplement eine dichte offene Teilmenge enthält.*
Eine Menge $A \subseteq {}^\omega\omega$ heißt mager, wenn sie abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist.

Für Mengen A und B sei $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die *symmetrische Differenz.*

Definition 3.16 *Eine Menge $A \subseteq {}^\omega\omega$ hat die Bairesche Eigenschaft, wenn es eine offene Menge $G \subseteq {}^\omega\omega$ gibt, so dass $A \triangle G$ mager ist.*

Die Mengen mit der Baireschen Eigenschaft bilden eine σ-Algebra und da jede offene Menge die Bairesche Eigenschaft besitzt folgt, dass insbesondere jede Borelmengen die Bairesche Eigenschaft hat.

Magere Mengen spielen in Bezug auf die Bairesche Eigenschaft eine ähnliche Rolle wie die Nullmengen in Bezug auf Lebesgue-Messbarkeit. (Vgl.

[3] Führen wir diese Konstruktion im Baireschen Raum aus, so ist das so definierte Maß nicht normiert. Dies bereitet jedoch keine Schwierigkeiten, da es σ-endlich ist und man daher zu einem endlichen, normiertem Maß übergehen kann (vgl. [Schmitz]).

hierzu beispielsweise die entsprechenden Kapitel in [Jech].) Dennoch, obwohl sowohl "mager" als auch "vom Maß Null" in gewisser Weise "vernachlässigbar" bedeuten, lässt sich zeigen, dass sich die Menge der reellen Zahlen in eine magere Menge und in eine Nullmenge zerlegen lässt.

Für $\Gamma \subseteq P({}^{\omega}\omega)$ definieren wir Γ-BP als das Axiomenschema, welches besagt, dass jede Menge aus Γ die Bairesche Eigenschaft besitzt.

IV. Regularitätseigenschaften und projektive Mengen

Nachdem wir nun die Axiomenschemata Γ-PSP, Γ-LM und Γ-BP definiert haben, stellt sich die Frage, für welche Mengen Γ diese in ZFC bewiesen werden können.
Es gilt folgender Satz:

Satz 3.17 *Sei $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ analytisch. Dann gilt*

i) A hat die Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft.

ii) A ist Lebesgue-messbar.

iii) A hat die Bairesche Eigenschaft.

Da mit jeder Menge $A \subseteq {}^{\omega}\omega$, welche Lebesgue-messbar ist bzw. welche die Bairesche Eigenschaft besitzt, auch deren Komplement die entsprechende Regularitätseigenschaft hat, folgt aus Satz (3.17) insbesondere auch $\mathbf{\Pi}^1_1$-LM und $\mathbf{\Pi}^1_1$-BP.
Den Beweis von $\mathbf{\Sigma}^1_1$-PSP führen wir in $ZFC^- + V = HC$ in Abschnitt (4.1). Die Beweise von $\mathbf{\Sigma}^1_1$-LM und $\mathbf{\Sigma}^1_1$-BP verlaufen analog zueinander und können beispielsweise in [Jech] nachgelesen werden.

Da L ein Modell von ZFC ist, zeigt der folgende Satz, dass diese Ergebnisse in ZFC schon die bestmöglichen sind.

Satz 3.18 *Gelte $V = L$. Dann existiert eine $\mathbf{\Delta}^1_2$ Menge, welche nicht Lebesgue-messbar ist und nicht die Bairesche Eigenschaft besitzt. Ferner existiert eine überabzählbare $\mathbf{\Pi}^1_1$ Menge, welche keine perfekte Teilmenge besitzt.*

Auch bei diesem Satz werden wir exemplarisch den Beweis für $\neg\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP führen, jedoch nicht unter der Annahme $V = L$ sondern für den Fall $V = L[x]$ (mit einer reellen Zahl x) und wieder in $ZFC^- + V = HC$ (vgl. (4.2)). Dazu konstruieren wir eine in $L[x]$ überabzählbare $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Menge $\mathcal{C}^x$ (bzw. Klasse, da wir in $ZFC^- + V = HC$ arbeiten) ohne perfekte Teilmenge (Teilklasse) und zeigen, dass aus $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP schon $\mathbf{\Sigma}^1_2$-PSP folgt. Die Klasse $\mathcal{C}^x$ werden wir später in Abschnitt (4.3) für eine Charakterisierung von $\Pi^1_1[x]$-PSP nutzen.

Sei *volle topologische Regularität* das Axiomenschema, welches besagt, dass jede projektive Klasse reeller Zahlen Lebesgue-messbar ist, die Bairesche Eigenschaft besitzt und, falls sie überabzählbar ist, eine perfekte Teilklasse enthält. Dann gilt mit Satz (3.18), dass $ZFC + \neg$*volle topologische Regularität* relativ konsistent zu ZFC ist und es stellt sich die Frage, ob auch die relative Konsistenz von $ZFC+$*volle topologische Regularität* zu ZFC gezeigt werden kann.
R. M. Solovay [Solovay] bewies mit Hilfe von Forcing, dass $ZFC+$*volle topologische Regularität* relativ konsistent zu $ZFC+$*es existiert eine unerreichbare Kardinalzahl* ist[4]. Jedoch gilt nach einem Resultat von S. Shelah [Shelah], dass es dabei nicht möglich ist, auf die unerreichbare Kardinalzahl zu verzichten und dieses Ergebnis somit zu einer relativen Konsistenzaussage bzgl. ZFC zu verbessern.
In Anlehnung an Solovays Ideen kann aber eine weitere relative Konsistenzaussage gemacht werden, welche für uns von besonderem Interesse ist, da sie insbesondere die "Umkehrung" unserer in Kapitel 6 bewiesenen Resultate impliziert: Ist ZFC konsistent, so ist auch $ZFC^- + V = HC +$*volle topologische Regularität* bzw. $SOA+$*volle topologische Regularität* konsistent.
Dieses Resultat aus [Möllerfeld/Koepke] wird in der Diplomarbeit von Daniel Busche [Busche] ausgeführt und beruht auf einem Klassenforcing, bei welchem nicht eine unerreichbare Kardinalzahl (wie bei Solovay) kollabiert wird, sondern die gesamte Klasse aller Ordinalzahlen.

Abschließend sei an dieser Stelle angemerkt, dass das Auswahlaxiom die Existenz einer Menge reeller Zahlen liefert, welche keiner der drei Regularitätseigenschaften genügt[5]

3.3 Borel-Codes

In diesem Abschnitt definieren wir eine Codierung von Borelmengen durch Elemente des Baireschen Raumes. Arbeiten wir in $ZFC^- + V = HC$, so sind Borelmengen im Allgemeinen echte Klassen und Borel-Codes bietet somit eine Möglichkeit, diese Klassen durch Mengen zu repräsentieren. Damit lässt sich dann beispielsweise in gewohnter Weise die Borel-Hierarchie definieren, was sonst zu Schwierigkeiten führen würde, da man dazu Klassen von Klassen bilden müsste.
Der Leser, der an einer genaueren Darstellung der hier skizzierten Beweis-

[4]Dabei kann *volle topologische Regularität* sogar durch die stärkere Annahme, dass jede mit einem Parameter aus ${}^{\omega}OR$ definierbare Menge reeller Zahlen allen drei Regularitätseigenschaften genügt, ersetzt werden.

[5]Dennoch ergibt sich aus einer Erweiterung des Beweises der oben zitierten Ergebnisse von Solovay, dass auch die Annahme, dass jede beliebige Menge reeller Zahlen allen drei Regularitätseigenschaften genügt $+(DC) + ZF$ relativ konsistent zu $ZFC+$*es existiert eine unerreichbare Kardinalzahl* ist.

ideen interessiert ist, sei auf das Buch von [Jech] verwiesen, an dem sich folgende Ausführungen orientieren.

Definition 3.19 *Sei $s_1,\ s_2,\ ...,\ s_k, ...$ eine rekursive Aufzählung der Elemente aus ${}^{<\omega}\omega$. Für $c \in {}^{\omega}\omega$ seien $u(c),\ v_i(c) \in {}^{\omega}\omega$ definiert durch*

$$u(c)(n) = c(n+1) \quad \text{und} \quad v_i(c)(n) = c(\Gamma(i,n)+1)$$

für $n \in \omega$, wobei Γ die kanonische Bijektion von ${}^{\omega}\omega \times {}^{\omega}\omega$ auf ${}^{\omega}\omega$ sei.
Für $\alpha \in \omega_1$ definieren wir nun die Mengen Σ_α und Π_α durch

$$\begin{array}{ll} c \in \Sigma_1 & falls\ c(0) > 1; \\ c \in \Pi_\alpha & falls\ entweder\ c \in \Sigma_\beta \cup \Pi_\beta\ mit\ \beta < \alpha \\ & oder\ c(0) = 0\ und\ u(c) \in \Sigma_\alpha; \\ c \in \Sigma_\alpha\ (\alpha > 1) & falls\ entweder\ c \in \Sigma_\beta \cup \Pi_\beta\ mit\ \beta < \alpha \\ & oder\ c(0) = 1\ und\ v_i(c) \in \bigcup_{\beta<\alpha}(\Sigma_\beta \cup \Pi_\beta)\ fuer\ alle\ i. \end{array}$$

Ist $c \in \Sigma_\alpha$ bzw. $c \in \Pi_\alpha$, so nennen wir c einen $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-Code bzw. einen $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$-Code. Schließlich definieren wir die Menge der Borel-Codes BC als

$$BC = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Sigma_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \Pi_\alpha.$$

Für jedes $c \in BC$ definieren wir eine Borelmenge A_c wie folgt:

$$\begin{array}{ll} ist\ c \in \Sigma_1 & dann\ sei\ A_c = \bigcup\{\mathcal{U}_{(s_n)} : c(n) = 1\}; \\ ist\ c \in \Pi_\alpha\ und\ c(0) = 0 & dann\ sei\ A_c = {}^{\omega}\omega \setminus A_{u(c)}; \\ ist\ c \in \Sigma_\alpha\ und\ c(0) = 1 & dann\ sei\ A_c = \bigcup_{i\in\omega} A_{v_i(c)}. \end{array}$$

Mit dieser Definition eines Borel-Codes wird also nicht nur die codierte Borelmenge, sondern auch in recht anschaulicher Weise deren Konstruktion durch Vereinigungs- und Komplementbildung aus den basisoffenen Mengen beschrieben.
Mit Induktion nach α zeigt man leicht, dass

$$c \in \Sigma_\alpha \leftrightarrow A_c \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$$

bzw.

$$c \in \Pi_\alpha \leftrightarrow A_c \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha$$

für jedes $\alpha \in \omega_1$ gilt.

Lemma 3.20 *Die Menge BC aller Borel-Codes ist Π^1_1.*

Beweisidee:
Man definiert eine arithmetische Relation E auf ${}^{\omega}\omega$ durch

$$x \; E \; y \leftrightarrow (y(0) = 0 \wedge x = u(y)) \;\vee\; \exists i \in \omega \; (y(0) = 1 \wedge x = v_i(y)).$$

und zeigt:

$$\begin{aligned} y \in BC &\leftrightarrow E \text{ ist unterhalb von } y \text{ fundiert} \\ &\leftrightarrow \text{es gibt kein } \langle z_0, z_1, ..., z_n, ...\rangle \text{ mit } z_0 = y \text{ so dass gilt } \forall n (z_{n+1} \; {}_E \; z_n). \end{aligned}$$

Dabei folgt "$\rightarrow$" direkt aus der Definition von E und "$\leftarrow$" ergibt sich aus einer Induktion nach der Rang-Funktion auf $ext_E(y) = \{z \in {}^\omega\omega : z \; E \; y\}$, welche zeigt, dass alle $z \in ext_E(y)$ und schließlich auch y selbst Borel-Codes sind. □

Lemma 3.21 *Es gibt ein Π^1_1 Prädikat P und ein Σ^1_1 Prädikat Q auf ${}^\omega\omega \times {}^\omega\omega$, so dass für jeden Borel-Code c und für jedes $a \in {}^\omega\omega$ gilt:*

$$a \in A_c \leftrightarrow (a, c) \in P \leftrightarrow (a, c) \in Q.$$

Beweisidee:
Für festes $c \in {}^\omega\omega$ definiert man T als die kleinste Teilmenge von ${}^\omega\omega$, welche c enthält und mit jedem ihrer Elemente y auch jedes z mit $z \; E \; y$. T ist eindeutig und enthält gerade die Codes aller Borelmengen, welche zur Konstruktion der durch c codierten Borelmenge benötigt werden. Da dies offensichtlich nur abzählbar viele sein können, ist somit auch T höchstens abzählbar.
Des Weiteren kann man eine Bedingungen angeben, so dass jede Funktion $h : T \to \{0, 1\}$, welche diese erfüllt, die Eigenschaft hat, dass für jedes $y \in T$ $h(y)$ genau dann den Wert 1 annimmt, wenn $a \in A_y$ gilt. Eine solche Bedingung kann wie folgt definiert werden:

$$\forall y \in T : \; h(y) = 1 \leftrightarrow \begin{array}{l} (y(0) > 0 \wedge \exists n \in \omega \; (y(n) = 1 \wedge a \in \mathcal{U}_{(s_n)})) \\ \vee (y(0) = 0 \wedge h(u(y)) = 0) \\ \vee (y(0) = 1 \wedge \exists i \in \omega \; h(v_i(y)) = 1). \end{array} \tag{1}$$

Da ein h, welches diese Bedingung erfüllt, eindeutig sein muss, lassen sich nun P und Q definieren:

$(a, c) \in P \leftrightarrow (\forall T \subseteq {}^\omega\omega)(\forall h : T \to \{0, 1\})$:
Genügt T entsprechenden obigen Definitionsbedingungen und genügt h der Bedingung (1), so gilt $h(c) = 1$.

$(a, c) \in Q \leftrightarrow (\exists T \subseteq {}^\omega\omega)(\exists h : T \to \{0, 1\})$:
Genügt T entsprechenden obigen Definitionsbedingungen und genügt h der Bedingung (1), so gilt $h(c) = 1$.

Es ist klar, dass für $c \in BC$ und für jedes $a \in {}^{\omega}\omega$ gilt:

$$a \in A_c \leftrightarrow (a,c) \in P \leftrightarrow (a,c) \in Q.$$

Damit bleibt nur noch die Komplexität der Prädikate P und Q festzustellen. Diese ergibt sich jedoch daraus, dass nur die Quantoren über T und h echt über Elemente des Baireschen Raumes quantifizieren und wir erhalten wie gewünscht, dass P eine Π^1_1 und Q eine Σ^1_1 Relation darstellen. □

Mit Lemma (3.21) erhält man unmittelbar, dass auch die Eigenschaften $A_c \subseteq A_d,\ A_c = A_d$ und $A_c = \emptyset \quad \Pi^1_1$ sind. Beispielsweise gilt:
$A_c \subseteq A_d \leftrightarrow c,d \in BC \wedge \forall a((a,c) \in P \rightarrow (a,d) \in P)$.

Aufgrund von Shoenfield-Absolutheit (vgl. Satz (6.7)) gilt somit, dass alle bisher betrachteten Π^1_1-Eigenschaften absolut sind für $L[a]$ bzw. für transitive Modelle, in welchen ebenfalls genügend starke Axiome gelten. Aus der Absolutheit von $a \in A_c$ erhalten wir dabei außerdem, dass $A_c^M = A_c \cap M$ für jedes solche Modell M gilt.
Da man mit Hilfe der einzelnen Codes c_n einer Folge von Borelmengen A_{c_n} bzw. aus dem Code c einer Borelmenge A_c in offensichtlicher Weise einen Code für die Borelmenge $\bigcup_{n\in\omega} A_{c_n}$ bzw. die Borelmenge ${}^{\omega}\omega \setminus A_c$ angeben kann und aufgrund der Absolutheit von $A_c = A_d$ folgt ferner die Absolutheit folgender Eigenschaften:

$$A_e = A_c \cup A_d,\ A_e = A_c \cap A_d,\ A_e = {}^{\omega}\omega \setminus A_c,\ A_e = A_e \triangle A_d,\ A_e = \bigcup_{n\in\omega} A_{c_n}.$$

3.4 Deskriptive Mengenlehre in ZFC$^-$+V=HC bzw. in SOA

In $ZFC^- + V = HC$ können reelle Zahlen wie in ZFC definiert werden. Jedoch ist der Bairesche Raum keine Menge mehr, sondern eine echte Klasse, da er überabzählbar ist. Ebenso müssen Teilklassen von $\mathcal{N}$ keine Mengen mehr sein. Wir werden daher in $ZFC^- + V = HC$ von abgeschlossenen und offenen Klassen bzw. von Borelklassen, analytischen Klassen, projektiven Klassen, $\mathbf{\Pi}^1_1$-Klassen etc. sprechen.
Bereits die in ZFC definierten basisoffenen Mengen sind in $ZFC^- + V = HC$ keine Mengen mehr, da jedes $\mathcal{U}_s$ überabzählbar ist. Dies bereitet jedoch wenig Schwierigkeiten, da sich die $\mathcal{U}_s$ wegen $x \in \mathcal{U}_s \leftrightarrow x_{\upharpoonright dom(s)} = s$ als Klassen definieren lassen. Ebenso kanonisch nennen wir eine Klasse O offen, falls eine Menge $A \subseteq {}^{<\omega}\omega$ (A ist immer abzählbar) existiert mit $x \in O \leftrightarrow \exists s \in A\ x_{\upharpoonright dom(s)} = s$.
Versuchen wir nun analog wie in ZFC die Borelmengen durch die Borel-Hierarchie oder als die kleinste σ-Algebra, welche alle offenen Klassen enthält, zu definieren, so stoßen wir zunächst auf Schwierigkeiten. Denn da wir keine

Klassen von Klassen bilden können, lassen sich im Allgemeinen auch keine Klassen-Analoga für Mengen von Teilmengen reeller Zahlen wie zum Beispiel die Menge der Borelmengen oder die Menge der $\mathbf{\Sigma}^1_8$-Mengen definieren.
Erinnern wir uns an die im letzten Abschnitt definierten Borel-Codes, so können wir uns jedoch im Fall der Menge der Borelmengen sowie den Mengen der $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$- bzw. $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$-Mengen wie folgt behelfen: Anstelle der Menge der Borelmengen betrachten wir die Klasse BC der Borel-Codes, die, wie wir bereits gesehen haben, Π^1_1-definierbar ist. Ebenso reden wir nicht mehr von den Mengen der $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$-, bzw. $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$- Mengen, sondern von den Klassen der Σ_α-, Π_α- bzw. Δ_α- Codes. Schließlich sagen wir, dass eine Klasse C Borel oder $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ bzw. $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ ist, falls es einen entsprechenden Borel-Code c gibt mit $x \in C \leftrightarrow x \in A_c$.
Da wir das Hilfsmittel der Borel-Codes bei den projektiven Mengen nicht mehr zur Verfügung haben, verzichten wir hier auf Klassenanaloga für die Menge der projektiven Mengen oder die Mengen der $\mathbf{\Sigma}^1_n$-, $\mathbf{\Pi}^1_n$- bzw. $\mathbf{\Delta}^1_n$-Mengen. Solche werden im Folgenden auch nicht benötig, denn es wird genügen, dass wir mit Hilfe der Lightface-Hierarchie ohne Schwierigkeiten $\mathbf{\Sigma}^1_n$-, $\mathbf{\Pi}^1_n$- bzw. $\mathbf{\Delta}^1_n$- Klassen definieren können: Ist a eine reelle Zahl, so nennen wir eine Klasse C $\Sigma^1_n[a]$, $\Pi^1_n[a]$ bzw. $\Delta^1_n[a]$, wenn sich C durch eine Σ^1_n-, Π^1_n- bzw. Δ^1_n-Formel mit dem Parameter a definieren lässt. Ferner nennen wir eine Klasse C $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$ bzw. $\mathbf{\Delta}^1_n$, wenn es ein $a \in {}^\omega\omega$ gibt, so dass C $\Sigma^1_n[a]$, $\Pi^1_n[a]$ bzw. $\Delta^1_n[a]$ ist.
Auch die Regularitätseigenschaften lassen sich für Klassen definieren. Im Falle der Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft ist dies unmittelbar klar, da sich die Definition einer perfekten Menge bzw. einer perfekten Teilmenge ohne Schwierigkeiten auf Klassen übertragen lässt. Beispielsweise kann man eine Klasse C als perfekt bezeichnen, wenn es einen perfekten Baum T auf ω (dieser ist als Teilmenge von ${}^{<\omega}\omega$ immer eine Menge) gibt mit $x \in C \leftrightarrow x \in [T]$. Falls für ein solches T gilt $x \in [T] \rightarrow x \in C$, so sagen wir, dass die Klasse C eine perfekte Teilklasse enthält.
Bei der Definition der Lebesgue-Messbarkeit und des Lebesgue-Maßes für Klassen ist die oben beschriebene Darstellung der "Klasse aller Borelklassen" als Klasse aller Borelcodes, also BC, sehr hilfreich. Denn mit diesem Trick kann man wie gewohnt zunächst ein Prämaß, diesmal auf den entsprechenden Codes, definieren und dieses dann auf die Klasse BC erweitern. Dies ist möglich, da BC eine Art "σ-Algebra der Borelmengen" (welche ja in dieser Form nicht existieren kann) repräsentiert. Das Borel-Lebesgue-Maß einer Borelklasse ergibt sich dann aus dem des entsprechenden Borel-Codes. Anschließend definiert man für eine Klasse C Lebesgue-messbar zu sein, wenn es Borel-Codes c_1 und c_2 gibt, wobei c_2 das Maß Null zugeordnet sei, mit $x \in C \rightarrow x \in A_{c_1} \vee x \in A_{c_2}$ und $x \in A_{c_1} \rightarrow x \in C$. Das Lebesgue-Maß einer solchen Klasse stimmt dann mit dem des c_1 zugehörigen überein.
Auch die Bairesche Eigenschaft lässt sich ohne Schwierigkeiten für Klassen definieren. Da diese aber im Folgenden für uns keine Rolle mehr spielen wird,

verzichten wir an dieser Stelle auf ausführlichere Beschreibungen.
Mit den Axiomenschemata Γ-PSP, Γ-LM und Γ-BP bezeichnen wir in ZFC^- $+V = HC$ die Aussage, dass die entsprechende Regularitätseigenschaft für jede Γ-Klasse reeller Zahlen gilt. Hierbei bezeichne Γ nun nicht mehr eine Menge von Teilmengen des Baireschen Raumes, sondern lediglich eines der Symbole $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha,\ \mathbf{\Pi}^0_\alpha,\ \mathbf{\Delta}^0_\alpha$ bzw. $\mathbf{\Sigma}^1_n,\ \mathbf{\Pi}^1_n,\ \mathbf{\Delta}^1_n$.

Wie bereits in 3.1 beschrieben, verwendet man in ZFC mehrere äquivalente Charakterisierungen analytischer Mengen. Nach unserer Definition über die Formelkomplexität der definierenden Formel sind die analytischen Klassen gerade die, die sich über eine Σ^1_1-Formel mit einem reellen Parameter definieren lassen. Da der zweite Teil des Beweises von Satz (3.9) ebenso in $ZFC^- + V = HC$ gilt, erhalten wir zunächst, dass sich analytische Klassen als Projektionen abgeschlossener Klassen (repräsentiert durch Bäume) darstellen lassen. Wir werden im Folgenden des Weiteren insbesondere die Charakterisierung analytischer Klassen als stetiges Bild des gesamten Baireschen Raumes verwenden und wollen diese daher hier kurz in $ZFC^- + V = HC$ beweisen.

Lemma 3.22 *In $ZFC^- + V = HC$ gilt:*
Sei A eine analytische Klasse. Dann existiert eine stetige Funktion f, die eine echte Klasse ist, so dass $A = f[{}^\omega\omega]$ gilt.

Beweis:
Wir zeigen die Aussage zunächst für eine abgeschlossene Klasse C.
Sei T ein Baum auf ω mit $C = [T]$. (Diese Charakterisierung abgeschlossener Klassen gilt offenbar auch in $ZFC^- + V = HC$. Ferner ist T als Teilmenge von ${}^{<\omega}\omega$ abzählbar und daher eine Menge.) O.B.d.A. existiere für jedes $s \in T$ ein $t \in T$ mit $s \subset t$ und $dom(t) > dom(s)$.
Wir benötigen im Folgenden die Kleene-Brouwer-Ordnung $\leq^{KB}$ auf T, welche für $s, t \in T$ definiert ist durch $s \leq^{KB} t :\leftrightarrow t \subseteq s \vee (\exists n < dom(s))[s_{\upharpoonright n} = t_{\upharpoonright n} \wedge s(n) < t(n)]$).
Sei nun $\overline{f} : {}^{<\omega}\omega \to T$ induktiv definiert durch:
$\overline{f}(s) = s$, falls $s \in T$ und $\overline{f}(s) = t$, falls gilt: $t \in T$ und $dom(t) = dom(s)$ und für alle $n \in dom(s)$ gilt $f(s_{\upharpoonright n}) \subseteq t$ und t ist bzgl. der Kleene-Brouwer-Ordnung $\leq^{KB}$ auf T das kleinste solche t.
$\overline{f}$ ist offensichtlich abzählbar und daher eine Menge.
Definiere nun die Klasse f durch

$$(x, y) \in f :\leftrightarrow x, y \in {}^\omega\omega \wedge \forall n \in \omega\ (x_{\upharpoonright n}, y_{\upharpoonright n}) \in \overline{f}.$$

Dann sieht man leicht, dass $C = f[{}^\omega\omega]$ gilt und da $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ für alle $x, y \in {}^\omega\omega$ gilt, auch, dass f stetig ist.
Ist nun A analytisch, dann gibt es einen Baum T auf $\omega\times\omega$, so dass $A = p([T])$ gilt, mit anderen Worten, A ist die Projektion einer abgeschlossenen Klasse

$[T]$. Sei $\varphi : {}^\omega\omega \to {}^\omega\omega \times {}^\omega\omega$ der kanonische Homöomrphismus und g eine nach obigem Beweis existierende stetige Funktion mit $g[{}^\omega\omega] = C$, wobei $C = \varphi^{-1}[[T]]$ sei. Dann lässt sich $f = p \circ \varphi \circ g$ als Klasse definieren:

$$(x, y) \in f :\leftrightarrow x, y \in {}^\omega\omega \wedge \exists z_1\ \exists z_2\ (x, z_1) \in g \wedge \varphi(z_1) = (z_2, y).$$

Offensichtlich ist f stetig und leistet das Gewünschte, da $f[{}^\omega\omega] = A$ gilt. □

In SOA können wir die Definitionen aus $ZFC^- + V = HC$ übernehmen, da nach Abschnitt (2.2) ein SOA-Modell immer als der analytische Teil eines $ZFC^- + V = HC$-Modells aufgefasst werden kann.
Reelle Zahlen fasst man dabei auf natürlichste Weise als Teilmengen natürlicher Zahlen, also gerade als die zweitstufigen Objekte auf. Denn wenn wir ein SOA Modell $\mathcal{U}$ immer als analytischen Teil $\mathcal{U}^{\mathcal{M}^{\mathcal{U}}}$ des zugehörigen Baummodells $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ betrachten, ist dies deshalb besonders schön, da die in diesem Modell definierten reellen Zahlen dann genau die gleichen Objekte sind wie die im zugehörigen Baummodell definierten reellen Zahlen (auch hier als Teilmengen natürlicher Zahlen definiert).
Natürlich können wir auch in einem SOA Modell reelle Zahlen beispielsweise als Elemente des Baireschen Raumes definieren. Da diese dann aber Funktionen sind und daher über Teilmengen natürlicher Zahlen codiert werden müssen (in SOA gibt es keine Mengen zweitstufiger Objekte), sind diese in diesem Fall nicht identisch mit den im zugehörigen Baummodell als Elemente des Baireschen Raumes definierten Objekten.

Wir werden im Folgenden jedoch stets in $ZFC^- + V = HC$ und nicht in SOA arbeiten.

3.5 Eine Darstellung von $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$-Klassen als Projektionen von Bäumen

Folgender Abschnitt orientiert sich an [Jech].
Wir haben bereits gesehen[6], dass jede $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-Klasse die Projektion eines Baumes auf $\omega \times \omega$ ist. Eine ähnliche Charakterisierung werden wir nun für $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$-Klassen zeigen. Der zugehörige Baum ist in diesem Fall jedoch auf $\omega \times OR$ definiert und daher im Allgemeinen eine echte Klasse.
Wir arbeiten in $ZFC^- + V = HC$.

Satz 3.23 *Jede $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$-Klasse ist die Projektion eines (Klassen-)Baumes T auf $\omega \times OR$.*

[6] Vgl. zweiter Teil des Beweises von Satz (3.9) im Abschnitt über projektive Mengen, dieser ist auch in $ZFC^- + V = HC$ gültig

Beweis:
Sei $a \in {}^\omega\omega$ und sei $A \in \Sigma^1_2[a]$. Dann gilt

$$x \in A \leftrightarrow \exists y \in {}^\omega\omega\ \forall z \in {}^\omega\omega\ \exists n \in \omega\ \varphi(x_{\upharpoonright n}, y_{\upharpoonright n}, z_{\upharpoonright n}, a_{\upharpoonright n}).$$

Wir definieren einen Baum S auf ω^3 durch

$$S := \{(t_1, t_2, t_3) \in ({}^{<\omega}\omega)^3 : dom(t_1) = dom(t_2) = dom(t_3) \wedge$$
$$\forall n \in dom(t_1)\ \neg\varphi(t_{1\upharpoonright n}, t_{2\upharpoonright n}, t_{3\upharpoonright n}, a_{\upharpoonright n})\}.$$

Ferner definieren wir für $x, y \in {}^\omega\omega$

$$S_{(x,y)} := \{s \in {}^{<\omega}\omega : (x_{\upharpoonright dom(s)}, y_{\upharpoonright dom(s)}, s) \in S\}.$$

Dann erhalten wir

$$x \in A \leftrightarrow \exists y \in {}^\omega\omega\ S_{(x,y)} \text{ist fundiert}$$

$$\leftrightarrow \exists y \in {}^\omega\omega \exists f : S_{(x,y)} \to OR \text{ mit } [(s, t \in S_{(x,y)} \wedge t \subseteq s \wedge s \neq t) \to f(s) < f(t)],$$

wobei die zweite Äquivalenz gilt, da $S_{(x,y)}$ offensichtlich höchstens abzählbar verzweigt ist[7].
Wir definieren nun eine Klasse U, welche ein Baum auf $\omega \times \omega \times OR$ ist, so dass gilt

$$x \in A \leftrightarrow \exists y \in {}^\omega\omega\ \exists f : \omega \to OR\ \forall n\ (x_{\upharpoonright n}, y_{\upharpoonright n}, f_{\upharpoonright n}) \in U. \tag{2}$$

Sei $e : {}^{<\omega}\omega \to \omega$ eine Bijektion mit $e(s) \geq dom(s)$ für alle $s \in {}^{<\omega}\omega$.
Für $x, y \in {}^\omega\omega$ und für $s \subset x,\ t \subset y$ mit $dom(s) = dom(t)$ sei
$S_{(s,t)} = \{r \in S_{(x,y)} :\ dom(r) \leq dom(s)\}$. Wir definieren nun U wie folgt:

$$\begin{aligned}(s,t,g) \in U \leftrightarrow\ & s, t \in {}^{<\omega}\omega \wedge g \in {}^{<\omega}OR \wedge dom(s) = dom(t) = dom(g) \\ & \wedge [\exists f : S_{(s,t)} \to OR \\ & \quad \forall r, r' \in S_{(s,t)}\ [(r' \supseteq r \wedge r \neq r') \Rightarrow f(r') < f(r)] \wedge \\ & \quad \forall k \in dom(g) \\ & \quad [(e^{-1}(k) \in S_{(s,t)} \Rightarrow g(k) = f(e^{-1}(k)) \wedge \\ & \quad\ (e^{-1}(k) \notin S_{(s,t)} \Rightarrow g(k) = 0)]].\end{aligned}$$

Die Idee hierbei ist, dass g einen Code für das oben beschriebene
$f : S_{(s,t)} \to OR$ darstellt. Ein solches f nennen wir ordnungstreu.
Wir haben also:

[7] Da es nur abzählbare Ordinalzahlen gibt, kann ein (Klassen-)Baum, welcher überabzählbar oft verzweigt ist, durchaus fundiert sein ohne dass er eine Abbildung in die Ordinalzahlen mit der gewünschten Eigenschaft zulässt.

$$(s,t,g) \in U \leftrightarrow [s,t \in {}^{<\omega}\omega,\ dom(s) = dom(t) = dom(g) \text{ und } g \text{ codiert}$$
$$\text{ein ordnungstreues } f : S_{(s,t)} \to OR].$$

Wegen $e(s) \geq dom(s)$ für alle $s \in {}^{<\omega}\omega$ ist U ein Baum. Denn sei $(s,t,g) \in U$ und sei $f : S_{(s,t)} \to OR$ wie in der Definition von U. Seien $\tilde{s} = s_{\upharpoonright n}$, $\tilde{t} = t_{\upharpoonright n}$ und $\tilde{g} = g_{\upharpoonright n}$ für ein $n \leq dom(s)$. Dann ist $\tilde{f} := f_{\upharpoonright S_{(\tilde{s},\tilde{t})}}$ ein Zeuge dafür, dass $(\tilde{s},\tilde{t},\tilde{g}) \in U$ gilt. Denn $\tilde{f}$ ist offensichtlich ordnungstreu und es gilt für jedes $k \in dom(\tilde{g})$ wegen $dom(e^{-1}(k)) \leq k < n$:

$$e^{-1}(k) \in S_{(\tilde{s},\tilde{t})} \Leftrightarrow e^{-1}(k) \in S_{(s,t)}. \tag{3}$$

Damit folgt:

- Ist $e^{-1}(k) \in S_{(\tilde{s},\tilde{t})}$, so gilt $\tilde{g}(k) \overset{k \leq n}{=} g(k) \overset{(3)}{=} f(e^{-1}(k)) \overset{dom(e^{-1}(k))<n}{=} \tilde{f}(e^{-1}(k))$.
- Ist $e^{-1}(k) \notin S_{(\tilde{s},\tilde{t})}$, so gilt $\tilde{g}(k) \overset{k \leq n}{=} g(k) \overset{(3)}{=} 0$.

Zu zeigen bleibt, dass (2) gilt.
Gelte $x \in A$. Dann existiert ein $y \in {}^{\omega}\omega$ und ein ordnungstreues $f : S_{(x,y)} \to OR$. Somit bezeugt f', definiert durch

$$f'(k) = \begin{cases} f(e^{-1}(k)) & , \mathit{falls}\ e^{-1}(k) \in S_{(x,y)} \\ 0 & , \mathit{sonst}, \end{cases}$$

dass die rechte Seite von (2) gilt. Denn sei $n \in \omega$ beliebig. Für $k < n$ gilt dann wegen $dom(e^{-1}(k)) \leq k < n$ schon $e^{-1}(k) \in S_{(x_{\upharpoonright n}, y_{\upharpoonright n})} \leftrightarrow e^{-1}(k) \in S_{(x,y)}$, und es folgt daher, dass $f'_{\upharpoonright n}$ gerade der Code von $f_{\upharpoonright S_{(x_{\upharpoonright n}, y_{\upharpoonright n})}}$ ist. Somit gilt $(x_{\upharpoonright n}, y_{\upharpoonright n}, f'_{\upharpoonright n}) \in U$ für alle $n \in \omega$.
Gelte umgekehrt $\exists y \in {}^{\omega}\omega\ \exists g : \omega \to OR\ \forall n\ (x_{\upharpoonright n}, y_{\upharpoonright n}, g_{\upharpoonright n}) \in U$. Decodieren wir g mit Hilfe der Bijektion e, so erhalten wir offensichtlich eine Abbildung $f : S_{(x,y)} \to OR$, die ordnungstreu ist, d.h. es gilt, dass $S_{(x,y)}$ fundiert ist und damit folgt $x \in A$.

Nun transformieren wir U in einen Baum K auf $\omega \times (\omega \times OR)$, indem wir die Tripel

$$(\langle s(0), ...s(n-1)\rangle, \langle t(0), ..., t(n-1)\rangle, \langle g(0), ..., g(n-1)\rangle)$$

aus U durch Paare

$$(\langle s(0), ..., s(n-1)\rangle \langle (t(0), g(0)), ..., (t(n-1), g(n-1))\rangle)$$

ersetzen. Sei $l : OR \to \omega \times OR$ eine Bijektion. Wir definieren dann den Baum T auf $\omega \times OR$ durch

$$(s,f) \in T \leftrightarrow (s, l(f)) \in K$$

und erhalten mit (2)

$$x \in A \leftrightarrow \exists h : \omega \to \omega \times OR \ \forall n \ (x_{\uparrow n}, h_{\uparrow n}) \in K$$

$$\leftrightarrow \exists f : \omega \to OR \ \forall n (x_{\uparrow n,} f_{\uparrow n}) \in T. \ \Box$$

4 $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP

Das Hauptanliegen dieser Arbeit ist es, die Stärke einiger topologischer Regularitätsaxiome in Bezug auf SOA bzw. $ZFC^- + V = HC$ genauer zu untersuchen. Bevor wir damit beginnen, werden wir in diesem und im nächsten Kapitel einige Betrachtungen zu den konkreten Axiomenschemata, welche wir anschließend in Bezug auf ihre Stärke analysieren wollen, anstellen.
Zunächst interessieren uns die Axiomenschemata der Form Γ-PSP, also Regularitätsannahmen bezüglich der Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft. Nahe liegend sind dabei die folgenden Fragen:

- Für welche projektiven Klassen lässt sich das Schema der Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft in $ZFC^- + V = HC$ (bzw. in SOA) beweisen?

- Für welche projektiven Klassen lässt sich zeigen, dass das Schema der Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft aus den Axiomen von $ZFC^- + V = HC$ (bzw. SOA) nicht mehr gefolgert werden kann, d.h. bezüglich welcher bietet sich überhaupt eine axiomatische Erweiterung diesbezüglich an?

- Wie "sicher" sind mögliche Axiomenschemata bezüglich der Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft, d.h. inwieweit besteht die Gefahr, die (angenommene) Konsistenz von $ZFC^- + V = HC$ (bzw. SOA) durch eine Erweiterung um ein solches zu zerstören?

Die ersten beiden Fragen werden wir in den Abschnitten 4.1 und 4.2 erörtern. Dabei wird sich ergeben, dass $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP das schwächste Axiomenschema dieser Art ist, um welches wir $ZFC^- + V = HC$ (bzw. SOA) in sinnvoller Weise erweitern können. Obwohl dieses somit zunächst eher "unspektakulär" erscheint, werden wir in Kapitel 6 zeigen, dass es dennoch bereits von beachtlicher Stärke ist. Um diese Stärke zeigen zu können, werden wir auf eine der in Abschnitt 4.3 angegebenen Charakterisierungen von $\Pi^1_1[x]$-PSP ($x \in \mathcal{N}$) zurückgreifen.
Die letzte Frage lassen wir zunächst offen. Eine Antwort, die jedoch eine Fallunterscheidung beinhaltet, wird sich aber unmittelbar aus den Ergebnissen von Kapitel 6 ergeben (vgl. Satz (6.14)): Nehmen wir an, SOA bzw. $ZFC^- + V = HC$ sei konsistent. Ist ZFC ebenfalls konsistent, so ist auch jede Erweiterung von SOA bzw. $ZFC^- + V = HC$ um ein Axiomenschema der Form Γ-PSP konsistent. Ist ZFC nicht konsistent, so muss jede solche Erweiterung inkonsistent sein.

In diesem wie in den folgenden Kapiteln arbeiten wir, soweit nichts anderes gesagt wird, in $ZFC^- + V = HC$. Die Ergebnisse lassen sich damit gemäß Abschnitt 2.2 stets auf SOA übertragen.

4.1 Analytische Klassen und die Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft

In diesem Abschnitt werden wir $\mathbf{\Sigma}_1^1$-PSP beweisen. Da jede Borelklasse $\mathbf{\Sigma}_1^1$ ist, folgt daraus insbesondere, dass auch jede Borelklasse die Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft besitzt.

Satz 4.1 *Jede analytische Klasse ist entweder abzählbar oder besitzt eine perfekte Teilklasse.*

Um Satz (4.1) zu beweisen, benötigen wir folgendes Lemma

Lemma 4.2 *Sei $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ abgeschlossen und nicht leer. Sei T ein blattloser Baum mit $[T] = A$. Dann gilt:*

$$A \textit{ ist kompakt} \Leftrightarrow T \textit{ ist endlich verzweigt.}$$

Beweis:
"$\Rightarrow$": Sei A kompakt. Nehmen wir an, T sei nicht endlich verzweigt. Dann existiert ein $s \in T$ mit $|\{s^\frown\langle l\rangle : l \in \omega \wedge s^\frown\langle l\rangle \in T\}| = \aleph_0$. Wir definieren eine offene Überdeckung $\mathcal{O}$ von A durch

$$\mathcal{O} = \{\mathcal{U}_{s^\frown\langle l\rangle} : l \in \omega \wedge s^\frown\langle l\rangle \in T\} \cup \{\mathcal{U}_{x_{\upharpoonright dom(s)+1}} : x \in A \wedge x \notin \mathcal{U}_s\}.$$

Offensichtlich existiert keine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{O}$, welche A überdeckt und wir erhalten, dass A nicht kompakt gewesen sein kann.

"$\Leftarrow$":Sei T endlich verzweigt und sei $\mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von A. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass $\mathcal{O} = \{\mathcal{U}_s : s \in B\}$ für ein $B \subseteq T$ gilt. Nehmen wir an, dass es keine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{O}$ gibt.
Für $n \in \omega$ sei

$$\mathcal{O}_n = \{\mathcal{U}_s : s \in B \wedge dom(s) \leq n\}.$$

Da T endlich verzweigt ist, ist $\mathcal{O}_n$ für jedes $n \in \omega$ endlich und somit keine Überdeckung von A.
Für $n \in \omega$ definieren wir

$$\tilde{T}_n = \{s \in T : dom(s) = n \wedge \forall x \in \bigcup \mathcal{O}_n \ x_{\upharpoonright n} \neq s\}$$

und

$$\tilde{T} = \bigcup_{n \in \omega} \tilde{T}_n.$$

$\tilde{T}$ ist ein Baum, denn gilt $s \in \tilde{T}$, so folgt wegen $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{O}_{dom(s)}$ für alle $n \leq dom(s)$ auch $\tilde{s} \in \tilde{T}$ für jedes $\tilde{s} \subseteq s$. Da $\mathcal{O}_n$ keine Überdeckung von A ist, ist $\tilde{T}_n \neq \emptyset$ für alle $n > 0$ und da ferner $\tilde{T}_n \cap \tilde{T}_m = \emptyset$ für $n \neq m$ gilt, folgt $|\tilde{T}| = \aleph_0$. Weiter gilt $\tilde{T} \subseteq T$ woraus wir erhalten, dass $\tilde{T}$ endlich verzweigt

ist. Nach dem Lemma von König, welches besagt, dass jeder abzählbar unendliche, endlich verzweigter Baum einen unendlichen Pfad besitzt, existiert somit ein $x \in [\tilde{T}] \subseteq [T] = A$. Da $\mathcal{O}$ eine Überdeckung von A ist, existiert ein $s \in B$ mit $x \in \mathcal{U}_s$. Dies ist aber ein Widerspruch, da wir damit $x_n \notin \tilde{T}_n$ für alle $n \geq dom(s)$ und damit $x \notin [\tilde{T}]$ erhalten.
Also ist A kompakt. □

Wir beweisen nun Satz (4.1) mit einer Variante des Cantor-Bendixson Arguments für den entsprechenden Satz für abgeschlossene Klassen:
Sei A analytisch und sei $f : {}^{\omega}\omega \to {}^{\omega}\omega$ eine nach Lemma (3.22) existierende stetige Funktion mit $A = f[{}^{\omega}\omega]$. Für einen (Mengen-)Baum T und für $s \in T$ sei

$$T_s = \{t \in T : t \subseteq s \vee s \subseteq t\}.$$

Damit definieren wir einen Baum T' durch

$$T' = \{s \in T : |f[[T_s]]| > \aleph_0\}.$$

Für $\alpha \in OR$ definieren wir nun rekursiv:

- $T^0 = {}^{<\omega}\omega$,
- $T^{\alpha+1} = (T^{\alpha})'$,
- $T^{\lambda} = \bigcap_{\alpha<\lambda} T^{\alpha}$ falls $\lambda \in Lim$.

Da ${}^{<\omega}\omega$ abzählbar ist, existiert ein minimales θ mit $T^{\theta+1} = T^{\theta}$.

Nehmen wir zunächst an, dass $T^{\theta} = \emptyset$ ist. Da θ höchstens abzählbar ist und da für jedes $\beta < \theta$ und für jedes $s \in T^{\beta} \backslash T^{\beta+1}$ $f[[T_s^{\beta}]]$ höchstens abzählbar ist, ist auch $A = \bigcup_{(\beta<\theta)} \bigcup_{(s \in T^{\beta} \backslash T^{\beta+1})} f[[T_s^{\beta}]]$ in diesem Fall höchstens abzählbar.

Ist A überabzählbar, so ist also $T^{\theta} \neq \emptyset$. Für jede endliche 0-1-Folge t konstruieren wir nun ein $s_t \in T^{\theta}$ wie folgt:
$s_{\langle\,\rangle} = \langle\,\rangle$ und für gegebenes s_t seien $s_{t^\frown 0} \supset s_t$ und $s_{t^\frown 1} \supset s_t$ so gewählt, dass $f[[T^{\theta}_{s_{t^\frown 0}}]]$ und $f[[T^{\theta}_{s_{t^\frown 1}}]]$ disjunkt sind. Diese Wahl ist immer möglich, denn wegen $|f[[T^{\theta}_{s_t}]]| > \aleph_0$ existieren insbesondere $x_0, x_1 \in f[[T^{\theta}_{s_t}]]$ mit $x_0 \neq x_1$. Sei $\epsilon = d(x_0, x_1)$. Wegen der Stetigkeit von f finden wir ein δ mit $d(x_i, z) < \delta \Rightarrow d(f(x_i), f(z)) < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $z \in {}^{\omega}\omega$ und für $i = 0, 1$. Wählen wir $\hat{n} \in \omega$ so groß, dass $\frac{1}{\hat{n}+1} < \delta$ gilt, so können wir $s_{t^\frown i} = x_{i \upharpoonright \hat{n}}$ setzen für $i = 0, 1$.
Wir erhalten einen Baum $U \subseteq T^{\theta}$ durch

$$U = \{s \in {}^{<\omega}\omega : \exists t \in {}^{<\omega}2 \quad s \subseteq s_t\}.$$

Es gilt:

i) U ist ein perfekter Baum, daher ist $[U]$ perfekt.

ii) $[U]$ ist kompakt. Dies ergibt sich mit Lemma (4.2), denn U ist nach Konstruktion endlich verzweigt und als perfekter Baum ferner blattlos.

iii) f ist injektiv auf [U]. Denn seien $x, y \in [U]$ mit $x \neq y$. Dann existiert ein $n \in \omega$ mit $x_{\restriction n} \neq y_{\restriction n}$. Wählen wir nun zwei 0-1-Folgen t_x und t_y mit $dom(s_{t_x}) \geq n$, $dom(s_{t_y}) \geq n$, $x_{\restriction dom(s_{t_x})} = s_{t_x}$ und $y_{\restriction dom(s_{t_y})} = s_{t_y}$, so erhalten wir wegen $f[[T^\theta_{s_{t_x}}]] \cap f[[T^\theta_{s_{t_y}}]] = \emptyset$ schon $f(x) \neq f(y)$.

Sei $P = f[[U]]$.
P ist als stetiges Bild einer kompakten Klasse kompakt und daher insbesondere abgeschlossen. Weiter gilt $P \neq \emptyset$ und P hat als stetiges, injektives Bild einer perfekten Klasse keine isolierten Punkte. Damit ist P eine perfekte Teilklasse von A. □

4.2 Die Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft in L[x]

Wir werden nun sehen, dass bereits $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP nicht mehr aus den Axiomen von $ZFC^- + V = HC$ (bzw.SOA) gefolgert werden kann. Wir zeigen dies, indem wir zunächst für jede reelle Zahl x eine $\Sigma^1_2[x]$ Klasse $\mathcal{C}^x$ angeben, welche keine perfekte Teilklasse enthält und welche ferner in $L[x]$ überabzählbar ist. Anschließend beweisen wir, dass $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP bereits $\mathbf{\Sigma}^1_2$-PSP impliziert. Somit ist dann $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP in $L[x]$ falsch und da L ein Modell von $ZFC^- + V = HC$ ist, erhalten wir, dass $\mathbf{\Sigma}^1_1$-PSP in Bezug auf die Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft tatsächlich bereits das optimale Ergebnis in $ZFC^- + V = HC$ bzw. SOA ist.
Die bei diesem Vorgehen konstruierte Klasse $\mathcal{C}^x$ wird des Weiteren in Abschnitt 4.3 ein Hilfsmittel sein, um eine Charakterisierung von $\Pi^1_1[x]$-PSP zu erhalten.

Da $\mathcal{C}^x$ als eine Klasse reeller Zahlen, welche Wohlordnungen codieren, definiert wird, beschäftigen wir uns zunächst mit WO, der Klasse der Codes von Wohlordnungen auf den natürlichen Zahlen.
Eine Wohlordnung ist eine lineare Ordnung, so dass jede nichtleere Teilmenge ihres Definitionsbereichs ein kleinstes Element besitzt.
Mit Hilfe des Ersetzungsschemas kann gezeigt werden, dass zu jeder Wohlordnung $(A, <)$ eine eindeutig bestimmte Ordinalzahl α existiert, so dass $(A, <)$ isomorph zu $(\alpha, \in_{\restriction \alpha})$ ist. Dieses α wird als der Ordnungstyp von $(A, <)$ bezeichnet.

Jedes $x \in {}^\omega\omega$ codiert eine zweistellige Relation E_x auf $\omega \times \omega$ durch

$$m \; E_x \; n :\leftrightarrow x(\Gamma(m, n)) = 0,$$

wobei Γ die Gödelsche Paarfunktion von $\omega \times \omega$ auf ω sei.

Wir definieren

$$WO := \{x \in {}^{\omega}\omega : x \text{ codiert eine Wohlordnung auf } \omega \times \omega\}.$$

Ist $x \in WO$, so bezeichnen wir mit $||x||$ diejenige abzählbare Ordinalzahl, die isomorph zu der durch x codierten Wohlordnung ist.
Für $x, y \in WO$ schreiben wir $x \leq_{WO} y$, falls $||x|| \leq ||y||$ gilt. Weiter sei $x =_{WO} y$ eine abkürzende Schreibweise für $x \leq_{WO} y \wedge y \leq_{WO} x$.

Um später beweisen zu können, dass $\mathcal{C}^x$ keine perfekte Teilmenge besitzt, brauchen wir den Boundedness-Satz. Eine Klasse $A \subseteq WO$ heißt ordnungstypbeschränkt, wenn es ein $x \in WO$ gibt, so dass für jedes $y \in A$ gilt: $y \leq_{WO} x$.

Satz 4.3 *Sei A eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Teilklasse von WO. Dann ist A ordnungstypbeschränkt.*

Dieser Satz, ebenso wie die genauen Ausführungen der im Folgenden skizzierten Tatsachen, werden ausführlich in [Jech] bewiesen.

Wichtig für den Beweis von Satz (4.3) ist, dass WO Π^1_1 aber nicht Σ^1_1 ist. Die Komplexität von WO wird dabei auch für den Beweis von Lemma (4.5) von Bedeutung sein.

$\mathcal{C}^x$ werden wir des Weiteren als eine Klasse reeller Zahlen, die x-konstruktibel sind, definieren, d.h., die Elemente aus $\mathcal{C}^x$ sind in $L[x]$. Weiter brauchen wir zur Definition von $\mathcal{C}^x$ die auf $L[x]$ definierte Wohlordnung $\leq_x$.
Um zeigen zu können, dass $\mathcal{C}^x$ eine $\Sigma^1_2[x]$-Klasse ist benötigen wir, dass die Klasse der x-konstruktiblen reellen Zahlen sowie $\leq_x$ jeweils $\Sigma^1_2[x]$ sind. Dies folgt daraus, dass sich in $ZFC^- + V = HC$ zeigen lässt, dass eine Klasse genau dann $\Sigma^1_2[x]$ ist, wenn sie $\Sigma_1[x]$ über $(HC, \in)$ ist.
Wir definieren nun die Klasse $\mathcal{C}^x$:

Definition 4.4 *Sei $x \in {}^{\omega}\omega$. Dann sei $\mathcal{C}^x$ definiert durch*

$$y \in \mathcal{C}^x :\leftrightarrow y \in L[x] \wedge y \in WO \wedge (\forall y' <_x y)[y' \in WO \rightarrow y' \neq_{WO} y].$$

Lemma 4.5 *Für jedes $x \in {}^{\omega}\omega$ ist $\mathcal{C}^x$ $\Sigma^1_2[x]$.*

Beweis:
Definiert man eine Relation R durch

$$(z, y) \in R \leftrightarrow \{z_n : n \in \omega\} = \{y' : y' <_x y\}$$

mit $z_n(m) = z(\Gamma(n,m))$, so ist R Σ^1_2 (vgl. [Jech]). Damit erhält man

$$y \in \mathcal{C}^x \leftrightarrow y \in L[x] \wedge y \in WO \wedge \exists z[R(z,y) \wedge \forall n(\neg||z_n|| = ||y||)].$$

Da $\neg||z_n|| = ||y||$ Π^1_1 ist folgt daraus die Behauptung. $\square$

Wir haben nun alle Hilfsmittel, um folgende Lemmata zu beweisen.

Lemma 4.6 *Für jede reelle Zahl $x \in {}^\omega\omega$ ist $\mathcal{C}^x$ überabzählbar in $L[x]$.*

Beweis:
$\mathcal{C}^x$ ist eine in den abzählbaren Ordinalzahlen von $L[x]$ unbeschränkte Klasse, d.h. für jede in $L[x]$ abzählbare Ordinalzahl α existiert ein $y \in \mathcal{C}^x$ mit $||y|| \geq \alpha$. Denn jede in $L[x]$ abzählbare Ordinalzahl α lässt sich durch ein $y \in WO \cap L[x]$ codieren. (In $L[x]$ ex. eine Bijektion $f : \alpha \to \omega$, welche eine Ordnung $\prec$ auf ω durch $n \prec m :\Leftrightarrow f^{-1}(n) < f^{-1}(m)$ induziert, die offensichtlich den Ordnungstyp α hat. In $L[x]$ lässt sich daher ein geeignetes $y \in WO$ definieren durch $y(k) = 0$, falls m, n existieren mit $\Gamma(n,m) = k$ und $m \prec n$ bzw. $y(k) = 1$, sonst.) Somit ist die Klasse $B_\alpha := \{y : y \in L[x] \wedge y \in WO \wedge ||y|| = \alpha\}$ für jede in $L[x]$ abzählbare Ordinalzahl α nicht leer und es genügt zu zeigen, dass sie ein bezüglich $\leq_x$ kleinstes Element besitzt, da dieses dann offensichtlich in $\mathcal{C}^x$ enthalten ist. Da B_α nicht leer ist, kann man ein $\beta \in OR$ derart wählen, dass es ein y in $L_\beta[x]$ gibt mit $y \in B_\alpha$. Dann ist $L_\beta[x] \cap B_\alpha$ eine nichtleere Menge in $L[x]$ und da $\leq_x$ eine Wohlordnung ist, existiert ein bezüglich $\leq_x$ kleinstes Element in dieser. Dieses ist jedoch auch schon kleinstes Element der Klasse B_α, denn $\leq_x$ ist gerade so definiert, dass für $z \in L_\gamma[x]$ und $w \in L_\delta[x]$ mit $\gamma < \delta$ schon $z <_x w$ gilt.
Des Weiteren gilt, dass jede in den abzählbaren Ordinalzahlen von $L[x]$ unbeschränkte Teilklasse $B \subseteq WO \cap L[x]$ in $L[x]$ überabzählbar ist. Denn sonst wäre $\bigcup\{||y|| : y \in B\} =: \alpha$ eine in $L[x]$ abzählbare Ordinalzahl und wegen $||x|| < \alpha$ für alle $x \in B$ wäre B nicht unbeschränkt.
Somit ist $\mathcal{C}^x$ überabzählbar in $L[x]$. $\square$

Lemma 4.7 *Für jede reelle Zahl $x \in {}^\omega\omega$ enthält $\mathcal{C}^x$ keine perfekte Teilklasse.*

Beweis:
Nehmen wir an, dass $\mathcal{C}^x$ eine perfekte Teilklasse P enthält. Da P als perfekte Klasse abgeschlossen und somit Borel, also $\boldsymbol{\Delta}^1_1$ ist, ist P insbesondere eine $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-Klasse. P ist des Weiteren eine Teilklasse von WO und daher nach dem Boundedness-Satz ordnungstypbeschränkt, d.h. es existiert eine abzählbare Ordinalzahl α mit $||x|| < \alpha$ für alle $x \in P$. Somit ist $K := \{||x|| : x \in P\}$ abzählbar. Aufgrund der Definition von $\mathcal{C}^x$ und wegen $P \subseteq \mathcal{C}^x$ gilt aber, dass zu jedem $\beta \in K$ nur genau ein $x \in P$ existiert mit $||x|| = \beta$. Daher ist P ebenfalls abzählbar. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Annahme, dass P perfekt ist, da eine perfekte Klasse immer überabzählbar ist. $\square$

Aus den beiden letzten Lemmata erhalten wir somit unmittelbar, dass $\Sigma^1_2[x]$-PSP und damit $\mathbf{\Sigma}^1_2$-PSP in $L[x]$ nicht gelten kann.

Wir wollen nun zeigen, dass damit auch schon $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP in $L[x]$ nicht gelten kann. Dazu beweisen wir folgenden Satz:

Satz 4.8 *Es gilt:*

$$\Pi^1_1[x]-\text{PSP} \to \Sigma^1_2[x]-\text{PSP}$$

und damit

$$\mathbf{\Pi}^1_1-\text{PSP} \Rightarrow \mathbf{\Sigma}^1_2-\text{PSP}.$$

Um diesen Satz zeigen zu können, benötigen wir Kondos Satz über Π^1_1-Uniformisierung.

Satz 4.9 *Sei $\varphi(y, \vec{x})$ eine Π^1_1-Formel. Dann gibt es eine Π^1_1-Formel $\psi(y, \vec{x})$, so dass gilt:*

$$(\forall y, \vec{x})[\psi(y, \vec{x}) \to \varphi(y, \vec{x})],$$

$$(\forall \vec{x})[(\exists y)\varphi(y, \vec{x}) \to (\exists y)\psi(y, \vec{x})],$$

$$(\forall y, y', \vec{x})[\psi(y, \vec{x}) \wedge \psi(y', \vec{x}) \to y = y'].$$

Der Beweis dieses Satzes kann beispielsweise in [Simpson] nachgelesen werden.

Wir können nun folgendes Lemma beweisen, aus dem Satz (4.8) unmittelbar folgt.

Lemma 4.10 *Für jede Σ^1_2-Formel $\varphi(y, x)$ gibt es eine Π^1_1-Formel $\psi(y, x)$, so dass für eine gegebene reelle Zahl $x \in {}^\omega\omega$ und*

$$C = \{y \in {}^\omega\omega : \varphi(y, x)\},$$

$$P = \{y \in {}^\omega\omega : \psi(y, x)\}$$

gilt:

i) C ist abzählbar $\leftrightarrow$ P ist abzählbar.

ii) P hat eine perfekte Teilmenge $\to$ C hat eine perfekte Teilmenge.

Beweis:
Mit dem Satz über Π^1_1-Uniformisierung (4.9) erhält man eine Π^1_1-Formel φ_0(y,x,z), so dass für $y, x \in {}^\omega\omega$ gilt:

- $\varphi(y, x) \leftrightarrow (\exists z \in {}^\omega\omega)\varphi_0(y, x, z)$.

- $(\forall y, x, z, z' \in {}^\omega\omega)[\varphi_0(y, x, z) \wedge \varphi_0(y, x, z') \to z = z']$.

Seien $p_0(\cdot)$, $p_1(\cdot)$ die kanonischen Projektionsfunktionen des Standardisomorphismus $\langle \cdot, \cdot \rangle : {}^\omega\omega \times {}^\omega\omega \to {}^\omega\omega$. Definiere die Π^1_1-Formel ψ durch

$$\psi(y, x) \leftrightarrow \varphi(p_0(y), x, p_1(y))$$

und betrachte die $\Pi^1_1[x]$-Klasse

$$P = \{y \in {}^\omega\omega : \psi(y, x)\}.$$

Dann gilt:
(1) C ist abzählbar genau dann wenn P abzählbar ist. Denn durch $f(y) := \langle y, z \rangle$ mit z derart, dass $\varphi_0(y, x, z)$ gilt, wird aufgrund der Funktionalität von φ_0 im letzten Argument eine Funktion $f : C \to P$ definiert und man sieht leicht, dass f bijektiv ist.
(2) Angenommen, P habe eine perfekte Teilklasse. Dann existiert ein perfekter Baum T mit $[T] \subseteq P$. Sei P^* die Rechtsprojektion von T, d.h. $P^* = \{y \in {}^\omega\omega : (\exists x \in {}^\omega\omega)\langle y, x \rangle \in [T]\}$. Dann gilt:

- $P^* \subseteq C$.
- P^* ist überabzählbar: $[T]$ ist als perfekte Klasse überabzählbar und es gilt $P^* = f^{-1}[[T]]$, wobei f die unter (1) definierte Bijektion ist.
- P^* ist $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$: P^* ist die Projektion der abgeschlossenen (weil perfekten) Klasse $[T]$ (vgl. Abschnitt 3.4).

Da nach Satz (4.1) $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-PSP gilt, hat P^* eine perfekte Teilklasse, welche insbesondere eine perfekte Teilklasse von C ist. □

4.3 Eine Charakterisierung von $\Pi^1_1[x]$-PSP

Für $x \in \mathcal{N}$ beweisen wir nun einen Satz über mögliche Charakterisierungen von $\Pi^1_1[x]$-PSP, welcher in den Kapiteln 5 und 6 eine tragende Rolle spielen wird.

Satz 4.11 *Sei x eine reelle Zahl. Dann sind folgende Annahmen äquivalent:*

i) $\Pi^1_1[x]$-*PSP.*

ii) $\Sigma^1_2[x]$-*PSP.*

iii) $\aleph_1^{L[x]}$ *existiert.*

iv) Es gibt nur abzählbar viele reelle Zahlen in $L[x]$.

Beweis:

1. $\Rightarrow$ *2.*: Dies ist die Aussage von Satz (4.8).

2. $\Rightarrow$ *3.*: Gelte $\Sigma^1_2[x]$-PSP. Da $\mathcal{C}^x$ $\Sigma^1_2[x]$ ist, folgt mit Lemma (4.7), dass $\mathcal{C}^x$ abzählbar ist, d.h. $\{||y|| : y \in \mathcal{C}^x\}$ ist eine abzählbare Menge von Ordinalzahlen. Sei β das Supremum dieser Menge, dann gilt $||y|| < \beta$ für alle $y \in \mathcal{C}^x$. Wegen $V = HC$ ist β abzählbar. Da $\mathcal{C}^x$ in den in $L[x]$ abzählbaren Ordinalzahlen unbeschränkt ist (siehe Beweis von (4.6)), kann β in $L[x]$ nicht abzählbar sein. Also existiert $\aleph_1^{L[x]}$.

3. $\Leftrightarrow$ *4.*: Existiert $\aleph_1^{L[x]}$, so ist es wegen $V = HC$ abzählbar. Da in $L[x]$ die Kontinuumshypothese gilt, kann es daher nur abzählbar viele reelle Zahlen in $L[x]$ geben.
Gelte umgekehrt, dass es nur abzählbar viele reelle Zahlen in $L[x]$ gibt. Da in $L[x]$ das Auswahlaxiom gilt, welches (via Wohlordnungssatz) impliziert, dass jede Menge eine Kardinalität besitzt, genügt es zu zeigen, dass $L[x] \cap {}^\omega\omega$ in $L[x]$ eine Menge ist.
Dies folgt daraus, dass nach Voraussetzung die Klasse C, definiert durch $\alpha \in C \leftrightarrow \exists y \in L[x] \cap {}^\omega\omega : \ \alpha = min\{\tilde{\alpha} : y \in L_{\tilde{\alpha}}[x]\}$ abzählbar und daher eine Menge ist. Setzen wir $\gamma := sup\ C + 1$, so erhalten wir damit $L[x] \cap {}^\omega\omega \in L_\gamma[x]$ und diese Aussage gilt wegen der Absolutheit von $L_\gamma[x]$ auch in $L[x]$.

Die Richtung von *4.* nach *1.* bzw. *2.* lässt sich in ZFC recht elegant mit dem Satz von Mansfield-Solovay zeigen, welcher besagt, dass jede $\Sigma^1_2[x]$-Menge, welche nicht vollständig in $L[x]$ enthalten ist, bereits eine überabzählbare Teilmenge besitzt. Dieser Satz wird üblicherweise mit der Charakterisierung von $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Mengen als Projektionen von Bäumen auf $\omega \times \omega_1$, wie wir sie in Abschnitt 3.5 in $ZFC^- + V = HC$ für entsprechende Klassen gezeigt haben, bewiesen. Dazu wird für eine $\Sigma^1_2[x]$-Klasse A der zugehörige Baum iterativ "ausgedünnt", so dass der dabei entstehende Fixpunktbaum entweder in offensichtlicher Weise bezeugt, dass A eine perfekte Teilmenge enthält oder leer ist. Im letzten Fall kann dann gezeigt werden, dass A schon in $L[x]$ enthalten sein muss. Denn alle relevanten Bäume sind in $L[x]$ enthalten und jedes $y \in A$ ist über dem letzten Baum der Iterationskette, in dessen Projektion y noch enthalten ist, über $L[x]$ definierbar.
Arbeiten wir jedoch in $ZFC^- + V = HC$, so stellen sich bei diesem Vorgehen folgende Probleme:

- Die einzelnen Zwischenbäume der Iteration müssten als Klassen definierbar sein, dabei stoßen wir jedoch spätestens im Limesfall auf Probleme.
- Es ist nicht offensichtlich, dass der Fixpunktbaum bereits nach höchstens

ω_1 Schritten erreicht wird, d.h. uns könnten evtl. nicht genügend Ordinalzahlen zur Verfügung stehen.

Wir werden daher die Richtung von *4.* nach *1.* mit Forcing beweisen. Da wir dabei auch die Aussage *3.* als Prämisse verwenden, haben wir oben bereits die Äquivalenz von *4.* und *3.* gezeigt.
Da es den Rahmen dieser Arbeit überspannen würde, verzichten wir an dieser Stelle auf eine ausführliche Einführung in die Forcing-Methode und verweisen den Leser für eine solche auf das Buch von [Kunen].

4./3. $\Rightarrow$ *1.*: Sei A eine überabzählbare $\Pi^1_1[x]$-Klasse. Sei φ eine Π^1_1-Formel mit $y \in A \leftrightarrow \varphi(y,x)$ für alle $y \in {}^\omega\omega$. Sei $\mathrm{P} = Col(\omega, \omega_1^{L[x]}) := \{p : |p| < \omega \wedge p \text{ ist eine Funktion} \wedge dom(p) \subset \omega \wedge rng(p) \subset \omega_1^{L[x]}\}$ (geordnet durch die Inklusion) und $G \in V[G]$ ein P-generischer Filter über V.
Für alle $\alpha < \omega_1^{L[x]}$ ist $D_\alpha := \{p \in Col(\omega, \omega_1^{L[x]}) : \alpha \in rng(p)\}$ offensichtlich dicht in P und daher ist $\bigcup G : \omega \to \omega_1^{L[x]}$ eine Surjektion in $L[x][G]$, welche bezeugt, dass $L[x] \cap {}^\omega\omega$ abzählbar in $L[x][G]$ ist.
Sei $g : \omega \to L[x] \cap {}^\omega\omega$ eine Bijektion in $L[x][G]$ und sei $b \in {}^\omega\omega$ definiert durch $b(\Gamma(m,n)) = g(n)(m)$ für alle $n, m \in \omega$, wobei Γ die Gödelsche Paarfunktion sei. Da φ eine Π^1_1-Formel ist, ist dann

$$\exists y \in {}^\omega\omega\ (\forall n \in \omega\ \exists m \in \omega\ y(m) \neq b(\Gamma(m,n)) \wedge \varphi(y,x)) \tag{4}$$

Σ^1_2 in den Parametern b und x und entspricht der Aussage $\exists y \in {}^\omega\omega\ (y \notin L[x] \cap {}^\omega\omega \wedge y \in A)$. Da $L[x] \cap {}^\omega\omega$ abzählbar und A überabzählbar ist, ist (4) offensichtlich wahr und da $b, x \in L[x][G]$ gilt, folgt mit dem Satz über Shoenfield-Absolutheit (vgl. Satz (6.7)), dass (4) auch in $L[x][G]$ wahr ist[8].
Sei $y_0 \in L[x][G]$ ein Zeuge für (4). Dann existiert ein $p \in Col(\omega, \omega_1^{L[x]})$ und ein Name $\tau \in L[x]$ mit $\tau^G = y_0$, so dass gilt

$$p \Vdash \forall n\ \exists m\ \tau(m) \neq \dot{b}(\Gamma(m,n)) \wedge \forall z \in (L[\check{x}] \cap {}^\omega\omega)\ \exists n\ \forall m\ \dot{b}(\Gamma(m,n)) = z(m) \wedge \varphi(\tau, \check{x}).$$

Sei $n \in \omega, n > 2$ so gewählt, dass alle Axiome, die in einem Grundmodell für die folgende Forcing-Konstruktion benötigt werden sowie alle Axiome, die verwendet werden, um zu zeigen, dass jeder fundierte (Mengen-)Baum eine Rank-Funktion besitzt, höchstens Σ_n sind. Sei f eine Funktion, so dass für jede Σ_n-Formel φ der Form $\exists v\ \Psi(v, \vec{w})$ mit der Gödelnummer $\bar{\varphi}$ und für alle $\vec{x} \in L[x]$ gilt:

$$f(\bar{\varphi}, \vec{x}) = \begin{cases} \text{das bzgl. } \leq_{L[x]} \text{ kleinste } y \text{ mit } L[x] \models \Psi(y, \vec{x}) & \text{, falls dieses existiert.} \\ \emptyset & \text{, sonst.} \end{cases}$$

[8]Shoenfield-Absolutheit für $\Sigma^1_2[x]$-Klassen werden wir in 6.2 speziell für L[x] zeigen. Es ändert sich jedoch nichts im Beweis, wenn wir $L[x]$ durch $L[x][G]$ ersetzen.

Sei $\{\gamma_n : n \in \omega\}$ rekursiv definiert durch:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \max\{\omega_1^{L[x]} + 1, \min\{\alpha : \tau, \dot{b}, \breve{x} \in L_\alpha[x]\}\},\\ \gamma_{n+1} &= \text{kleinstes } \gamma, \text{ so dass für alle } \Sigma_n\text{-Formeln } \varphi \text{ und für alle } \vec{x} \in L_{\gamma_n}[x]\\ &\quad\ \text{schon } f(\bar{\varphi}, \vec{x}) \in L_\gamma[x] \text{ gilt.}\end{aligned}$$

Dann ist $\gamma := \sup_{(n\in\omega)}\gamma_n$ offensichtlich eine abzählbare Ordinalzahl, so dass $\mathrm{P}, \tau, \dot{b}, \breve{x} \in L_\gamma[x]$ gilt.
Ferner können wir mit Induktion zeigen, dass für $m \leq n$ jede in $L[x]$ wahre Σ_m- bzw. Π_m-Formel mit Parametern aus $L_\gamma[x]$ auch in $L_\gamma[x]$ gilt:
Für Σ_1-Formeln folgt dies direkt aus obiger Konstruktion und für Π_1-Formeln gilt die Behauptung aufgrund von Abwärtspersistenz. Sei $1 < m \leq n$ und die Behauptung gezeigt für $\tilde{m} < m$. Ist φ eine Σ_m-Formel der Gestalt $\exists v\ \Psi(v, \vec{x})$ mit $L[x] \models \varphi$ und $\vec{x} \in L_\gamma[x]$, so existiert nach Konstruktion von γ ein $y \in L_\gamma[x]$ mit $L[x] \models \Psi(y, \vec{x})$. Wenden wir auf $\Psi(y, \vec{x})$ die Induktionsvoraussetzung an, so erhalten wir wegen $y \in L_\gamma[x]$ somit $L_\gamma[x] \models \varphi$. Ist φ eine Π_n-Formel, so ergibt sich die Behauptung mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung wieder aus der Abwärtspersistenz.
Da γ abzählbar ist und da mit Induktion folgt, dass $|L_\alpha[x]| = |\alpha|$ für jede Ordinalzahl α gilt, kann es nur abzählbar viele in P dichte Mengen in $L_\gamma[x]$ geben. Sei $\{D_n : n \in \omega\}$ eine Aufzählung dieser.
Wir definieren nun rekursiv für jedes $t \in {}^{<\omega}2$ ein $p_t \in \mathrm{P}$ und ein $u_t \in {}^{<\omega}\omega$:
Sei $p_{\langle\,\rangle} \in D_0$ mit $p_{\langle\,\rangle} \leq p$. Ist $p_t \leq p$ mit $|t| = n$ definiert, so bestimmen wir $u_t, p_{t^\frown 0}, p_{t^\frown 1}$ wie folgt: Da p schon entscheidet, dass für einen P-generischen Filter G über $L_\gamma[x]$ das τ^G in der generischen Erweiterung nicht in $L[x]$ liegen kann und da $p_t \leq p$ gilt, muss es ein kleinstes $k \in \omega$ geben, so dass p_t den Wert von $\tau(k)$ nicht entscheidet. Wähle dann u_t derart, dass $p_t \Vdash \tau_{\upharpoonright k} = \breve{u}_t$ gilt und ferner $p_{t^\frown 0}, p_{t^\frown 1} \in D_{n+1}$, so dass $p_{t^\frown 0} \leq p_t$ sowie $p_{t^\frown 1} \leq p_t$ gilt und $p_{t^\frown 0}$ und $p_{t^\frown 1}$ jeweils verschiedene Werte für $\tau(k)$ entscheiden.
Für $z \in {}^\omega 2$ sei

$$G_z := \{q \in \mathrm{P} : \exists t\ (p_t \leq q \wedge t \subset z\}.$$

Nach Konstruktion ist jedes G_z ein Filter, welcher alle D_n schneidet und daher P-generisch über $L_\gamma[x]$ ist. Sei

$$C := \{\tau^{G_z} : z \in {}^\omega 2\}.$$

Dann gilt:

- $C \subseteq A$: Sei $z \in {}^\omega 2$. Wegen $p \in G_z$ folgt dann $L_\gamma[x][G_z] \models \varphi(\tau^{G_z}, x)$, also $L_\gamma[x][G_z] \models \tau^{G_z} \in A$. Da A $\Pi^1_1[x]$ ist, existiert eine arithmetische Formel ϕ mit $y \in A \leftrightarrow \forall z \in {}^\omega\omega\ \exists n \in \omega\ \phi(y_{\upharpoonright n}, z_{\upharpoonright n}, x_{\upharpoonright n})$. Wir definieren einen Baum T auf $\omega \times \omega$ durch $(s, h) \in T \leftrightarrow s, h \in {}^{<\omega}\omega \wedge dom(s) = dom(h) \wedge \neg\phi(s, h, x_{\upharpoonright dom(s)})$. Da T arithmetisch in x ist gilt $T \in L_\gamma[x][G_z]$ und wegen $L_\gamma[x][G_z] \models \tau^{G_z} \in A$ ferner $L_\gamma[x][G_z] \models$

$T_{(\tau^{G_z})}$ *ist fundiert.* Dabei ist $T_{(\tau^{G_z})}$ (wie beim Beweis von Satz (3.23) definiert durch $T_{(\tau^{G_z})} = \{s \in {}^{<\omega}\omega : (\tau^{G_z}_{\upharpoonright dom(s)}, s) \in T\}$. Dann gibt es nach Wahl von γ eine ordnungstreue Abbildung in $L_\gamma[x][G_z]$ von $T_{(\tau^{G_z})}$ in die Ordinalzahlen. Diese existiert natürlich auch in V und bezeugt daher, dass $T_{(\tau^{G_z})}$ tatsächlich fundiert ist und somit $\tau^{G_z} \in A$ gilt.

- C ist perfekt: Nach Konstruktion ist C nicht leer und enthält keine isolierten Punkte. Ferner ist C abgeschlossen, denn es gilt

$$C = \bigcap_{(n \in \omega)} \bigcup \{\mathcal{U}_{u_t} : t \in {}^n2\},$$

wobei jede der endlichen Vereinigungen und damit auch der abzählbare Schnitt über diese abgeschlossen ist. ▫

5 $\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM

In diesem Kapitel betrachten wir Regularitätseigenschaften bezüglich der Lebesgue-Messbarkeit, also Schemata der Form Γ-LM. Anders als bei der Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft interessieren wir uns hierbei später jedoch nicht für die Folgerungen aus dem möglichst schwächsten sinnvollen Axiomenschema dieser Art, sondern speziell für $\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM. Der Grund hierfür besteht darin, dass wir in Anlehnung an einen Beweis von Jean Raisonnier zeigen werden, dass $\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM bereits $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP impliziert. Daher können wir alle Aussagen bezüglich der Stärke von $ZFC^- + V = HC + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP (bzw. $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP) direkt zu Aussagen bezüglich der Stärke von $ZFC^- + V = HC + \mathbf{\Sigma}^1_3$-LM (bzw. $SOA + \mathbf{\Sigma}^1_3$-LM) umformulieren.
Auch wenn uns hier also die Frage nach dem schwächsten möglichen Axiomenschema bezüglich der Lebesgue-Messbarkeit nicht direkt interessiert, werden wir an dieser Stelle kurz die den Ergebnissen aus den Abschnitten 4.1 und 4.2 entsprechenden Tatsachen angeben:

Ebenso wie bei der Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft lässt sich zeigen, dass jede analytische Klasse reeller Zahlen bereits Lebesgue-messbar ist. Da die Komplemente Lebesgue-messbarer Klassen wieder Lebesgue-messbar sind, folgt damit unmittelbar auch $\mathbf{\Pi}^1_1$-LM.
Dies ist aber auch schon das optimale Ergebnis, denn betrachtet man das konstruktible Universum L, so lässt sich zeigen, dass es dort eine $\mathbf{\Delta}^1_2$ Klasse gibt, welche nicht Lebesgue-messbar ist.
Diese Ergebnisse können beispielsweise in [Jech] nachgelesen werden. Angemerkt sei hier, dass diese in analoger Weise auch für die Bairesche Eigenschaft gelten.

Die folgenden Ausführungen werden sich vorwiegend an dem Artikel von [Raisonnier] und dem Buch von [Bartoszyński/Judah] orientieren.

Wie zuvor arbeiten wir in $ZFC^- + V = HC$.

5.1 Rapide Filter

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass aus $\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM schon $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP folgt. Dazu werden wir unter Annahme von $\neg\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP die Existenz einer $\mathbf{\Sigma}^1_3$-Klasse reeller Zahlen, welche nicht Lebesgue-messbar ist, zeigen. Eine solche $\mathbf{\Sigma}^1_3$-Klasse reeller Zahlen kann in diesem Fall als ein *rapider* Filter auf ω konstruiert werden, welchen man via charakteristischer Funktionen als Teilklasse des Cantor-Raumes auffassen kann.

Definition 5.1 *Ein Filter F auf einer nichtleeren Menge S ist eine Klasse von Teilmengen von S, so dass gilt:*

i) $S \in F$ *und* $\emptyset \notin F$.

ii) *Ist* $X \in F$ *und* $Y \in F$, *so gilt auch* $X \cap Y \in F$.

iii) *Ist* $X, Y \subseteq S$ *und gilt* $X \subseteq Y$ *und* $X \in F$, *so ist auch* $Y \in F$.

Ein Filter auf ω kann somit als Klasse reeller Zahlen aufgefasst werden.

Definition 5.2 *Ein nichttrivialer Filter* F *(d.h.* $F \neq \{\omega\}$*) auf* ω *heißt rapide, wenn es für jede monoton wachsende Funktion* $\phi : \omega \to \omega$ *ein* $G \in F$ *gibt, so dass für jedes* $k \in \omega$ *gilt:*

$$|G \cap \phi(k)| \leq k.$$

Wir werden im Folgenden nur solche Filter betrachten, welche invariant sind unter beliebigen endlichen Abänderungen ihrer Elemente (d.h. solche, die den *Frechet-Filter* enthalten).

Satz 5.3 *Kein rapider Filter auf* ω *ist Lebesgue-messbar.*

Den Beweis dieses Satzes werden wir mit Hilfe des folgenden Satzes von Bartoszyński führen.

Satz 5.4 *Sei* F *ein Filter auf* ω. *Ist* F *messbar, so existiert eine Familie* $\{A_n : n \in \omega\}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für jedes* $n \in \omega$ *besteht* A_n *aus endlich vielen endlichen Teilmengen von* ω.

(b) $\bigcup A_n \cap \bigcup A_m = \emptyset$ *für* $n \neq m$.

(c) $\sum_{n \in \omega} \mu(\{X \subseteq \omega : \exists a \in A_n \; a \subseteq X\}) < \infty$.

(d) $\forall X \in F \; \exists^\infty n \; \exists a \in A_n \; a \subseteq X$.

Der Beweis dieses Satzes erfordert einige Vorbereitungen.

Lemma 5.5 *Sei* F *ein Filter auf* ω. *Dann hat* F *das Maß Null oder* F *ist nicht messbar.*

Beweis:
Angenommen, F ist messbar.
Da endlich abgeänderte Elemente von F wieder in F enthalten sind, folgt mit dem Null-Eins-Gesetz von Hewitt-Savage aus der Wahrscheinlichkeitstheorie (vgl.[Schmitz]), dass F das Maß Null oder Eins hat.
Nehmen wir an es gelte $\mu(F) = 1$. Dann definieren wir einen das Lebesgue-Maß erhaltenden Homöomorphismus $H : {}^\omega 2 \to {}^\omega 2$ durch $H(x)(n) = 1 - x(n)$.
Wegen $\mu(H''(F)) = 1$ existiert dann ein $x \in F$ mit $H(x) \in F$. Dies ist jedoch wegen $\emptyset \notin F$ ein Widerspruch. □

Lemma 5.6 *Sei $G \subseteq {}^{\omega}2$ eine Klasse vom Maß Null. Dann existiert eine Folge $\langle F_n : n \in \omega\rangle$, so dass $F_n \subseteq {}^{n}2$ für alle $n \in \omega$, $\sum_{n\in\omega} |F_n| \cdot 2^{-n} < \infty$ und $G \subseteq \{x \in {}^{\omega}2 : \exists^{\infty} n\ x{\restriction}n \in F_n\}$ gilt.*

Beweis:
Wir verwenden die "Klassenversion" der folgenden ZFC-Aussage, die sich unmittelbar aus dem Beweis der Maßerweiterungssätze (3.13) und (3.14) ergibt (vgl.[Kohnen]):
Sei $M \subseteq {}^{\omega}2$ eine Menge mit $\mu(M) = 0$. Dann existiert eine Folge offener Mengen $\langle M_n : n \in \omega\rangle$ mit $M_n \subseteq {}^{\omega}2$ und $\mu(M_n) \leq 2^{-n}$ für alle $n \in \omega$ und $M \subseteq \bigcap_{n\in\omega} M_n$.
In analoger Weise ergibt sich aus den "Klassenversionen" der Maßerweiterungssätze, die mit Hilfe von Borel-Codes gezeigt werden können (vgl. Abschnitt 3.4), die "Klassenversion" dieses Satzes:
Sei $G \subseteq {}^{\omega}2$ eine Klasse mit $\mu(G) = 0$. Dann existiert eine Folge $\langle C_n : n \in \omega\rangle$ mit $C_n \subseteq {}^{<\omega}2$ für $n \in \omega$, so dass für jedes $n \in \omega$ eine Menge $A_n \subseteq \omega$ und für jedes $m \in A_n$ ein $s^n_m \in {}^{<\omega}2$ existiert, wobei die s^n_m für $m \in A_n$ paarweise inkompatibel sind, mit $C_n = \{s^n_m : m \in A_n\}$ und $\mu(\bigcup_{m\in A_n} \mathcal{U}_{s^n_m}) = \sum_{m\in A_n} 2^{-|s^n_m|} \leq 2^{-n}$ $\forall n \in \omega$ sowie $x \in G \to \forall n \in \omega\ \exists m \in A_n\ x \in \mathcal{U}_{s^n_m}$.

Identifiziert man jedes C_n mit der offenen Klasse $G_n := \bigcup_{m\in A_n} \mathcal{U}_{s^n_m}$, so codiert die Folge der C_n also gerade eine "Folge offener Klassen" $\langle G_n : n \in \omega\rangle$ mit den gewünschten Eigenschaften.
Für n $\in \omega$ definieren wir nun

$$F_n = \{s \in {}^{n}2 : \exists k \in \omega\ \exists l \in A_k\ s = s^k_l\}.$$

Wegen $\mu(\mathcal{U}_s) = 2^{-|s|}$ für alle $s \in {}^{<\omega}2$ gilt $\sum_{n\in\omega} |F_n| \cdot 2^{-n} = \sum_{n\in\omega} \sum_{s\in F_n} \mu(\mathcal{U}_s)$. Da ferner $\sum_{n\in\omega} \mu(G_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(\bigcup_{(m\in A_n)} \mathcal{U}_{s^n_m}) = \sum_{n\in\omega} \sum_{m\in A_n} \mu(\mathcal{U}_{s^n_m})$ gilt (μ ist σ-additiv und die s^n_m für festes n disjunkt), folgt mit dem Umordnungssatz für konvergente Reihen:

$$\sum_{n\in\omega} |F_n| \cdot 2^{-n} \leq \sum_{n\in\omega} \mu(G_n) < \infty.$$

Für jedes x $\in G$ gilt des Weiteren x${\restriction}n \in F_n$ für unendlich viele n. Denn sei n $\in \omega$ beliebig. Dann gilt wegen $x \in \bigcap_{(n\in\omega)} G_n$ (wegen $x \in G \to \forall n \in \omega\ \exists m \in A_n\ x \in \mathcal{U}_{s^n_m}$) insbesondere x $\in G_n$. Somit existiert ein l $\in A_n$ mit x $\in \mathcal{U}_{s^n_l}$, also x${\restriction}|s^n_l| \in F_{|s^n_l|}$. Wegen $\mu(\mathcal{U}_{s^n_l}) \leq \mu(G_n)$ folgt $2^{-|s^n_l|} \leq 2^{-n}$ und damit $|s^n_l| \geq n$. □

Um das nächste Lemma zu formulieren, benötigen wir den Begriff einer *kleinen Klasse.*

Definition 5.7 *Eine Klasse $H \subseteq {}^{\omega}2$ heißt klein, wenn es eine Partition von ω in disjunkte Intervalle $\langle I_n : n \in \omega\rangle$ und eine Folge $\langle J_n : n \in \omega\rangle$ gibt mit* *i)* $J_n \subseteq {}^{I_n}2$ *für alle* n.

ii) $\sum_{n\in\omega} |J_n| \cdot 2^{-|I_n|} < \infty$.

iii) $H \subseteq \{x \in {}^\omega 2 : \exists^\infty n\ x{\restriction}I_n \in J_n\}$.

Die Klasse $\{x \in {}^\omega 2 : \exists^\infty n\ x{\restriction}I_n \in J_n\}$ *bezeichnen wir auch mit* $(I_n, J_n)_{n\in\omega}$.

Aus dem folgenden Lemma geht hervor, dass kleine Klassen gute Approximationen von Nullklassen darstellen, da sich jede solche als Vereinigung zweier kleiner Klassen darstellen lässt.

Lemma 5.8 *Sei* $G \subseteq {}^\omega 2$ *eine Klasse mit Maß Null. Dann existieren Folgen* $\langle n_k, m_k : k \in \omega\rangle$ *und* $\langle J_k, J'_k : k \in \omega\rangle$*, so dass gilt*

i) $n_k < m_k < n_{k+1}$ *für alle* $k \in \omega$.

ii) $J_k \subseteq {}^{[n_k,n_{k+1})}2$, $J'_k \subseteq {}^{[m_k,m_{k+1})}2$ *für* $k \in \omega$.

iii) Die Klassen $([n_k, n_{k+1}), J_k)_{k\in\omega}$, $([m_k, m_{k+1}), J'_k)_{k\in\omega}$ *sind klein.*

iv) $G \subseteq ([n_k, n_{k+1}), J_k)_{k\in\omega} \cup ([m_k, m_{k+1}), J'_k)_{k\in\omega}$.

Beweis:
Sei G eine Klasse vom Maß Null. Nach Lemma (5.6) gibt es eine Folge $\langle F_n : n \in \omega\rangle$ mit $F_n \subseteq {}^n 2$ für jedes $n \in \omega$ und $\sum_{n\in\omega} |F_n| \cdot 2^{-n} < \infty$, so dass $G \subseteq \{x \in {}^\omega 2 : \exists^\infty n\ x{\restriction}n \in F_n\}$ gilt.
Sei $\langle \epsilon_n : n \in \omega\rangle$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\sum_{n\in\omega} \epsilon_n < \infty$.
Wir definieren nun $\langle n_k, m_k : k \in \omega\rangle$ wie folgt

$$
\begin{aligned}
&n_0 = 0,\\
&m_k = min\{j : j > n_k \wedge 2^{n_k} \cdot \textstyle\sum_{i=j}^{\infty} |F_i| \cdot 2^{-i} < \epsilon_k\},\\
&n_{k+1} = min\{j : j > m_k \wedge 2^{m_k} \cdot \textstyle\sum_{i=j}^{\infty} |F_i| \cdot 2^{-i} < \epsilon_k\} \text{ für } k \in \omega.
\end{aligned}
$$

Sei $I_k = [n_k, n_{k+1})$ und $I'_k = [m_k, m_{k+1})$ für $k \in \omega$. Dann definieren wir J_k und J'_k für $k \in \omega$ durch

$$s \in J_k \leftrightarrow s \in {}^{I_k}2 \wedge \exists i \in [m_k, n_{k+1})\ \exists t \in F_i\ s{\restriction}dom(t)\cap dom(s) = t{\restriction}dom(t)\cap dom(s)$$

und analog

$$s \in J'_k \leftrightarrow s \in {}^{I'_k}2 \wedge \exists i \in [n_{k+1}, m_{k+1})\ \exists t \in F_i\ s{\restriction}dom(t)\cap dom(s) = t{\restriction}dom(t)\cap dom(s).$$

Zu zeigen bleibt:

(a) $(I_k, J_k)_{k\in\omega}$, $(I'_k, J'_k)_{k\in\omega}$ sind klein.

(b) $G \subseteq (I_k, J_k)_{k\in\omega} \cup (I'_k, J'_k)_{k\in\omega}$.

Zu (a):
Da nach Definition von J_k für jedes feste $i \in [m_k, n_{k+1})$ offensichtlich höchstens $|F_i| \cdot 2^{n_{k+1}-i}$ verschiedene s zu J_k hinzukommen können, gilt
$|J_k| \leq \sum_{i=m_k}^{n_{k+1}} |F_i| \cdot 2^{n_{k+1}-i}$.
Somit folgt
$|J_k| \cdot 2^{-|I_k|} \leq \sum_{i=m_k}^{n_{k+1}} |F_i| \cdot 2^{n_{k+1}-i} \cdot 2^{n_k - n_{k+1}} = 2^{n_k} \cdot \sum_{i=m_k}^{n_{k+1}} |F_i| \cdot 2^{-i} \leq \epsilon_k$ (nach Definition von m_k). Nach Wahl von $\langle \epsilon_k : k \in \omega \rangle$ erhalten wir daher

$$\sum_{k \in \omega} |J_k| \cdot 2^{-|I_k|} \leq \sum_{k \in \omega} \epsilon_k < \infty$$

und haben damit gezeigt, dass $(I_k, J_k)_{k \in \omega}$ klein ist.
Analog zeigt man, dass $(I'_k, J'_k)_{k \in \omega}$ klein ist.

Zu (b):
Sei $x \in G$ und sei $X = \{n \in \omega : x{\restriction}n \in F_n\}$. Da X nach Wahl der Folge $\langle F_n : n \in \omega \rangle$ unendlich ist, ist mindestens eine der Klassen

$$X \cap \bigcup_{(k \in \omega)} [m_k, n_{k+1}) \quad \text{oder} \quad X \cap \bigcup_{k \in \omega} [n_k, m_k)$$

unendlich.
Ohne Einschränkung sei die erste Klasse unendlich. Dann gilt $x \in (I_n, J_n)_{n \in \omega}$. Denn ist $x{\restriction}n \in F_n$ für $n \in [m_k, n_{k+1})$, dann gibt es nach Definition von J_k ein $s \in J_k$, so dass $x{\restriction}[n_k, m_k+1) = s$ gilt. □

Wir schließen noch ein letztes kleines Lemma an, bevor wir Satz (5.4) beweisen.

Lemma 5.9 *Seien $(I_k^1, J_k^1)_{k \in \omega}, (I_k^2, J_k^2)_{k \in \omega}$ kleine Klassen. Ist $\langle I_k^1 : k \in \omega \rangle$ eine feinere Partition als $\langle I_k^2 : k \in \omega \rangle$, dann ist $(I_k^1, J_k^1)_{k \in \omega} \bigcup \ (I_k^2, J_k^2)_{k \in \omega}$ ebenfalls klein.*

Beweis:
Für $k \in \omega$ sei $J_k = J_k^2 \cup \{s \in {}^{I_k^2}2 : \exists n \in \omega (I_k^2 \cap I_n^1 \neq \emptyset \wedge s{\restriction}I_n^1 \in J_n^1)\}$. Dann gilt

$$(I_k^2, J_k)_{k \in \omega} = (I_k^1, J_k^1)_{k \in \omega} \cup \ (I_k^2, J_k^2)_{k \in \omega}.$$

Die Gleichheit ist klar. Ferner gilt
$\sum_{k \in \omega} |J_k| \cdot 2^{-|I_k^2|} \leq \sum_{k \in \omega} (|J_k^2| \cdot 2^{-|I_k^2|} + \sum_{\{j : I_j^1 \subseteq I_k^2\}} |J_j^1| \cdot 2^{(|I_k^2| - |I_j^1|)} \cdot 2^{-|I_k^2|})$
$\leq \sum_{k \in \omega} |J_k^2| \cdot 2^{-|I_k^2|} + \sum_{k \in \omega} |J_k^1| \cdot 2^{-|I_k^1|} < \infty$.
Also ist $(I_k^2, J_k)_{k \in \omega}$ klein. □

Beweis von Satz (5.4):
Sei F ein messbarer Filter auf ω. Wir zeigen zunächst, dass F klein ist.

Wegen Lemma (5.5) hat F das Maß Null.
Aufgrund von Lemma (5.8) existieren ferner zwei kleine Klassen $(I_k, J_k)_{k\in\omega}$, $(I'_k, J'_k)_{k\in\omega}$ mit $F \subseteq (I_k, J_k)_{k\in\omega} \bigcup (I'_k, J'_k)_{k\in\omega}$ und $I_k = [n_k, n_{k+1})$, $I'_k = [m_k, m_{k+1})$ für eine Folge $\langle n_k, m_k : k \in \omega\rangle$ mit $n_k < m_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \omega$.
Sei $\langle \epsilon_k : k \in \omega\rangle$ die wie im Beweis von Lemma (5.8) zur Konstruktion von $(I_k, J_k)_{k\in\omega}$, $(I'_k, J'_k)_{k\in\omega}$ verwendete Folge reeller Zahlen mit $\sum_{n\in\omega} \epsilon_n < \infty$. Ohne Einschränkung dürfen wir diese so wählen, dass $\sum_{k\in\omega} 2^{k+2} \cdot \epsilon_k < \infty$ und $\epsilon_{k+1} \leq \epsilon_k$ für alle $k \in \omega$ gilt. Nach dem Beweis von (5.8) gilt

$$|J_k| \cdot 2^{n_k - n_{k+1}} \leq \epsilon_k \text{ und } |J'_k| \cdot 2^{m_k - m_{k+1}} \leq \epsilon_k.$$

Wir bezeichnen $(I_k, J_k)_{k\in\omega}$ mit H_1 und $(I'_k, J'_k)_{k\in\omega}$ mit H_2.
Gilt $F \subseteq H_1$ oder $F \subseteq H_2$, so ist F offensichtlich klein. Nehmen wir also an, dass weder H_1 noch H_2 F überdecken. Dann definieren wir eine weitere kleine Klasse H_3, so dass deren zugehörige Partition von ω feiner ist als die von H_1 bzw. die von H_2. Seien

$$S_k = \{s \in {}^{[n_k, m_k)}2 : s \textit{ hat mindestens } 2^{n_{k+1} - m_k - k} \textit{ Erweiterungen in } J_k\}$$

und

$$S'_0 = \emptyset,$$

$$S'_k = \{s \in {}^{[n_k, m_k)}2 : s \textit{ hat mindestens } 2^{n_k - m_{k-1} - k} \textit{ Erweiterungen in } J'_{k-1}\}$$

für $k \in \omega$ bzw. $k \in \omega$ für $k > 0$.
Seien

$$I^*_{2k} = [n_k, m_k) \text{ und } I^*_{2k+1} = [m_k, n_{k+1})$$

sowie

$$S^*_{2k} = S_k \cup S'_k \text{ und } S^*_{2k+1} = \emptyset$$

für $k \in \omega$.
Wir definieren dann

$$H_3 = (I^*_n, S^*_n)_{n\in\omega}.$$

Um die Notation und die folgenden Beweise übersichtlicher zu gestalten, schreiben wir jedoch einfacher

$$H_3 = ([n_k, m_k), S_k \cup S'_k)_{k\in\omega},$$

wobei dies im obigen Sinne zu verstehen ist.[9]
H_3 ist klein. Denn es gilt : $|S_k| \cdot 2^{n_{k+1} - m_k - k} \leq |J_k|$ (nach Definition von S_k) und wegen $|J_k| \leq \epsilon_k \cdot 2^{n_{k+1} - n_k}$ folgt somit $|S_k| \leq \epsilon_k \cdot 2^{(m_k - n_k) + k} \leq$

[9]Dies entspricht nicht ganz Definition (5.7), da $([n_k, m_k))_{k\in\omega}$ keine Partition von ω ist.

$\epsilon_{k-1} \cdot 2^{(m_k - n_k)+k}$ (da $\epsilon_k \leq \epsilon_{k-1}$). Letzte Ungleichung gilt natürlich nur für $k > 0$.
Analog gilt, falls $k > 0$ vorausgesetzt wird : $|S'_k| \cdot 2^{n_k - m_{k-1} - k} \leq |J'_{k-1}|$ und wegen $|J'_{k-1}| \leq \epsilon_{k-1} \cdot 2^{m_k - m_{k-1}}$ daher $|S'_k| \leq \epsilon_{k-1} \cdot 2^{(m_k - n_k)+k}$.
Wir erhalten somit folgende Abschätzung:

$$\sum_{k \in \omega} |S_k \cup S'_k| \cdot 2^{n_k - m_k} \leq |S_0| \cdot 2^{n_0 - m_0} + \sum_{k \in \omega, k>0} (2 \cdot \epsilon_{k-1} \cdot 2^{(m_k - n_k)+k}) \cdot 2^{n_k - m_k}$$

$$\leq \epsilon_0 + \sum_{k \in \omega, k>0} 2^{k+1} \cdot \epsilon_{k-1} < \infty$$

(nach Wahl der Folge $\langle \epsilon_k : k \in \omega \rangle$).

Gilt $F \subseteq H_2 \cup H_3$, so ist F klein, da nach Lemma (5.9) $H_2 \cup H_3$ klein ist.
Nehmen wir an $F \not\subseteq H_2 \cup H_3$ und sei $X \in F$ mit $X \notin H_2 \cup H_3$. Wegen $F \subseteq H_1 \cup H_2$ folgt $X \in H_1$. Dann gibt es eine unendliche, echt aufsteigende Folge $\langle k_u : u \in \omega \rangle$ mit $X {\upharpoonright} [n_{k_u}, n_{k_u+1}) \in J_{k_u}$ für alle $u \in \omega$. Ohne Einschränkung wählen wir $\langle k_u : u \in \omega \rangle$ so, dass $X {\upharpoonright} [n_l, n_{l+1}) \notin J_l$ für alle $l \notin \{k_u : u \in \omega\}$.
Wir konstruieren nun eine kleine Klasse H_4, welche F überdeckt.
Für $l \in \omega$ sei

$$\tilde{I}_l = [m_l, n_{l+1})$$

und

$$T_l = \begin{cases} \{s \in {}^{\tilde{I}_l}2 : X{\upharpoonright}[n_l, m_l)^\frown s \in J_l \vee s^\frown X{\upharpoonright}[n_{l+1}, m_{l+1}) \in J'_l\} & , falls\ l = k_u \\ & \quad mit\ einem\ u \in \omega \\ \emptyset & , sonst. \end{cases}$$

Dann definieren wir

$$H_4 = (\tilde{I}_l, T_l)_{l \in \omega}.$$

Zu zeigen bleibt:

(i) H_4 ist klein.

(ii) $F \subseteq H_4$.

Zu (i):
Wegen $X \notin H_3$ existiert ein $r_0 \in \omega$, so dass $X{\upharpoonright}[n_r, m_r) \notin S_r \cup S'_r$ für alle $r \geq r_0$. Sei $u_0 \in \omega$ so groß, dass $k_u \geq r_0$ für alle $u \geq u_0$ gilt. Somit gilt für $u \geq u_0$ nach Definition von S_{k_u}, dass es weniger als $2^{n_{k_u+1} - m_{k_u} - k_u}$ Erweiterungen von $X{\upharpoonright}[n_{k_u}, m_{k_u})$ inJ_{k_u} gibt, da sonst $X{\upharpoonright}[n_{k_u}, m_{k_u}) \in S_{k_u}$ wäre. Weiter gilt nach Definition von S'_{k_u+1} und wegen $k_u + 1 > r_0$, dass es weniger als

$2^{n_{k_u+1}-m_{k_u}-(k_u+1)}$ Erweiterungen von $X{\uparrow}[n_{k_u+1}, m_{k_u+1})$ in J'_{k_u} gibt, da sonst $X{\uparrow}[n_{k_u+1}, m_{k_u+1}) \in S'_{k_u+1}$ wäre.
Nach Definition von T_l gilt daher für $u \geq u_0$:
$|T_{k_u}| \leq 2^{n_{k_u+1}-m_{k_u}-k_u} + 2^{n_{k_u+1}-m_{k_u}-(k_u+1)} < 2 \cdot 2^{n_{k_u+1}-m_{k_u}-k_u}$
$= 2^{|\tilde{I}_{k_u}|} \cdot 2^{1-k_u}$.
Damit erhalten wir

$$\sum_{l \in \omega} |T_l| \cdot 2^{-|\tilde{I}_l|} \leq \sum_{u < u_0} |T_{k_u}| \cdot 2^{-|\tilde{I}_{k_u}|} + \sum_{u \geq u_0} 2^{1-k_u} < \infty$$

und haben somit gezeigt, dass H_4 klein ist.

Zu (ii):
Angenommen es existiere $Y \in F \setminus H_4$.
Definiere dann $Z \in {}^{\omega}2$ durch

$$Z(n) = \begin{cases} Y(n) & , falls\ n \in \bigcup_{u \in \omega} \tilde{I}_{k_u} \\ X(n) & , sonst. \end{cases}$$

Wegen $X \cap Y \subseteq Z$ gilt offensichtlich $Z \in F$.
Wir zeigen nun, dass $Z \notin H_1 \cup H_2$ gilt, so dass wir einen Widerspruch zu $F \subseteq H_1 \cup H_2$ erhalten.
Sei $l_0 \in \omega$ so, dass $Y{\uparrow}\tilde{I}_l \notin T_l$ für alle $l \geq l_0$.

Wir zeigen zunächst $Z \notin H_1$. Sei $u_0 \in \omega$ so, dass $k_u \geq l_0$ für alle $u \geq u_0$. Es genügt zu zeigen, dass $Z{\uparrow}I_m \notin J_m$ für alle $m \geq k_{u_0}$ gilt. Sei also $m \geq k_{u_0}$:
1.Fall: Sei $m \neq k_u$ für jedes $u \in \omega$ (in diesem Fall benötigen wir nicht einmal $m \geq k_{u_0}$). Wegen $\tilde{I}_{k_u} \subseteq I_{k_u}$ für alle u gilt dann $I_m \bigcap\ (\bigcup_{u \in \omega} \tilde{I}_{k_u}) = \emptyset$ und wir erhalten $Z{\uparrow}I_m = X{\uparrow}I_m$. Nach Wahl der Folge $\langle k_u : u \in \omega \rangle$ gilt daher $Z{\uparrow}I_m \notin J_m$.
2.Fall: Sei $m = k_u$ für ein $u \geq u_0$. Dann ist $X{\uparrow}I_m \in J_m$ und wegen $[n_m, m_m)$ $\notin \bigcup_{u \in \omega} \tilde{I}_{k_u}$ gilt ferner $Z{\uparrow}[n_m, m_m) = X{\uparrow}[n_m, m_m)$. Falls $Z{\uparrow}I_m \in J_m$ gelten würde, so würde nach Definition von T_m $\quad Z{\uparrow}\tilde{I}_m \in T_m$ gelten. Wegen $Z{\uparrow}\tilde{I}_m = Y{\uparrow}\tilde{I}_m$ würde daraus jedoch $Y{\uparrow}\tilde{I}_m \in T_m$ folgen, was wegen $u \geq u_0$ ein Widerspruch wäre.

Nun zeigen wir $Z \notin H_2$. Wegen $X \notin H_2$ existiert ein $r_0 \in \omega$ mit $X_{\uparrow I'_r} \notin J'_r$ für alle $r \geq r_0$. Sei nun $u_0 \in \omega$ so, dass $k_u \geq \max\{l_0, r_0\}$ für alle $u \geq u_0$. Wir zeigen, dass $Z_{\uparrow I'_m} \notin J'_m$ für alle $m \geq k_{u_0}$ gilt. Sei also $m \geq k_{u_0}$:
1.Fall: Sei $m \neq k_u$ für jedes $u \geq u_0$. Wegen $\tilde{I}_{k_u} \subseteq I'_{k_u}$ für alle u gilt dann $I'_m \bigcap (\bigcup_{u \in \omega} \tilde{I}_{k_u}) = \emptyset$ und wir erhalten $Z_{\uparrow I'_m} = X_{\uparrow I'_m}$. Wegen $m \geq r_0$ gilt daher $Z_{\uparrow I'_m} \notin J'_m$.
2.Fall: Sei $m = k_u$ für ein $u \geq u_0$. Dann gilt $Z_{\uparrow \tilde{I}_m} = Y_{\uparrow \tilde{I}_m}$ und $Z_{\uparrow [n_{m+1}, m_{m+1})} = X_{\uparrow [n_{m+1}, m_{m+1})}$. Wegen $m \geq l_0$ gilt $Y_{\uparrow \tilde{I}_m} \notin T_m$ und daher folgt $Z_{\uparrow I'_m} \notin J'_m$ nach Definition von T_m.

Damit ist F klein.

Im nächsten Schritt konstruieren wir nun eine Familie $\{A_n : n \in \omega\}$ mit den gewünschten Eigenschaften (a)-(d).

Sei $(I_n, J_n)_{n\in\omega}$ eine kleine Klasse mit $F \subseteq (I_n, J_n)_{n\in\omega}$. Für $n \in \omega$ definieren wir

$$J'_n = \{s \in J_n : \forall u \in {}^{I_n}2\ (s^{-1}(1) \subseteq u^{-1}(1) \to u \in J_n)\}.$$

Beh.: Es gilt $F \subseteq (I_n, J'_n)_{n\in\omega}$.
Bew.: Angenommen es existiere ein $X \in F \setminus \{x \in {}^{\omega}2 : \exists^{\infty} n\ x{\restriction}n \in J'_n\}$. Sei $n_* \in \omega$ so, dass für alle $n \geq n_*$ $X{\restriction}I_n \notin J'_n$ gilt. Da $X \in F$ gilt, existiert eine echt aufsteigende Folge natürlicher Zahlen $\langle n_k : k \in \omega\rangle$ mit $n_0 \geq n_*$ und $\{n \geq n_0 : X{\restriction}I_n \in J_n\} = \{n_k : k \in \omega\}$.
Für jedes $k \in \omega$ existiert dann ein $u_{n_k} \in {}^{I_{n_k}}2$ mit $X{\restriction}I_{n_k}{}^{-1}(1) \subseteq u_{n_k}^{-1}(1)$ und $u_{n_k} \notin J_{n_k}$. Definiere $\tilde{X}$ durch

$$\tilde{X}(m) = \begin{cases} X(m) & , falls\ m \notin \bigcup_{k\in\omega} I_{n_k} \\ u_{k_n}(m) & , falls\ m \in I_{n_k}. \end{cases}$$

Dann gilt offensichtlich $X \subset \tilde{X}$ und da F ein Filter ist somit $\tilde{X} \in F$.
Dies ist jedoch ein Widerspruch, da $\tilde{X}$ nach Konstruktion kein Element von $(I_n, J_n)_{n\in\omega}$ sein kann.

Identifizieren wir Elemente von J'_n mit Teilmengen von ω, so können wir nun die Familie $\{A_n : n \in \omega\}$ definieren durch

$$A_n = \{a \subseteq I_n : a\ ist\ \subseteq -minimales\ Element\ in\ J'_n\}$$

für $n \in \omega$.

Wir müssen zeigen, dass $\{A_n : n \in \omega\}$ die Bedingungen (a)-(d) erfüllt.
(a) klar ($2^{|I_n|}$ ist endlich).
(b) klar (die I_n sind disjunkt).
(d) klar (nach Konstruktion von $\{A_n : n \in \omega\}$).

Zu zeigen bleibt (c):
Wegen $|J'_n| \leq |J_n|$ für alle $n \in \omega$ gilt $\sum_{n\in\omega} |J'_n| \cdot 2^{-|I_n|} < \infty$ und es genügt zu zeigen, dass

$$|J'_n| \cdot 2^{-|I_n|} = \mu(\{X \subseteq \omega : \exists a \in A_n\ a \subseteq X\}) \tag{5}$$

für alle $n \in \omega$ gilt.
Sei also $n \in \omega$. Sei $a_1, ..., a_m$ eine Aufzählung aller Elemente in A_n.

- Für $1 \le i \le m$ sei

$$B_{a_i} = \{X \subseteq \omega : a_i \subseteq X \wedge \forall j < i \; a_j \not\subseteq X\}.$$

Dann gilt $\{X \subseteq \omega : \exists a \in A_n \; a \subseteq X\} = \dot{\bigcup}_{(1 \le i \le m)} B_{a_i}$ und somit $\mu(\{X \subseteq \omega : \exists a \in A_n \; a \subseteq X\}) = \sum_{i=1}^{m} \mu(B_{a_i})$.

- Analog schreiben wir J'_n als disjunkte Vereinigung. Für $1 \le i \le m$ sei

$$J_n'^{a_i} = \{s \in J'_n : a_i \subseteq s \wedge \forall j < i \; a_j \not\subseteq s\}.$$

Dann gilt $J'_n = \dot{\bigcup}_{(1 \le i \le m)} J_n'^{a_i}$ und somit $|J'_n| = \sum_{i=1}^{m} |J_n'^{a_i}|$.

Wir zeigen, dass für $1 \le i \le m$ gilt:

$$\mu(B_{a_i}) = |J_n'^{a_i}| \cdot 2^{-|I_n|}. \tag{6}$$

Dazu zeigen wir etwas allgemeiner, dass für jedes endliche $C \subseteq \omega$ und für $a, a_j \subseteq I_n$ mit $j \in C$ für die Mengen

$$U_C^a = \{X \subseteq \omega : a \subseteq X \wedge \forall j \in C \; a_j \not\subseteq X\}$$

und

$$J_C^a = \{s \in J'_n : a \subseteq s \wedge \forall j \in C \; a_j \not\subseteq s\}$$

gilt:

$$\mu(U_C^a) = |J_C^a| \cdot 2^{-|I_n|}.$$

Wir führen eine Induktion nach $|C|$:

- $|C| = 0$:
Dann gilt $\mu(U_C^a) = \mu(\{X \subseteq \omega : a \subseteq X\}) = 2^{-|a|}$ und $|J_C^a| = |\{s \in J'_n : a \subseteq s\}| = 2^{|I_n|-|a|}$. Also folgt $\mu(U_C^a) = |J_C^a| \cdot 2^{-|I_n|}$.

- $|C| = n+1$:
Dann gilt $U_C^a = \{X \subseteq \omega : a \subseteq X\} \setminus \dot{\bigcup}_{(A \dot{\cup} B = C \text{ und } A \neq \emptyset)} \{X \subseteq \omega : a \subseteq X \wedge \forall k \in A \; a_k \subseteq X \wedge \forall j \in B \; a_j \not\subseteq X\} = \{X \subseteq \omega : a \subseteq X\} \setminus \dot{\bigcup}_{(A \dot{\cup} B = C \text{ und } A \neq \emptyset)} \{X \subseteq \omega : (a \cup \bigcup_{k \in A} a_k) \subseteq X \wedge \forall j \in B \; a_j \not\subseteq X\}$.
Analog gilt $J_C^a = \{s \in J'_n : a \subseteq s\} \setminus \dot{\bigcup}_{(A \dot{\cup} B = C \text{ und } A \neq \emptyset)} \{s \in J'_n : a \subseteq s \wedge \forall k \in A \; a_k \subseteq s \wedge \forall j \in B \; a_j \not\subseteq s\} = \{s \in J'_n : a \subseteq s\} \setminus \dot{\bigcup}_{(A \dot{\cup} B = C \text{ und } A \neq \emptyset)} \{s \in J'_n : (a \cup \bigcup_{k \in A} a_k) \subseteq s \wedge \forall j \in B \; a_j \not\subseteq s\}$.
Wegen $A \dot{\cup} B = C$ und $A \neq \emptyset$ gilt dabei $|B| < |C|$.
Somit gilt: $\mu(U_C^a) = \mu(\{X \subseteq \omega : a \subseteq X\}) - \sum_{(A \dot{\cup} B = C \text{ und } A \neq \emptyset)} \mu(\{X \subseteq \omega : (a \cup \bigcup_{k \in A} a_k) \subseteq X \wedge \forall j \in B \; a_j \not\subseteq X\}) \overset{IV}{=} \mu(\{X \subseteq \omega : a \subseteq X\}) - \sum_{(A \dot{\cup} B = C \text{ und } A \neq \emptyset)} |J_B^{(a \cup \bigcup_{i \in A} a_i)}| \cdot 2^{-|I_n|} = |J_\emptyset^a| \cdot 2^{-|I_n|} - \sum_{(A \dot{\cup} B = C \text{ und } A \neq \emptyset)} |J_B^{(a \cup \bigcup_{i \in A} a_i)}| \cdot 2^{-|I_n|} = (|J_\emptyset^a| - \sum_{(A \dot{\cup} B = C \text{ und } A \neq \emptyset)} |J_B^{(a \cup \bigcup_{i \in A} a_i)}|) \cdot 2^{-|I_n|} = |J_C^a| \cdot 2^{-|I_n|}$.

Nun folgt die Behauptung (5) aus (6), denn es gilt:

$|J'_n| \cdot 2^{-|I_n|} = \sum_{i=1}^m |J_n'^{a_i}| \cdot 2^{-|I_n|} = \sum_{i=1}^m \mu(B_{a_i})$
$= \mu(\{X \subseteq \omega : \exists a \in A_n \ X \subseteq a\})$.

Also gilt (c). □

Wir können nun den Beweis von Satz (5.3) führen:
Sei F ein rapider Filter auf ω. Nehmen wir an, dass F messbar ist. Dann gilt

$$F \subseteq \{X \subseteq \omega : \exists^\infty n \ \exists a \in A_n \ a \subseteq X\},$$

wobei $\{A_n : n \in \omega\}$ eine Familie wie in Satz (5.4) sei.
Für $n \in \omega$ sei

$$B_n = \{a \in [\omega]^n : \exists k \in \omega \ a \in A_k\}.$$

Jedes B_n ist endlich. Denn nehmen wir an, es gibt ein $n \in \omega$, so dass B_n unendlich ist. Da für jedes $k \in \omega$ A_k endlich ist, existiert dann eine Folge $\langle a_{m_i} : i \in \omega \rangle$ mit $m_i \in \omega$, $m_i < m_j$ für $i < j$ und $a_{m_i} \in (A_{m_i} \cap B_n)$ für alle $i \in \omega$. Dann gilt aber wegen $\mu(\{X \subseteq \omega : a \subseteq X\}) = 2^{-n}$ für alle $a \in B_n$:

$\sum_{k \in \omega} \mu(\{X \subseteq \omega : \exists a \in A_k \ a \subseteq X\}) \geq \sum_{i \in \omega} \mu(\{X \subseteq \omega : a_{m_i} \subseteq X\}) = \sum_{i \in \omega} 2^{-n} = \infty$.

Dies ist offensichtlich ein Widerspruch.
Wir können daher eine monoton wachsende Funktion $f : \omega \to \omega$ definieren durch

$$f(n) = min\{k : \forall i \leq n+1 \ \forall a \in B_i \ a \subseteq k\}$$

für $n \in \omega$.
Da F rapide ist, existiert ein $Z \in F$ mit $|Z \cap f(n)| \leq n$ für alle $n \in \omega$.
Für jedes $n \in \omega$ und für jedes $a \in A_n$ gilt $a \in B_{|a|}$, insbesondere also $a \subseteq f(|a|-1)$. Wir erhalten daher

$$|Z \cap a| \leq |Z \cap f(|a|-1)| \leq |a| - 1 < |a|$$

und somit $a \not\subseteq Z$.
Dies ist jedoch ein Widerspruch, denn wegen $Z \in F$ gilt
$Z \in \{X \subseteq \omega : \exists^\infty n \ \exists a \in A_n \ a \subseteq X\}$.
Also ist F nicht messbar. □

5.2 $\boldsymbol{\Sigma}^1_3$-LM und $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-PSP

Wir werden nun folgenden Satz beweisen:

Satz 5.10 *Es gilt:* $\boldsymbol{\Sigma}^1_3$*-LM* $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\Pi}^1_1$*-PSP.*

Dazu führen wir zunächst den *Raisonnier-Filter* ein (eine äquivalente Definition findet sich in [Raisonnier]).

Definition 5.11

i) Für $x,\ y \in {}^\omega 2,\ x \neq y$ *sei*

$$h(x,y) = Inf\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\}.$$

ii) Für eine überabzählbare Teilklasse X *des Cantor-Raumes sei der Raisonnier-Filter* $\mathcal{F}_X$ *wie folgt definiert:*

$$\begin{aligned} G \in \mathcal{F}_X :\leftrightarrow\ & \exists (T_n : n \in \omega)[\forall n\ T_n \text{ ist Baum auf } \{0,1\}\ \wedge \\ & [\forall x\ (x \in X \to \exists n\ \forall m\ x{\restriction}m \in T_n)\ \wedge\ \forall n\ \forall x\ \forall y \\ & (\forall m\ x{\restriction}m \in T_n\ \wedge\ \forall m\ y{\restriction}m \in T_n\ \wedge\ x \neq y \\ & \to \exists m \in G\ x{\restriction}m \neq y{\restriction}m\ \wedge\ x{\restriction}(m-1) = y{\restriction}(m-1))]]. \end{aligned}$$

Etwas anschaulicher, wenn auch formal nicht ganz korrekt (da wir nicht über Folgen von Klassen sprechen können) bedeutet dies

$$\begin{aligned} G \in \mathcal{F}_X \Leftrightarrow\ & \text{es existiert eine „Folge" } (Y_n : n \in \omega),\ Y_n \subseteq {}^\omega 2 \text{ und } Y_n \\ & \text{ist abgeschlossen für alle } n, \text{ mit } X \subseteq \textstyle\bigcup_{n\in\omega} Y_n \text{ und} \\ & \textstyle\bigcup_{n\in\omega} h(Y_n) \subseteq G. \end{aligned}$$

Die Bedingung, dass die Y_n *abgeschlossen sein müssen, kann dabei vernachlässigt werden: Sind die* Y_n *nicht abgeschlossen, so können wir ohne die Mengen* $h(Y_n)$ *zu vergrößern, die Abschlüsse der* Y_n *als Folge wählen. Denn sind* x, y *im Abschluss eines* Y_n*, dann existieren Folgen* $(x_n : n \in \omega)$*,* $(y_n : n \in \omega)$ *in* Y_n *mit* $lim\ x_n = x$ *und* $lim\ y_n = y$*. Gilt* $h(x,y) = m$*, so wählen wir* $j, k \in \omega$ *mit* $d(x, x_j) < \frac{1}{m+1}$*,* $d(y, y_m) < \frac{1}{m+1}$ *und erhalten* $h(x_j, y_k) = m$*.*

Um die weiteren Beweise nicht unnötig zu verkomplizieren und dadurch die Beweisideen zugunsten technischer Details in den Hintergrund treten zu lassen, werden wir im Folgenden stets mit dieser zweiten Charakterisierung des Raisonnier-Filters arbeiten. Dabei verlieren wir nicht an Genauigkeit, da es in allen Fällen problemlos möglich sein wird, die Y_n als $[T_n]$ zu schreiben, wobei die T_n als Bäume auf $\{0,1\}$ "harmlose" Mengen sind.

Lemma 5.12 *$\mathcal{F}_X$ ist ein nichttrivialer Filter auf ω mit der Eigenschaft, dass mit $G \in \mathcal{F}_X$ und $n \in \omega$ auch $G \cap \{k \in \omega : k > n\} \in \mathcal{F}_X$ gilt. Ferner ist $\mathcal{F}_X$ invariant unter endlichen Abänderungen seiner Elemente.*

Beweis:
Ist $G \in \mathcal{F}_X$ und $G \subseteq H$, so gilt offensichtlich auch $H \in \mathcal{F}_X$.
Seien $G, H \in \mathcal{F}_X$ und $(Y_n^G : n \in \omega)$, $(Y_n^H : n \in \omega)$ zugehörige Folgen wie in Definition (5.11). Definiere dann $(Y_n : n \in \omega)$ durch

$$Y_n = Y_k^G \cap Y_m^H \text{ , falls } n = \Gamma(k, m) \text{ gilt,}$$

wobei $\Gamma : \omega \times \omega \to \omega$ eine Bijektion sei. Offensichtlich ist jedes Y_n abgeschlossen.
Seien $a \in X$ und $k, m \in \omega$ mit $a \in Y_k^G$ und $a \in Y_m^H$. Dann gilt $a \in Y_{\Gamma(k,m)}$ und somit $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} Y_n$. Des Weiteren gilt für $x, y \in Y_{\Gamma(k,m)}$ mit $x \neq y$ $h(x, y) \in G$ und $h(x, y) \in H$. Also folgt $h(x, y) \in G \cap H$, d.h. $\bigcup_{n\in\omega} h(Y_n) \subseteq G \cap H$.
$\omega \in \mathcal{F}_X$ ist klar. Angenommen $\emptyset \in \mathcal{F}_X$. Dann existiert eine Folge $(Y_n : n \in \omega)$, mit abgeschlossenen Y_n und $\bigcup_{n\in\omega} h(Y_n) \subseteq \emptyset$, d.h. nach Definition von h muss $|Y_n| \leq 1$ für jedes $n \in \omega$ gelten. Wegen $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ wäre X dann aber abzählbar.
Sei $m \in \omega$ und sei $(Y_n : n \in \omega)$ eine Aufzählung aller Klassen $\overline{\mathcal{U}_s}$ für $s \in {}^m2$. Dann gilt $h(Y_n) = \omega \backslash m$ für alle $n \in \omega$ und wegen $X \subseteq {}^\omega 2 = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ folgt somit $\omega \backslash m \in \mathcal{F}_X$. Daraus folgt zum einen, dass $\mathcal{F}_X$ nicht trivial ist und zum anderen, dass $G \cap \{k \in \omega : k > n\} = G \cap \omega \backslash n \in \mathcal{F}_X$ für jedes $G \in \mathcal{F}_X$ und für jedes $n \in \omega$ gilt.
Sei nun $Z \subseteq \omega$, $Z \in \mathcal{F}_X$ und sei $Y \subseteq \omega$ derart, dass für alle bis auf endlich viele $x \in Z \cup Y \quad x \in Z \cap Y$ gilt. Sei $\tilde{x} \in Z \cup Y$ maximal mit $\tilde{x} \notin Z \cap Y$. Dann folgt wegen $Z \cap \{k \in \omega : k > \tilde{x}\} \in \mathcal{F}_X$ und $Z \cap \{k \in \omega : k > \tilde{x}\} \subseteq Y$ schon $Y \in \mathcal{F}_X$ □

Lemma 5.13 *Ist X eine überabzählbare $\Sigma_2^1[Y]$-Klasse für ein $Y \in \mathcal{N}$, so ist $\mathcal{F}_X$ $\Sigma_3^1[Y]$.*

Beweis:
Dies folgt direkt aus Definition (5.11). □

Wir beweisen nun Satz (5.10). Dabei verwenden wir ein entscheidendes Lemma, welches ein hinreichendes Kriterium dafür liefert, wann der Raisonnier-Filter rapide ist. Der Übersicht halber beweisen wir dieses jedoch erst im Anschluss.

Beweis von Satz (5.10):
Gelte $\mathbf{\Sigma}_3^1$-LM. Nehmen wir an, $\mathbf{\Pi}_1^1$-PSP gelte nicht. Dann existiert ein $Y \in \mathcal{N}$, so dass $\Pi_1^1[Y]$-PSP nicht gilt und wir erhalten mit Satz (4.11), dass

$X := L[Y] \cap {}^\omega 2$ überabzählbar ist. Daher existiert nach Definition (5.11) der zugehörige Raisonnier-Filter $\mathcal{F}_X$ und da X ferner $\Sigma^1_2[Y]$ ist, erhalten wir mit Lemma (5.13), dass $\mathcal{F}_X$ $\Sigma^1_3[Y]$ ist.

Um einen Widerspruch zur Voraussetzung $\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM zu erhalten, werden wir nun zeigen, dass $\mathcal{F}_X$ rapide und daher nach Satz (5.3) nicht messbar ist.

Für $H \subseteq {}^\omega 2 \times {}^\omega 2$ und $x \in {}^\omega 2$ definieren wir die x-Sektion von H durch

$$H_x = \{y \in {}^\omega 2 : (x, y) \in H\}.$$

Des Weiteren setzen wir

$$H(X) = \bigcup_{x \in X} H_x.$$ [10]

Wir verwenden nun folgendes Lemma, dessen Beweis wir später nachtragen werden:

Lemma 5.14 *Sei $X \subseteq {}^\omega 2$ überabzählbar. Gilt für jede G_δ-Klasse $H \subseteq {}^\omega 2 \times {}^\omega 2$, deren Sektionen alle vom Maß Null sind, dass auch $H(X)$ Null ist, so ist $\mathcal{F}_X$ ein rapider Filter.*

Um die Prämisse von Lemma (5.14) für $X = L[Y] \cap {}^\omega 2$ nachzuprüfen, werden wir folgende Eigenschaften von X benötigen:

- X ist $\Sigma^1_2[Y]$.
- Schränken wir die kanonische Wohlordnung $\leq_Y$ von $L[Y]$ auf X ein, so erhalten wir eine definierbare $\Sigma^1_2[Y]$-Wohlordnung auf X, welche wir im Folgenden mit $\leq_X$ bezeichnen.
- Jedes echte Anfangsstück von $\leq_X$ ist abzählbar. Denn gilt $x \in X$, so existiert ein (abzählbares) $\alpha \in OR$ mit $x \in L_\alpha[Y]$. Da die kanonische Wohlordnung von $L[Y]$ gerade so definiert ist, dass alle Vorgänger von x schon in $L_\alpha[Y]$ enthalten sind und da man ferner mit Induktion zeigt, dass $|L_\alpha[Y]| = \alpha$ gilt, folgt daraus die Behauptung.

Sei nun also $H \subseteq {}^\omega 2 \times {}^\omega 2$ eine G_δ-Klasse mit Null-Sektionen. Für $y \in H(X)$ sei $\lambda(y)$ das bezüglich $\leq_X$ kleinste $x \in X$ mit $y \in H_x$.
Definiere

$$\tilde{H}(X) = \{(x, y) \in H(X) \times H(X) : \lambda(x) <_X \lambda(y)\}.$$

$\tilde{H}(X)$ ist $\mathbf{\Sigma}^1_2$. Denn X sowie $\leq_X$ sind $\mathbf{\Sigma}^1_2$, H ist Borel und es gilt:
$(x, y) \in \tilde{H}(X) \leftrightarrow \exists \tilde{x} \in X\ (\tilde{x}, x) \in H\ \wedge\ \exists \tilde{y} \in X\ (\tilde{y}, y) \in H\ \wedge\ \lambda(x) <_X \lambda(y)$.

[10] Wir verwenden hier und im Folgenden übersichtshalber Mengenschreibweise, auch wenn es sich um echte Klassen handelt.

Damit ist $\tilde{H}(X)$ nach Voraussetzung messbar.
Für festes $y \in \tilde{H}(X)$ ist $\{\lambda(y\prime) : y\prime \in H(X) \ \wedge \ \lambda(y\prime) <_X \lambda(y)\}$ als Teilmenge des durch $\leq_{X\uparrow\lambda(y)}$ gegebenen Anfangsstücks von $\leq_X$ höchstens abzählbar und da des Weiteren für jedes $y\prime \in H(X)$ die Klasse $\{x : x \in H(X) \wedge \lambda(x) = \lambda(y\prime)\}$ als Teilklasse von $H_{\lambda(y\prime)}$ das Maß Null hat, folgt, dass die Klasse $\{x : (x,y) \in \tilde{H}(X)\}$ als höchstens abzählbare Vereinigung von Nullklassen selbst Null ist. Mit dem Satz von Fubini (vgl.[Schmitz]) erhalten wir, dass $\tilde{H}(X)$ eine Nullklasse ist. Wenden wir den Satz von Fubini ein zweites Mal an, so erhalten wir, dass die Klasse aller $x \in H(X)$ mit der Eigenschaft, dass $\{y : (x,y) \in \tilde{H}(X)\}$ keine Nullklasse ist, eine Nullklasse ist. Sei $x_0 \in H(X)$ derart, dass $\{y : (x_0, y) \in \tilde{H}(X)\}$ Null ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} H(X) = \{y : (y, x_0) \in \tilde{H}(X)\} \cup \{y : y \in H(X) \wedge \lambda(y) = \lambda(x_0)\} \\ \cup \{y : (x_0, y) \in \tilde{H}(X)\}. \end{aligned}$$

$H(X)$ ist somit eine Nullklasse und wir erhalten mit Lemma (5.14), dass $\mathcal{F}_X$ ein rapider Filter ist. □

Es bleibt Lemma (5.14) zu zeigen. Dazu beweisen wir zunächst ein weiteres Lemma.

Lemma 5.15 *Sei $E \in {}^{\omega}2$ eine Nullklasse. Dann existiert eine abgeschlossene Klasse $B \subseteq {}^{\omega}2$, so dass gilt:*

i) $B \cap E = \emptyset$.

ii) $\mu(B) > 0$.

iii) Für jedes $s \in {}^{<\omega}2$ mit $B \cap \mathcal{U}_s \neq \emptyset$ gilt $\mu(B \cap \mathcal{U}_s) \geq (\frac{1}{8})^{|s|+1}$.

Beweis:
Sei $B_0 \subseteq {}^{\omega}2$ abgeschlossen mit $B_0 \cap E = \emptyset$ und $\mu(B_0) > \frac{5}{8}$. Sei T_0 ein Baum auf $\{0,1\}$ mit $B_0 = [T_0]$. Definiere rekursiv Bäume T_k für $k \in \omega$ durch

$$\begin{aligned} T_{k+1} = \{h \in T_k : \exists s \in {}^{k+1}2 \wedge \mu([T_k] \cap \mathcal{U}_s) \geq 1/8^{k+1} \\ \wedge \exists x \in [T_k] \cap \mathcal{U}_s \ \exists n \in \omega \ h = x_{\uparrow n}\}. \end{aligned}$$

Sei

$$T = \bigcap_{k\in\omega} T_k.$$

Dann definieren wir für jedes $k \in \omega$

$$B_k = [T_k]$$

und schließlich

$$B = [T].$$

Offensichtlich gilt $x \in B$ genau dann wenn $x \in B_k$ für jedes $k \in \omega$ gilt, also $B = \bigcap_{k\in\omega} B_k$. [11] Weiter gilt für jedes $k \in \omega$ $B_{k+1} = \bigcup\{B_k \cap \mathcal{U}_s : s \in {}^{k+1}2 \wedge \mu(B_k \cap \mathcal{U}_s) \geq 1/8^{k+1}\}$.

Wir müssen zeigen, dass B die gewünschten Eigenschaften besitzt.

B ist offensichtlich abgeschlossen. Also gilt (*1*).

Es gilt wegen $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 ... \supseteq B_n ... \supseteq B$:

$$\mu(B) \geq \mu(B_0) - \sum_{k\in\omega} \mu(B_k \setminus B_{k+1}). \tag{7}$$

Wegen ${}^{\omega}2 = \mathcal{U}_{\langle 0\rangle} \cup \mathcal{U}_{\langle 1\rangle}$ gilt weiter

$$\mu(B_k \setminus B_{k+1}) = \mu(\mathcal{U}_{\langle 0\rangle} \cap (B_k \setminus B_{k+1})) + \mu(\mathcal{U}_{\langle 1\rangle} \cap (B_k \setminus B_{k+1})). \tag{8}$$

Für $k \in \omega$ und $s \in {}^{<\omega}2,\ 1 \leq |s| \leq k$ berechnen wir $\mu(\mathcal{U}_s \cap (B_k \setminus B_{k+1}))$. Wegen $\mathcal{U}_s = \dot{\bigcup}_{r\in {}^{(k+1-|s|)}2} \mathcal{U}_{s^\frown r}$ und wegen

$$\mu(\mathcal{U}_{s^\frown r} \cap (B_k \setminus B_{k+1})) = \begin{cases} 0 & , falls\ \mu(\mathcal{U}_{s^\frown r} \cap B_k) \geq 1/8^{k+1} \\ < 1/8^{k+1} & , sonst \end{cases}$$

für $r \in {}^{(k+1-|s|)}2$, folgt

$$\mu(\mathcal{U}_s \cap (B_k \setminus B_{k+1})) = \sum_{r\in {}^{(k+1-|s|)}2} \mu(\mathcal{U}_{s^\frown r} \cap (B_k \setminus B_{k+1})) \leq \frac{2^{k+1-|s|}}{8^{k+1}}. \tag{9}$$

Setzen wir (9) in (8) ein, so ergibt sich

$$\mu(B_k \setminus B_{k+1}) \leq 2 \cdot \frac{2^k}{8^{k+1}} = \frac{1}{4^{k+1}}$$

und wir erhalten aus (7) und mit $\mu(B_0) > \frac{1}{2}$ schließlich

$$\mu(B) \geq \mu(B_0) - \sum_{k\in\omega} \frac{1}{4^{k+1}} = \mu(B_0) - \frac{1}{2} > \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} > 0. \tag{10}$$

Damit gilt (*2*).

Sei nun $s \in {}^{<\omega}2$ mit $\mathcal{U}_s \cap B \neq \emptyset$.
Gilt $|s| = 0$, so erhalten wir mit (10) $\mu(\mathcal{U}_{\langle\ \rangle} \cap B) = \mu(B) > \frac{1}{8}$.

[11] Dies ist natürlich eine etwas informale Schreibweise, da die rechte Seite als abzählbarer Schnitt von Klassen zunächst so nicht definiert ist. Unsere Konstruktion mit Hilfe der Bäume (Mengen!) T_k bzw. T zeigt jedoch, dass diese Vereinigung von Klassen tatsächlich definierbar ist.

Nehmen wir nun $|s| > 0$ an. Aufgrund der Definition von B gilt $\mathcal{U}_s \cap B_{|s|} \neq \emptyset$ und nach Definition von $B_{|s|}$ folgt

$$\mu(\mathcal{U}_s \cap B_{|s|-1}) \geq 1/8^{|s|}$$

und

$$\mathcal{U}_s \cap B_{|s|} = \mathcal{U}_s \cap B_{|s|-1}. \tag{11}$$

Mit (9) und (11) erhalten wir nun

$$\mu(\mathcal{U}_s \cap B) \geq \mu(\mathcal{U}_s \cap B_{|s|}) - \sum_{k \geq |s|} \mu(\mathcal{U}_s \cap (B_k \setminus B_{k+1})) \geq \frac{1}{8^{|s|}} - \sum_{k \geq |s|} \frac{2^{k+1-|s|}}{8^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{8^{|s|}} - \frac{1}{8^{|s|}} \cdot 4^{|s|} \sum_{k \geq |s|} \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} = \frac{1}{8^{|s|}} - \frac{1}{8^{|s|}} \sum_{l \geq 1} \left(\frac{1}{4}\right)^{l} > \frac{1}{8^{|s|+1}}$$

und haben damit gezeigt, dass auch (*3*) erfüllt ist. □

Mit dem Beweis von Lemma (5.15) werden wir nun den Beweis von Lemma (5.14) führen und damit den Beweis von Satz (5.10) vervollständigen.

Beweis von Lemma (5.14):
Wir müssen zeigen: Für jede monoton wachsende Funktion $\phi_0 : \omega \to \omega$ existiert ein $G \in \mathcal{F}_X$, so dass für jedes $k \in \omega$ gilt:

$$|G \cap \phi_0(k)| \leq k.$$

Zunächst wählen wir eine Familie $(\tilde{A}(s,l,j))_{s \in {}^{<\omega}2, l \in \omega, j \in \omega}$ mit $\tilde{A}(s,l,j) \subseteq {}^{<\omega}\{0,1\}$, so dass die durch

$$x \in A(s,l,j) \leftrightarrow \exists r \in \tilde{A}(s,l,j)\ x \in \mathcal{U}_r$$

definierten offenen Klassen $A(s,l,j)$ unabhängig bzgl. des Lebesgue-Maßes sind (d.h. $\mu(\cap_{(s,l,j) \in B} A(s,l,j) = \prod_{(s,l,j) \in B} \mu(A(s,l,j))$ für jedes $B \subseteq {}^{<\omega}2 \times \omega \times \omega$) und $\mu(A(s,l,j)) = 2^{-(l+j)}$ für alle $s \in {}^{<\omega}2,\ l \in \omega$ und $j \in \omega$ gilt.
Dazu sei $\langle (s_k, l_k, j_k) : k \in \omega \rangle$ eine Aufzählung aller Tripel (s,l,j) mit $s \in {}^{<\omega}2,\ l \in \omega,\ j \in \omega$.
Wir definieren dann induktiv:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0, \\ \tilde{A}(s_1, l_1, j_1) &= \{r \in {}^{(r_1+l_1+j_1)}2 : \forall n\ (r_1 < n \leq r_1 + l_1 + j_1 \to r(n) = 1)\} \end{aligned}$$

und für $k > 1$

$$\begin{aligned} r_k &= r_{k-1} + l_{k-1} + j_{k-1}, \\ \tilde{A}(s_k, l_k, j_k) &= \{r \in {}^{(r_k+l_k+j_k)}2 : \forall n\ (r_k < n \leq r_k + l_k + j_k \to r(n) = 1)\}. \end{aligned}$$

Beachten wir, dass für endliches $B \subset \omega$ $\mu(\{x \in {}^{\omega}2 : \forall k \in B\ x(k) = 1\}) = 2^{-|B|}$ und ferner nach Definition der $\tilde{A}(s,l,j)$ für $k \neq m$ $(r_k, r_k + l_k + j_k] \cap (r_m, r_m + l_m + j_m] = \emptyset$ gilt, so erfüllt die Familie $(\tilde{A}(s,l,j))_{s \in {}^{<\omega}2, l \in \omega, j \in \omega}$ offensichtlich die gewünschten Eigenschaften.
Sei $\phi : \omega \to \omega$ monoton wachsend. Wir definieren $H^{\phi} \subseteq {}^{\omega}2 \times {}^{\omega}2$ durch

$$H^{\phi} = \bigcap_{j \in \omega} \bigcup_{j\prime \geq j} \bigcup_{l \geq j\prime} \{(x,y) : y \in A(x_{\uparrow \phi(l)}, l, j\prime)\}^{12}.$$

Es gilt:

i) Für festes $j\prime, l \in \omega$ ist die Klasse $C := \{(x,y) : y \in A(x_{\uparrow \phi(l)}, l, j\prime)\}$ offen (bezüglich der durch $\tilde{d}((x,y),(x\prime,y\prime))$ $=\max\{d(x,x\prime), d(y,y\prime)\}$ definierten Maximumsnorm $\tilde{d}$ auf ${}^{\omega}2 \times {}^{\omega}2$). Denn sei $(x,y) \in C$. Da $A(x_{\uparrow \phi(l)}, l, j\prime)$ offen ist, existiert ein $\tilde{\delta}$, so dass aus $d(\tilde{y}, y) < \tilde{\delta}$ schon $\tilde{y} \in A(x_{\uparrow \phi(l)}, l, j\prime)$ folgt. Dann gilt mit $\delta :=\min\{\tilde{\delta}, \frac{1}{|l|+1}\}$ für alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in {}^{\omega}2 : \tilde{d}((\tilde{x}, \tilde{y})(x,y)) < \delta \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) \in C$.
Damit ist H^{ϕ} offensichtlich eine G_{δ}-Klasse.

ii) Sei $\tilde{x} \in {}^{\omega}2$. Nach Definition von H^{ϕ} gilt dann für jedes $j \in \omega$:
$H^{\phi}_{\tilde{x}} = \{y : (\tilde{x}, y) \in H^{\phi}\} \subseteq \bigcup_{j\prime \geq j} \bigcup_{l \geq j\prime} A(\tilde{x}_{\uparrow \phi(l)}, l, j\prime)$. Wegen $\mu(A(\tilde{x}_{\uparrow \phi(l)}, l, j\prime)) = 2^{-(l+j\prime)}$ gilt für jedes $j \in \omega$ $\mu(\bigcup_{j\prime \geq j} \bigcup_{l \geq j\prime} A(\tilde{x}_{\uparrow \phi(l)}, l, j\prime)) \leq \sum_{j\prime \geq j} \sum_{l \geq j\prime} 2^{-(l+j\prime)} \leq \sum_{j\prime \geq j} (2^{(-j\prime)} \cdot \sum_{l \in \omega} 2^{(-l)}) = \sum_{j\prime \geq j} 2^{-j\prime+1}$. Da die Reihe $\sum_{j\prime \in \omega} 2^{-j\prime+1}$ konvergiert, wird $\sum_{j\prime \geq j} 2^{-j\prime+1}$ für genügend große j beliebig klein, so dass $\mu(H^{\phi}_{\tilde{x}}) = 0$ folgt.

Da H^{ϕ} somit eine G_{δ}-Klasse mit Nullsektionen ist, ist $H^{\phi}(X)$ nach Voraussetzung damit eine Nullklasse.

Nach Lemma (5.15) existiert ein abgeschlossenes $B^{\phi} \subseteq {}^{\omega}2$ mit $B^{\phi} \cap H^{\phi}(X) = \emptyset$, $\mu(B^{\phi}) > 0$ und der Eigenschaft, dass für alle $s \in {}^{<\omega}2$ gilt: $B^{\phi} \cap \mathcal{U}_s \neq \emptyset \Rightarrow \mu(B^{\phi} \cap \mathcal{U}_s) \geq (\frac{1}{8})^{|s|+1}$.

Für jedes $x \in X$ und für beliebiges $j \in \omega$ definieren wir

$$O^x_j = (\bigcup_{j\prime \geq j} \bigcup_{l \geq j\prime} A(x_{\uparrow \phi(l)}, l, j\prime)) \cap B^{\phi}.$$

Die O^x_j sind offen in B^{ϕ} und wegen $H^{\phi}(X) \cap B^{\phi} = \emptyset$ und $\bigcap_{j \in \omega} O^x_j \subseteq H^{\phi}_x \cap B^{\phi} \subseteq H^{\phi}(X) \cap B^{\phi}$ gilt $\bigcap_{j \in \omega} O^x_j = \emptyset$. Mit dem Satz von Baire, nach

[12] Da wir die offenen Klassen $A(s,l,j)$ wieder mit Hilfe der Mengen $\tilde{A}(s,l,j)$ repräsentieren können, ist die rechte Seite als Klasse definierbar:

$$(x,y) \in H^{\phi} \leftrightarrow \forall j \in \omega\ \exists j\prime \geq j\ \exists l \geq j\prime\ \exists r \in \tilde{A}(x_{\uparrow \phi(l)}, l, j)\ y \in \mathcal{U}_r.$$

welchem der höchstens abzählbare Schnitt dichter offener Klassen reeller Zahlen wieder dicht ist und welcher auch in ZFC^-bewiesen werden kann (vgl. [Jech]), folgt, dass nicht alle O_j^x dicht in B^ϕ sind. Es gibt also stets ein $s \in {}^{<\omega}2$ und ein $j \in \omega$ mit

$$B^\phi \cap \mathcal{U}_s \neq \emptyset \quad \text{und} \quad B^\phi \cap \mathcal{U}_s \cap O_j^x = \emptyset. \tag{12}$$

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \omega \times {}^{<\omega}2 \to \omega$ eine rekursive Bijektion mit $\langle j, s \rangle \geq \max\{j, |s|\}$ für alle $j \in \omega$ und $s \in {}^{<\omega}2$. Wir definieren eine Funktion $F^\phi : X \to \omega$ durch

$$F^\phi(x) = \text{ kleinstes } \langle j, s \rangle, \text{ so dass (12) gilt.}$$

Nun definieren wir eine Äquivalenzrelation R^ϕ auf X durch

$$R^\phi(x, y) \leftrightarrow$$

$$(F^\phi(x) = F^\phi(y) \wedge x_{\upharpoonright \phi(F^\phi(x))} = y_{\upharpoonright \phi(F^\phi(y))}).$$

R^ϕ hat höchstens abzählbar viele Äquivalenzklassen, denn ordnen wir jeder Äquivalenzklasse Y von R^ϕ dasjenige $\langle \langle j, s \rangle, \tilde{s} \rangle$ mit $(x \in Y \leftrightarrow F^\phi(x) = \langle j, s \rangle \ \wedge \ x_{\upharpoonright \phi(\langle j,s \rangle)} = \tilde{s})$ zu, so erhalten wir (aufgrund der Injektivität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$) eine Injektion nach ω.
Sei $(Y_n)_{n \in \omega}$ eine Aufzählung der Äquivalenzklassen von R^ϕ. Dann gilt offensichtlich $X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} Y_n$ und damit $Z_\phi := \bigcup_{n \in \omega} h(Y_n) \in \mathcal{F}_X$.

Wir zeigen nun folgende Behauptung:

$$\forall k \in \omega : \qquad |Z_\phi \cap \phi(k)| \leq k(3k+3)^2 2^{4k}. \tag{13}$$

Sei $k \in \omega$. Dann gilt

$$Z_\phi \cap \phi(k) = \{h(x, y) < \phi(k) : x, y \in X, x \neq y, R^\phi(x, y)\}$$

$$= \{h(x, y) < \phi(k) : x, y \in X, x \neq y, F^\phi(x) = F^\phi(y), x_{\upharpoonright \phi(F^\phi(x))} = y_{\upharpoonright \phi(F^\phi(y))}\}.$$

Ist $z \in Z_\phi \cap \phi(k)$, so existieren also $x, y \in X$, $j_0 \in \omega$ und $s_0 \in {}^{<\omega}2$ mit $x \neq y$, $z = h(x, y) < \phi(k)$, $F^\phi(x) = F^\phi(y) = \langle j_0, s_0 \rangle$ und $x_{\upharpoonright \phi(\langle j_0, s_0 \rangle)} = y_{\upharpoonright \phi(\langle j_0, s_0 \rangle)}$. Wegen letzterem folgt aufgrund der Definition von h somit $h(x, y) \geq \phi(\langle j_0, s_0 \rangle)$. Da außerdem $h(x, y) < \phi(k)$ gilt, erhalten wir wegen der Monotonie von ϕ $\langle j_0, s_0 \rangle < k$.
Wir können also $|Z_\phi \cap \phi(k)|$ nach oben abschätzen, indem wir für alle $j \in \omega$, $s \in {}^{<\omega}2$ mit $\langle j, s \rangle < k$ die Kardinalität der Menge $M_{j,s} := \{h(x, y) < \phi(k) : x, y \in X, \ x \neq y, \ F^\phi(x) = F^\phi(y) = \langle j, s \rangle\}$ nach oben abschätzen und anschließend die so erhaltenen Abschätzungen summieren.
Seien also $j \in \omega$, $s \in {}^{<\omega}2$ mit $\langle j, s \rangle < k$.
Für $x, x\prime \in X$ mit $x_{\upharpoonright \phi(k)} = x\prime_{\upharpoonright \phi(k)}$ und für jedes $y \in X$ folgt nach Definition von h aus $h(x, y) < \phi(k)$ schon $h(x, y) = h(x\prime, y)$.

Wir schätzen $|M_{j,s}|$ daher nicht durch das Quadrat der Kardinalität von $\{x \in X : F^\phi(x) = \langle j,s\rangle\}$, sondern nur durch das Quadrat der Anzahl der verschiedenen möglichen Anfangsstücke der Länge $\phi(k)$ für Elemente aus $\{x \in X : F^\phi(x) = \langle j,s\rangle\}$ ab.
Die Menge der verschiedenen möglichen Anfangsstücke der Länge $\phi(k)$ für Elemente aus $\{x \in X : F^\phi(x) = \langle j,s\rangle\}$ ist enthalten in

$$\tilde{\triangle}(j,s) = \{t \in {}^{\phi(k)}2 : B^\phi \cap \mathcal{U}_s \neq \emptyset \wedge B^\phi \cap \mathcal{U}_s \cap A(t,k,j) = \emptyset\},$$

denn gilt $F^\phi(x) = \langle j,s\rangle$, so gilt aufgrund der Definition von F^ϕ:

$$B^\phi \cap \mathcal{U}_s \neq \emptyset \text{ und } B^\phi \cap \mathcal{U}_s \cap O_j^x = B^\phi \cap \mathcal{U}_s \cap (\bigcup_{j\prime \geq j} \bigcup_{l \geq j\prime} A(x_{\uparrow\phi(l)}, l, j\prime)) = \emptyset.$$

Wegen der Wahl von $\langle,\rangle$ und wegen $\langle j,s\rangle < k$ gilt $j < k$ und daher $A(x_{\uparrow\phi(k)}, k, j) \subseteq (\bigcup_{j\prime \geq j} \bigcup_{l \geq j\prime} A(x_{\uparrow\phi(l)}, l, j\prime))$. Damit folgt

$$B^\phi \cap \mathcal{U}_s \cap A(x_{\uparrow\phi(k)}, k, j) = \emptyset.$$

Setzen wir $\triangle(j,s) = \{t \in {}^{\phi(k)}2 : B^\phi \cap \mathcal{U}_s \cap A(t,k,j) = \emptyset\}$, so erhalten wir damit folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |Z_\phi \cap \phi(k)| &\leq \sum_{j\in\omega, s\in{}^{<\omega}2, \langle j,s\rangle < k} (|\tilde{\triangle}(j,s)|)^2 \\ &= \sum_{j\in\omega, s\in{}^{<\omega}2, \langle j,s\rangle < k, B^\phi\cap\mathcal{U}_s\neq\emptyset} (|\triangle(j,s)|)^2. \qquad (14) \end{aligned}$$

Für den Fall $B^\phi \cap \mathcal{U}_s \neq \emptyset$ beschränken wir nun $\delta(j,s) := |\triangle(j,s)|$.
Dazu schätzen wir $\mu(B^\phi \cap \mathcal{U}_s)$ mit $\delta(j,s)$ nach oben und mit Lemma (5.15) nach unten ab.
Aufgrund der Definition von $\triangle(j,s)$ sieht man sofort:

$$B^\phi \cap \mathcal{U}_s \subseteq \bigcap_{t\in\triangle(j,s)} ({}^\omega 2 \backslash A(t,k,j)).$$

Da $\mu(A(t,k,j)) = 2^{-(k+j)}$ gilt und da die $A(s,l,j)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes unabhängig sind, folgt daher

$$\mu(B^\phi \cap \mathcal{U}_s) \leq (1 - 2^{-(k+j)})^{\delta(j,s)}.$$

Für die untere Abschätzung von $\mu(B^\phi \cap \mathcal{U}_s)$ erhält man wegen $B^\phi \cap \mathcal{U}_s \neq \emptyset$ nach Lemma (5.15), dass

$$\mu(B^\phi \cap \mathcal{U}_s) \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{|s|+1}$$

gelten muss.
Es gilt also folgende Abschätzung:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{|s|+1} \leq \mu(B^\phi \cap \mathcal{U}_s) \leq (1-2^{-(k+j)})^{\delta(j,s)}.$$

Durch Anwenden des Logarithmus erhalten wir daraus

$$\delta(j,s) \leq (3|s|+3)2^{k+j}.$$

Setzen wir dies in (14) ein, so ergibt sich

$$|Z_\phi \cap \phi(k)| \leq \sum_{j\in\omega, s\in{}^{<\omega}2, \langle j,s\rangle<k} ((3|s|+3)2^{k+j})^2.$$

Wegen der Wahl von $\langle,\rangle$ gilt für $k > \langle j,s\rangle$ schon $|s| < k$ und $j < k$, so dass wir $|s|$ und j durch k abschätzen können. Ferner ist $\langle,\rangle$ eine Bijektion, so dass in der auftretenden Summe über k Summanden summiert wird. Somit ergibt sich

$$|Z_\phi \cap \phi(k)| \leq k(3k+3)^2 2^{4k}$$

und damit (13).

Nun können wir zeigen, dass $\mathcal{F}_X$ rapide ist und damit den Beweis zu Ende führen.
Sei $\phi_0 : \omega \to \omega$ monoton wachsend. Definiere $\psi : \omega \to \omega$ durch $\psi(k) = k(3k+3)^2 2^{4k}$. Dann definieren wir $\tilde{\phi}_0 : \omega \to \omega$ durch

$$\tilde{\phi}_0(k) = \phi_0(\psi(k+1)).$$

$\tilde{\phi}_0$ ist monoton wachsend und nach (13) erhalten wir somit für jedes $k \in \omega$

$$|Z_{\tilde{\phi}_o} \cap \phi_0(\psi(k+1))| \leq k(3k+3)^2 2^{4k} = \psi(k).$$

Sei $n \in \omega$. Wegen $\psi(0) = 0$ existiert dann ein $k \in \omega$ mit $\psi(k) \leq n < \psi(k+1)$ und es folgt mit der Monotonie von ϕ_0

$$|Z_{\tilde{\phi}_0} \cap \phi_0(n)| \leq |Z_{\tilde{\phi}_o} \cap \phi_0(\psi(k+1))| \leq \psi(k) \leq n.$$

Da $Z_{\tilde{\phi}_0} \in \mathcal{F}_X$ gilt, ist $\mathcal{F}_X$ somit rapide. □

6 Zur Stärke von SOA+$\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP und SOA+$\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM

In diesem Kapitel werden wir die Stärke von $SOA+\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP und $SOA+\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM untersuchen. Sowohl $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP als auch $SOA + \mathbf{\Sigma}^1_3$-LM machen lediglich Aussagen über reelle Zahlen. Da die Struktur der reellen Zahlen gerade der Bereich ist, den SOA in natürlicher Weise axiomatisiert, liegen diese Schemata daher als axiomatische Erweiterung recht nahe.
Des Weiteren scheinen diese Axiomenschemata zunächst wenig mit den starken Mengenexistenzaxiomen der Mengenlehre zu tun zu haben. Dies ist insofern von Bedeutung, als dass gerade diese sehr schnell aus dem Bereich der reellen Zahlen herausführen. So impliziert beispielsweise das Potenzmengenaxiom unmittelbar die Existenz mathematischer Objekte von unbeschränkt großen Kardinalitäten, also Objekten, die uns in der deskriptiven Mengenlehre auf den ersten Blick eher befremdlich erscheinen. [13]
Wir werden zeigen, dass $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP und $SOA + \mathbf{\Sigma}^1_3$-LM dennoch in erstaunlich enger Verbindung zu ZFC stehen.
In Abschnitt 6.1 zeigen wir dazu, dass aus der Konsistenz von $SOA+\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP bzw. $SOA+\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM bereits die Konsistenz von ZFC gefolgert werden kann. Dazu beweisen wir mit der Charakterisierung von $\Pi^1_1[x]$-PSP aus Abschnitt 4.3, dass in jedem Modell von $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$ für jede reelle Zahl x das relativ zu x konstruierte konstruktible Universum $L[x]$ ein Modell von ZFC ist. Da wir in Kapitel 5 gesehen haben, dass $\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM bereits $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP impliziert, erhalten wir damit ein analoges Ergebnis für die Theorie $SOA + \mathbf{\Sigma}^1_3$-LM.

Im folgenden Abschnitt 6.2 zeigen wir mit Hilfe von Shoenfield-Absolutheit, wie dieses Ergebnis genutzt werden kann, um Aussagen darüber zu machen, welche in ZFC beweisbaren Sätze schon in $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP bzw. $SOA + \mathbf{\Sigma}^1_3$-LM gezeigt werden können.
Ein Beispiel für eine Anwendung dieser Vorgehensweise findet sich schließlich in Abschnitt 6.3.

Bis auf Abschnitt 6.3, in dem wir größtenteils in ZFC arbeiten, legen wir im Folgenden wieder $ZFC^- + V = HC$ zu Grunde.

6.1 Äquikonsistenz mit ZFC

Wir beweisen nun das Hauptresultat dieser Arbeit, nämlich die beiden folgenden Sätze:

Satz 6.1 *Gelte $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP. Für jede reelle Zahl x gilt dann $L[x] \models ZFC$.*

Im Hinblick auf das Resultat aus Kapitel 5 erhalten wir hieraus unmittelbar:

[13] An dieser Stelle sei bereits erwähnt, dass es durchaus Aussagen der deskriptiven Mengenlehre gibt, zu deren Beweis diese "higher-type-objects" unverzichtbar sind. Vergleiche hierzu zum Beispiel Martins Beweis von Borel-Determiniertheit (6.12) und die Ergebnisse von Friedman, nach denen dieser Beweis ohne diese nicht zu führen ist.

Satz 6.2 *Gelte $\mathbf{\Sigma}^1_3$-LB. Für jede reelle Zahl x gilt dann $L[x] \models ZFC$.*

Um Satz (6.1) beweisen zu können benötigen wir folgendes Lemma, dessen Beweis wir in Anlehnung an Gödels Beweis der Gültigkeit der verallgemeinerten Kontinuumshypothese (GCH) in L führen werden.

Lemma 6.3 *Gelte ZFC^-. Sei x eine Menge und nehme an, dass $V = L[x]$ gilt. Gelte ferner, dass für jede Ordinalzahl α eine reguläre Kardinalzahl $\beta > \alpha$ existiert. Dann gilt ZFC, also insbesondere das Potenzmengenaxiom.*

Um (6.3) zu zeigen, brauchen wir Mostowskis Kollabierungs-Satz, den Satz von Löwenheim und Skolem, sowie Gödels Kondensationslemma. Da diese Sätze in jedem Grundlagenbuch nachgelesen und ferner ohne den Gebrauch des Potenzmengenaxioms bewiesen werden können (vgl. z.B. [Jech]), werden wir diese hier ohne Beweis nur kurz zitieren.

Satz 6.4 *(Mostowski) Sei E eine fundierte und extensionale Relation auf einer Klasse P. Dann existiert eine eindeutige transitive Klasse M und ein eindeutiger Isomorphismus π zwischen (P, E) und $(M, \in)$. Insbesondere gilt also (im Fall $E{=}{\in}$), dass jede extensionale Klasse P isomorph zu einer transitiven Klasse M ist, wobei der zugehörige Isomorphismus eindeutig ist. Wir nennen M auch den transitiven Kollaps von P.*

Der Isomorphismus π lässt sich dabei induktiv definieren durch:

$$\pi(x) = \{\pi(z) : z \; E \; x\}.$$

Für den nächsten Satz brauchen wir den Begriff des *elementaren Submodells.* Ist $\mathcal{U}$ ein Modell, so nennen wir $\mathcal{B}$ ein elementares Submodell von $\mathcal{U}$ wenn gilt:

i) Der Träger von $\mathcal{B}$ ist enthalten im Träger von $\mathcal{U}$.

ii) Für jede Formel $\varphi(x_1, ..., x_n)$ und für alle $a_1, ..., a_n$ aus dem Träger von $\mathcal{B}$ gilt:
$$\mathcal{B} \models \varphi(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow \mathcal{U} \models \varphi a_1, ..., a_n.$$

Es gilt folgender Satz:

Satz 6.5 *(Löwenheim und Skolem) Jedes unendliche Modell einer abzählbaren Sprache enthält bereits ein abzählbares elementares Submodell.*

Als letzten Satz brauchen wir das Kondensationslemma:

Satz 6.6 *(Gödel) Für jede Limesordinalzahl δ gilt: Ist M ein elementares Submodell von $(L_\delta, \in)$, dann ist der transitive Kollaps von M gerade ein L_γ für ein $\gamma \leq \delta$.*

Diesen Satz verwenden wir im Folgenden für den relativierten Fall $L[x]$.

Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen, um Lemma (6.3) zu beweisen.

Beweis von (6.3):
Sei $y \in L[x]$. Dann existiert ein $\alpha \in OR$, so dass $y \in L_\alpha[x]$ gilt. Ohne Einschränkung sei $\alpha \geq \aleph_0$.
Wir müssen zeigen, dass die "Potenzklasse" $\{z \in L[x] : z \subseteq y\}$ eine Menge in $L[x]$ ist, dass also die Potenzmenge $P(y)$ von y existiert.
Sei $z \subseteq y$. Wegen $V = L[x]$ existiert ein $\beta \in OR$, $\beta > \alpha$, mit $z \in L_\beta[x]$, wobei wir o.B.d.A. $\beta \in Lim$ annehmen dürfen. Sei X ein elementares Submodell von $L_\beta[x]$ mit $TC(y) \subseteq X$, $z \in X$ und $|X| = |TC(y)| \cdot \aleph_0$. Ein solches X existiert, da die Sprache $\mathcal{L}_\in$ offensichtlich abzählbar ist und es daher nach dem Satz von Löwenheim-Skolem ein abzählbares Submodell $\tilde{X}$ von $L_\beta[x]$ gibt. Man kann daher X als den Abschluss von $\tilde{X} \cup TC(y) \cup \{z\}$ unter geeigneten Skolemfunktionen wählen.
Sei M der transitive Kollaps von X. Nach dem Kondensationslemma gilt $M = L_\gamma[x]$ für ein $\gamma \leq \beta$. Sei $\pi : X \to L_\gamma[x]$ der (eindeutige) Isomorphismus zwischen den Modellen. Da $TC(y)$ transitiv ist, gilt $\pi_{\upharpoonright TC(y)} = Id_{\upharpoonright TC(y)}$. Denn für alle $r \in TC(y)$ und für alle s gilt wegen $(s \in r \to s \in TC(y) \to s \in X)$ schon $r \cap X = r$. Da $\pi(r) = \{\pi(s) : s \in r\}$ gilt, folgt mit $\in$-Induktion dann $\pi(r) = \{s : s \in r\} = r$. Wegen $z \subseteq y$ gilt somit $\pi(w) = w$ für alle $w \in z$ und daher $\pi(z) = \{\pi(w) : w \in z\} = \{w : w \in z\} = z$. Also folgt $z \in L_\gamma[x]$.
Ferner gilt $|\gamma| = |L_\gamma[x]| = |X| = |TC(y) \cdot \aleph_0| \leq |\alpha|$. Die letzte Ungleichheit gilt, da zum einen $\alpha \geq \aleph_0$ vorausgesetzt wurde und zum anderen, da $TC(y) \subseteq L_\alpha[x]$ ($y \in L_\alpha[x]$ und $L_\alpha[x]$ ist transitiv) gilt. Denn wegen $|L_\alpha[x]| = |\alpha|$ folgt hiermit $|TC(y)| \leq |\alpha|$.
Sei $\tilde{\alpha} > \alpha$ regulär. Dann gilt $|\tilde{\alpha}| > |\alpha| \geq |\gamma|$, also $\tilde{\alpha} > \gamma$ und somit $z \in L_{\tilde{\alpha}}[x]$.

Da $\tilde{\alpha}$ nicht von z abhängig ist, erhalten wir nun (mit der Absolutheit von "$\subseteq$" für transitive Modelle):

$$\begin{aligned} P(y) &:= \{z \in L[x] : z \subseteq y\} \\ &= \{z \in L_{\tilde{\alpha}}[x] : z \subseteq y\} \\ &= \{z \in L_{\tilde{\alpha}}[x] : L_{\tilde{\alpha}} \models z \subseteq y\}. \end{aligned}$$

$P(y)$ ist somit über $L_{\tilde{\alpha}}$[x] mit Parametern aus $L_{\tilde{\alpha}}$[x] definierbar und wir erhalten $P(y) \in L_{\tilde{\alpha}+1}$[x] und damit $P(y) \in L[x]$. □

Wir schließen nun den Beweis von Satz (6.1) an.

Beweis von (6.1)
Es gelten $L[x] \models ZFC^-$ und $L[x] \models V = L[x]$. Dies wird beispielsweise in [Jech] bewiesen, wobei das Potenzmengenaxiom nicht benötigt wird.
Zu zeigen bleibt also $L[x] \models$(Pot). Dazu verwenden wir obiges Lemma (6.3).

Sei $\alpha \in OR$. Wegen $(V = HC)$ ist α abzählbar. Sei $y \in WO$ mit $||y|| = \alpha$. Seien $p_0(\cdot)$, $p_1(\cdot)$ die Projektionen des Standardisomorphismus $\langle\cdot,\cdot\rangle : {}^\omega\omega \times {}^\omega\omega \to {}^\omega\omega$. Setze dann $z := \langle x, y\rangle$. Aufgrund von $\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP folgt mit Satz (4.11), dass $\aleph_1^{L[z]}$ existiert. Da in $L[z]$ das Auswahlaxiom gilt, ist $\aleph_1^{L[z]}$ regulär in $L[z]$. Es gilt $L[x] \subseteq L[z]$, denn wegen $z \in L[z]$ und $x = p_0(z)$ ist $x \in L[z]$. Daher ist $\aleph_1^{L[z]}$ auch regulär in $L[x]$, denn da es keine in $\aleph_1^{L[z]}$ kofinale Folge der Länge β für ein $\beta < \aleph_1^{L[z]}$ in $L[z]$ gibt, so gibt es eine solche erst recht nicht in $L[x]$. Außerdem gilt in $L[x]$, dass $\aleph_1^{L[z]}$ größer als α ist. Denn wegen $z \in L[z]$ gilt auch $y = p_1(z) \in L[z]$. Da WO Π^1_1 und damit nach dem Satz von Shoenfield (vgl. Satz (6.7)) absolut für $L[z]$ ist und da ferner $||y|| = \alpha$ gilt, folgt $L[z] \models \alpha < \aleph_1^{L[z]}$, denn Elemente aus WO können nur abzählbare Ordinalzahlen codieren. Da die $<$-Relation für transitive Modelle absolut ist, folgt damit auch $L[x] \models \alpha < \aleph_1^{L[z]}$.
Mit Lemma (6.3) folgt nun $L[x] \models$(Pot). $\square$

Mit Hilfe von Forcing lässt sich zeigen, dass aus der Konsistenz von ZFC auch die Konsistenz von *SOA+volle topologische Regularität* folgt. Dieses Ergebnis wird in der Diplomarbeit von Daniel Busche (vgl. [Busche]) gezeigt.

6.2 Zur Gültigkeit von ZFC-Sätzen in SOA+$\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP und SOA+$\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM

Vergleicht man die "Stärke" zweier Theorien, so interessiert man sich im Allgemeinen nicht nur für relative Konsistenzaussagen. Eine weitere natürliche Frage ist, welche Sätze der einen Theorie schon in der jeweils anderen bewiesen werden können.
Mit Hilfe der Ergebnisse des letzten Abschnittes und mit dem Satz über Shoenfield-Absolutheit werden wir hierzu nun ein schönes Resultat beweisen.
Zunächst zeigen wir folgenden Satz:

Satz 6.7 *(Shoenfield-Absolutheit) Sei $a \in {}^\omega\omega$. Dann ist jede $\Sigma^1_2[a]$-Relation (und damit auch jede $\Pi^1_2[a]$-Relation) A absolut für $L[a]$. Es gilt also für alle $x \in L[a] \cap {}^\omega\omega$*

$$x \in A \Leftrightarrow L[a] \models x \in A$$

oder, ausgedrückt mit der definierenden Formel φ für A,

$$\varphi(x) \Leftrightarrow L[a] \models \varphi(x).$$

Bevor wir Satz (6.7) beweisen, machen wir folgende Bemerkung:
Sei $a \in {}^\omega\omega$ und sei T ein Baum in $L[a]$. Ist T eine Menge, dann gilt

$$T \text{ ist fundiert} \Leftrightarrow L[a] \models T \text{ ist fundiert.} \tag{15}$$

Dies folgt daraus, dass wir die Fundiertheit eines (Mengen-)Baumes sowohl durch eine $\forall$-Aussage als auch durch eine $\exists$-Aussage charakterisieren können. Denn ist T fundiert, so gibt es keine unendlichen Pfade in T und somit erst recht keine in $L[a]$. Gilt umgekehrt $L[a] \models T$ ist fundiert, so gibt es eine ordnungstreue Abbildung $f : T \to OR$ in $L[a]$ und diese existiert natürlich auch in V.
Man beachte, dass (15) im Allgemeinen nicht mehr gilt, wenn T eine echte Klasse ist. Denn da T dann überabzählbar verzweigt sein kann ist es möglich, dass T fundiert ist und dennoch keine ordnungstreue Abbildung $f : T \to OR$ existiert (denn es gibt nur abzählbare Ordinalzahlen!)[14].

Wir verwenden im Folgenden die im Beweis von Satz (3.23) eingeführte Notation.

Beweis von Satz (6.7):
Sei $a \in {}^{\omega}\omega$ und $A \in \Sigma^1_2[a]$. Wie im Beweis von Satz (3.23) finden wir dann einen in a rekursiven Baum S auf ω^3, so dass für alle $x \in {}^{\omega}\omega$ gilt:

$$x \in A \leftrightarrow \exists y \in {}^{\omega}\omega \; S_{(x,y)} \text{ ist fundiert.}$$

Für $x \in {}^{\omega}\omega \cap L[a]$ erhalten wir somit

$$L[a] \models x \in A \leftrightarrow \exists y \in L[a] \cap {}^{\omega}\omega \;\; L[a] \models S_{(x,y)} \text{ ist fundiert.}$$

S ist arithmetisch in a und wegen $a \in L[a]$ folgt daher für alle $x, y \in L[a] \cap {}^{\omega}\omega$ $S^{L[a]}_{(x,y)} = S_{(x,y)}$. Zusammen mit der Bemerkung (15) erhalten wir somit

$$L[a] \models x \in A \leftrightarrow \exists y \in L[a] \cap {}^{\omega}\omega \;\; S_{(x,y)} \text{ ist fundiert.} \tag{16}$$

Gilt also $L[a] \models x \in A$, so folgt $x \in A$.
Sei nun $x \in A \cap L[a]$.
Sei $y_0 \in {}^{\omega}\omega$ so, dass $S_{(x,y_0)}$ fundiert ist. Dann gibt es eine ordnungstreue Abbildung $f : S_{(x,y_0)} \to OR$, d.h. für alle $\tau_1, \tau_2 \in S_{(x,y_0)}$ gilt

$$f(\tau_1) < f(\tau_2) \leftrightarrow \tau_2 \subseteq \tau_1 \wedge \tau_2 \neq \tau_1.$$

Sei $\alpha \in OR$ mit $rng(f) \subseteq \alpha$.
Sei B die Menge aller geordneten Paare $\langle \sigma, s \rangle$, so dass gilt:
$\sigma \in {}^{<\omega}\omega$, $s : S_{(x\upharpoonright(dom(\sigma)),\sigma)} \to \alpha$ ist eine Funktion und für alle $\tau_1, \tau_2 \in S_{(x\upharpoonright(dom(\sigma)),\sigma)}$ gilt:

$$s(\tau_1) < s(\tau_2) \leftrightarrow \tau_2 \subseteq \tau_1 \wedge \tau_2 \neq \tau_1.$$

[14] Aus diesem Grund lässt sich beispielsweise der Beweis von Shoenfield-Absolutheit wie er in [Jech] oder [Kanamori] ausgeführt wird nicht auf $ZFC^- + V = HC$ übertragen.

Dabei sei

$$S_{(x_{\upharpoonright(dom(\sigma))},\sigma)} = \{\tau \in {}^{<\omega}\omega : dom(\tau) \leq dom(\sigma) \wedge (x_{\upharpoonright dom(\tau)}, \sigma_{\upharpoonright dom(\tau)}, \tau) \in S\}.$$

Wegen $\alpha, x \in L[a]$ gilt $B \in L[a]$.
Wir definieren eine Inklusion $\subseteq^*$ durch

$$\langle \sigma, s\rangle \subseteq^* \langle \tilde{\sigma}, \tilde{s}\rangle :\leftrightarrow \langle \tilde{\sigma}, \tilde{s}\rangle \in B \wedge \sigma \subseteq \tilde{\sigma} \wedge \tilde{s}_{\upharpoonright(S_{(x_{\upharpoonright(dom(\sigma))},\sigma)})} = s.$$

(Beachte, dass es für $\langle \sigma, s\rangle \subseteq^* \langle \tilde{\sigma}, \tilde{s}\rangle$ dabei durchaus möglich ist, dass $\sigma \neq \tilde{\sigma}$ aber $S_{(x_{\upharpoonright(dom(\sigma))},\sigma)} = S_{(x_{\upharpoonright(dom(\tilde{\sigma}))},\tilde{\sigma})}$ und somit $s = \tilde{s}$ gilt.)
Dann sieht man leicht, dass B bezüglich $\subseteq^*$ ein (Mengen-)Baum in $L[a]$ ist, für welchen Gleichung (15) gilt.
Ferner ist B nicht fundiert, denn $\{\langle y_{0\upharpoonright n}, f_{\upharpoonright S_{(x_{\upharpoonright n}, y_{0\upharpoonright n})}}\rangle : n \in \omega\}$ ist offensichtlich ein unendlicher Pfad in B.
Mit (15) gilt, dass B auch in $L[a]$ nicht fundiert ist, d.h. es existiert ein unendlicher Pfad $\{\langle \sigma_n, s_n\rangle : n \in \omega\}$ von B in $L[a]$. Seien

$$y = \bigcup_{n\in\omega} \sigma_n \quad \text{und} \quad g = \bigcup_{n\in\omega} s_n.$$

Dann gilt $y \in L[a]$ und g bezeugt, dass $S_{(x,y)}$ fundiert ist, denn g ist eine Funktion von $S_{(x,y)}$ nach α und für alle $\tau_1, \tau_2 \in S_{(x,y)}$ gilt

$$f(\tau_1) < f(\tau_2) \leftrightarrow \tau_2 \subseteq \tau_1 \wedge \tau_2 \neq \tau_1,$$

d.h. g ist ordnungstreu.
Mit (16) erhalten wir daher $L[a] \models x \in A$. □

Mit diesen Vorbereitungen beweisen wir nun folgenden Satz:

Satz 6.8 *Sei φ ein Π^1_4-Satz von $\mathcal{L}_2$. Dann gilt*

$$ZFC \vdash \varphi \;\Rightarrow\; SOA + \mathbf{\Pi}^1_1\text{-}PSP \vdash \varphi.$$

Beweis:
Sei φ ein Π^1_4-Satz von $\mathcal{L}_2$ der Gestalt

$$\forall x \in {}^{\omega}\omega \; \exists y \in {}^{\omega}\omega \; \phi(x, y),$$

wobei $\phi(x, y)$ ein Π^1_2-Satz sei. Gelte $ZFC \vdash \varphi$. Um $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP $\vdash \varphi$ zu zeigen, genügt es aufgrund des Vollständigkeitssatzes zu zeigen, dass für jedes beliebige Modell $\mathcal{U}$ von $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP schon $\mathcal{U} \models \varphi$ gilt. Sei also $\mathcal{U}$ ein Modell von $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP. Sei $x \in {}^{\omega}\omega \cap \mathcal{U}$ beliebig. Dann folgt mit Satz (6.8) $L[x] \models ZFC$ und wegen $x \in L[x]$ existiert daher ein $y \in L[x]$ mit $L[x] \models \phi(x, y)$. Mit Shoenfield-Absolutheit (6.7) erhalten wir, dass $\phi(x, y)$ in $\mathcal{U}$ gilt. Da wir $x \in {}^{\omega}\omega \cap \mathcal{U}$ beliebig gewählt haben, folgt somit $\mathcal{U} \models \varphi$. □

Ob es einen in ZFC wahren Σ^1_4-Satz von $\mathcal{L}_2$ gibt, welcher nicht in $SOA+\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP bewiesen werden kann, bleibt zunächst offen.
Um die Frage zu beantworten, welche $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP Sätze auch in ZFC gezeigt werden können, zitieren wir hier aus der Diplomarbeit von Daniel Busche (vgl. [Busche]). Dort wird gezeigt, dass jeder in $SOA+\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP bzw. in $SOA + \mathbf{\Sigma}^1_3$-LM beweisbare Π^1_3-Satz auch in ZFC wahr ist.
Anders als im umgekehrten Fall lässt sich hier sehr einfach zeigen, dass diese Komplexitätsgrenze bereits optimal ist: $V \neq L$ und Π^1_1-PSP sind Σ^1_3-Sätze und gelten sowohl in $SOA+\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP als auch in $SOA+\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM. Sie können aber keine in ZFC beweisbaren Sätze sein. Denn unter der Annahme, dass ZFC konsistent ist, ist auch $ZFC + V = L$ konsistent. In letzterer Theorie sind aber beide Annahmen falsch, was für erstere offensichtlich ist und für letztere gerade durch Sätze (4.6), (4.7) und (4.8), welche ebenso in ZFC gezeigt werden können, besagt wird.

6.3 Eine überraschende Anwendung: Borel-Determiniertheit in SOA+Π^1_1-PSP bzw. SOA+Σ^1_3-LM

Eine interessante Anwendung von Satz (6.8) (und damit auch von Satz (6.1)) ergibt sich bei Betrachtungen zu Determiniertheitsaxiomen.

In diesem Abschnitt arbeiten wir zunächst in ZFC, wobei wir insbesondere Gebrauch vom Potenzmengenaxiom machen werden. Erst mit Satz (6.13) beweisen wir ein Resultat aus $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP bzw. $SOA + \mathbf{\Sigma}^1_3$-LM.

Sei X eine nichtleere Menge. Mit jedem $Z \subseteq {}^{\omega}X$ assoziieren wir folgendes von zwei Spielern A und B gespieltes Spiel $G(Z)$:
Die Spieler wählen abwechselnd je ein Element aus X (sie setzen einen Zug), so dass sich eine Folge $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ...\rangle$ ergibt, wobei A die a_i und B die b_i gewählt hat. Die Spieler spielen so lange, dass sich auf diese Weise eine Folge der Länge ω, also beispielsweise im Fall von $X = \omega$ eine reelle Zahl, ergibt. Falls diese in Z liegt, so gewinnt Spieler A, andernfalls gewinnt Spieler B.
Wir machen folgende Definitionen:

Definition 6.9

- *Ein Spielverlauf (im Spiel $G(Z)$) ist eine Folge $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ...\rangle \in {}^{\omega}X$.*

- *Eine Strategie für Spieler A (für Spieler B) ist eine Funktion σ deren Definitionsbereich die endlichen Folgen gerader (ungerader) Länge von Elementen aus X sind und deren Werte in X liegen.*

- *Wir sagen, dass Spieler A (Spieler B) das Spiel $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ...\rangle$ mit der Strategie σ spielt, falls $\sigma(\langle\rangle) = a_0,\ \sigma(\langle a_0, b_0\rangle) = a_1, ...(\sigma(\langle a_0\rangle) = b_0,\ \sigma(\langle a_0, b_0, a_1\rangle) = b_1, ...)$ gilt und bezeichnen dieses Spiel mit $\sigma * b$ $(a * \sigma)$, wobei $b = \langle b_n : n \in \omega\rangle$ $(a = \langle a_n : n \in \omega\rangle)$sei.*

- *Sei $Z \subseteq {}^{\omega}X$ eine Menge. Eine Strategie σ heißt Gewinnstrategie bzgl. Z für Spieler A (für Spieler B), wenn gilt*

$$\{\sigma * b : b \in {}^{\omega}X\} \subseteq Z \quad (\{a * \sigma : a \in {}^{\omega}X\} \subseteq {}^{\omega}X \backslash Z).$$

- *Sei $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n(, b_n)\rangle$ ein Anfangsstück eines Spielverlaufes in $G(Z)$. Mit $G^{\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n(, b_n)\rangle}(Z)$ bezeichnen wir dasjenige Spiel, welches erst bei $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n(, b_n)\rangle$ beginnt, wobei Spieler A $\langle a_{n+1}, a_{n+2}, ...\rangle$ und Spieler B $\langle (b_n,)b_{n+1}, b_{n+2}, ...\rangle$ spielt und A genau dann gewinnt, wenn $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ...\rangle \in Z$ gilt.*
  Wir nennen $G^{\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n(, b_n)\rangle}(Z)$ auch Teilspiel von $G(Z)$ auf $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n(, b_n)\rangle$.

- *Ist $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n(, b_n)\rangle$ ein Anfangsstück eines Spielverlaufes in $G(Z)$, so heißt eine Menge $\sum$ von endlichen Folgen Quasistrategie für Spieler A (für Spieler B) im Teilspiel auf $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n(, b_n)\rangle$, wenn Folgendes gilt:*

  i) Jede Folge in $\sum$ erweitert $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n(, b_n)\rangle$.

  ii) Für jedes $m \geq n$ gilt: Ist $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ..., a_m\rangle \in \sum$, dann gilt für jedes $y \in X$ $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ..., a_m, y\rangle \in \sum$. (Ist $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ..., a_m, b_m\rangle \in \sum$, dann gilt für jedes $y \in \omega$ $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ..., a_m, b_m, y\rangle \in \sum$.)

  Spielt einer der beiden Spieler also nach einer Quasistrategie, so schränkt er seine möglichen Züge dieser entsprechend ein. Die Züge seines Gegenspielers werden dabei nicht beschränkt.

- *Eine Menge $Z \subseteq {}^{\omega}X$ heißt determiniert, wenn es eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler in $G(Z)$ gibt.*
  Um auszudrücken, dass Z determiniert ist, schreiben wir auch Det(Z).

Ebenso wie wir Borelmengen als gewisse Teilmengen von ${}^{\omega}\omega$ durch die Borelhierarchie bestimmt haben, können wir diese Definitionen vollkommen analog auch auf Teilmengen von ${}^{\omega}X$ übertragen. Dabei übertragen sich die meisten der Eigenschaften von Borelmengen reeller Zahlen auf solche verallgemeinerten Borelmengen. [15]
Im Folgenden interessieren wir uns natürlich meist für den Fall $X = \omega$. Jedoch werden wir in Martins Beweis der Borel-Determiniertheit auf obige Verallgemeinerung zurückgreifen müssen.

Definition 6.10

- *Mit AD bezeichnen wir das Axiom der Determiniertheit, welches besagt, dass jede Klasse reeller Zahlen determiniert ist.*
- *Mit* $\mathbf{\Sigma}^1_n$-, $\mathbf{\Pi}^1_n$-, *bzw.* $\mathbf{\Delta}^1_n$-*AD bezeichnen wir das Axiom, welches besagt, dass jede* $\mathbf{\Sigma}^1_n$-, $\mathbf{\Pi}^1_n$-, *bzw.* $\mathbf{\Delta}^1_n$-*Klasse reeller Zahlen determiniert ist.*

Ähnlich wie bei den bisher betrachteten Regularitätseigenschaften liefert auch hier das Auswahlaxiom eine Menge reeller Zahlen, welche nicht determiniert ist.

Das Axiom der Determiniertheit impliziert, dass jede Menge reeller Zahlen Lebesgue-messbar ist, sowie die Bairesche Eigenschaft und, falls sie überabzählbar ist, eine perfekte Teilklasse besitzt.

Interessiert man sich für die projektiven Mengen reeller Zahlen, so stellt sich die natürliche Frage, für welche von diesen Determiniertheit bewiesen werden kann.
Einen ersten Schritt liefert folgender Satz:

Satz 6.11 *Sei $X \neq \emptyset$. Dann ist jedes abgeschlossene und jedes offene $Z \subseteq {}^{\omega}X$ determiniert.*

Beweis:
Sei zunächst $Z \subseteq {}^{\omega}X$ abgeschlossen. Nehmen wir an, dass Spieler B im Spiel $G(Z)$ keine Gewinnstrategie hat. Wir geben dann folgende Strategie für Spieler A an:
Da B keine Gewinnstrategie hat, existiert ein $a_0 \in X$, so dass B auch keine Gewinnstrategie im Teilspiel $G^{\langle a_0 \rangle}(Z)$ auf $\langle a_0 \rangle$ besitzt. Denn andernfalls hätte B bereits in $G(Z)$ eine Gewinnstrategie. A spielt nun in seinem ersten Zug ein solches a_0 (hier brauchen wir das Auswahlaxiom). Spielt B nun ein $b_0 \in X$, so existiert nun abermals ein $a_1 \in X$, so dass B auch auch keine Gewinnstrategie im Teilspiel $G^{\langle a_0, b_0, a_1 \rangle}(Z)$ auf $\langle a_0, b_0, a_1 \rangle$ besitzt. Denn sonst

[15] Ist X überabzählbar, so ist ${}^{\omega}X$ jedoch nicht separabel. In diesem Fall sind manche Sätze die auf der Separabilität von ${}^{\omega}\omega$ beruhen, z.B. der, dass sich offene Mengen als abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen darstellen lassen, nicht zu zeigen.

gäbe es bereits eine Gewinnstrategie für B in $G^{\langle a_0 \rangle}(Z)$. Auf diese Weise setzt A das Spiel fort.
Sei $x = \langle a_0, b_0, a_1, b_1, ... \rangle$ ein Spielverlauf in $G(Z)$, den A nach obiger Strategie gespielt hat. Wir zeigen, dass $x \in Z$ gilt:
Für jedes $n \in \omega$ besitzt Spieler B keine Gewinnstrategie im Teilspiel $G^{\langle a_0, b_0, ..., a_n \rangle}(Z)$ auf $\langle a_0, b_0, ..., a_n \rangle$. Somit existiert stets ein $f_n \in {}^{\omega}X$ mit $f_{\upharpoonright 2n} = \langle a_0, b_0, ..., a_n \rangle$ und $f_n \in Z$, denn andernfalls wäre jede Strategie für B im Teilspiel $G^{\langle a_0, b_0, ..., a_n \rangle}(Z)$ eine Gewinnstrategie. Da $lim f_n = x$ gilt und da Z abgeschlossen ist, folgt daher $x \in Z$.
Somit ist die angegebene Strategie für Spieler A eine Gewinnstrategie und wir erhalten, dass Z determiniert ist.

Indem wir lediglich die Spieler vertauschen liefert das gleiche Argument, dass auch jedes offene $Z \subseteq {}^{\omega}X$ determiniert ist. □

D.A.Martin bewies 1975 sogar folgendes Resultat (vgl.[Moschovakis]):

Satz 6.12 *In ZFC ist jede Borelmenge determiniert.*

Beweis:
Wir beweisen Satz (6.12) nur für $\mathbf{\Sigma}_n^0$ Mengen mit $n \in \omega$. Denn bereits hierfür benötigt man die ω-fache Anwendung des Potenzmengenaxioms und dies ist gerade der Grund, warum wir den anschließend folgenden Satz (6.13) als "erstaunlich" bezeichnen können.
Der vollständige Beweis von Satz (6.12) findet sich beispielsweise in [Kechris] und benötigt zusätzlich ein (topologisches) "Covering-Theorem" für den Limesfall.
Wir führen den Beweis mit einer Induktion nach n. Dabei liefert Satz (6.11) den Induktionsanfang. Im Induktionsschritt beschränken wir uns auf den Fall $n = 3$ um der Gefahr zu entgehen, dass die Beweisidee in der Unübersichtlichkeit der Notation verloren geht[16]. Die Argumentation lässt sich vollkommen analog auf beliebiges n übertragen.

Sei $X \neq \emptyset$ und sei $Z \subseteq {}^{\omega}X$ $\mathbf{\Sigma}_3^0$. Ferner sei

$$F^0, F^1, F^2, ...$$

eine Aufzählung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen $F_{i,j} \subseteq {}^{\omega}X$, so dass für einen Spielverlauf f gilt:

$$f \in Z \leftrightarrow \exists i \, \forall j \; f \notin F_{i,j}.$$

Weiter sei für jedes n T_n ein Baum auf X mit $F^n = [T_n]$.
Wir betrachten zunächst ein Spiel H (auf einer von X verschiedenen Menge

[16] Für die Determiniertheit von $\mathbf{\Sigma}_3^0$-Mengen lässt sich auch ein Beweis finden, welcher ohne das Potenzmengenaxiom auskommt. Dieser kann jedoch im Unterschied zu dem im Folgenden geführten Beweis nicht per Induktion auf beliebiges n verallgemeinert werden.

X^*) bei welchem die einzelnen Spiele von der Form

$$\langle x_0, x_1, \sum_0, \langle t_0, u_0\rangle, ..., x_{2n}, x_{2n+1}, \sum_{2n}, \langle t_{2n}, u_{2n}\rangle, ...\rangle$$

sind und bei dem folgende Regeln gelten:

i) $x_0, x_1, x_2, ... \in X$.

ii) Für jedes n ist $\sum_{2n}$ eine Quasistrategie für A im Teilspiel $\langle x_0, x_1, ..., x_{2n}, x_{2n+1}\rangle$ in $G(Z)$.

iii) Für jedes n ist $t_{2n} = 0$ oder $t_{2n} = 1$ und u_{2n} ist eine endliche Folge von ungerader Länge, die mit $\langle x_o, x_1, ..., x_{2n+1}\rangle$ kompatibel ist.

iv) Definieren wir für jedes $n \in \omega \cup \{-1\}$ einen Baum S_n auf X durch

- $S_{-1} = {}^{<\omega}X$
- $S_n = S_{n-1} \cap \sum_{2n}$, falls $t_{2n} = 0$
- $S_n = \{u \in S_{n-1} : u \text{ ist kompatibel mit } u_{2n}\}$, falls $t_{2n} = 1$,

so gilt:
Für alle n liegen die Folgen $\langle x_0, ..., x_{2n}\rangle$, $\langle x_0, ..., x_{2n}, x_{2n+1}\rangle$ in S_{n-1} und falls $t_{2n} = 1$ gilt, so muss u_{2n} in $\sum_{2n} \backslash T_n$ sein.

Dieses Spiel lässt sich wie folgt interpretieren:
Die $x_0, x_1, x_2, ...$ entsprechen den Spielzügen der Spieler im Spiel $G(Z)$. Die Spieler von H machen jedoch zwischenzeitlich zusätzliche Züge der Form $\sum_{2n}$ bzw. $\langle t_{2n}, u_{2n}\rangle$. Spielt A die Quasistrategie $\sum_{2n}$, so bietet er seinem Gegenüber damit an, seine weiteren Züge nur in Übereinstimmung mit dieser zu setzen. Nimmt B dieses Angebot an, dann spielt er im nächsten Zug $t_{2n} = 0$ und weiter verspricht er A im Gegenzug, dass er versuchen wird, dass der Spielverlauf am Ende des Spiels in F^n liegt. Die Folge u_{2n} ist in diesem Fall nicht relevant. Nimmt B das Angebot von A nicht an, so spielt er $t_{2n} = 1$ und ein der Regel 3 entsprechendes u_{2n}, wobei zusätzlich (siehe Regel 4) $u_{2n} \in \sum_{2n} \backslash T_n$ gelten muss. Von diesem Zeitpunkt an müssen beide Spieler ihre Züge so setzen, dass die sich aus dem bis dorthin erreichten Spielverlauf ergebende Folge kompatibel mit u_{2n} ist. Am Ende des Spiels ergibt sich in diesem Falle also $\langle x_0, x_1, ...\rangle \notin F^n$.
Der erste Spieler, der sich nicht an die Regeln hält, verliert das Spiel. Wird das Spiel beendet und haben sich beide Spieler an die Regeln gehalten, so gewinnt Spieler A genau dann, wenn es entweder ein $n \in \omega$ gibt, so dass $t_{2n} = 0$ und $\langle x_0, x_1, ...\rangle \notin F^n$ gilt (sich also Spieler B nicht an seine während des Spiels gemachten Versprechen gehalten hat), oder falls es ein i gibt, so dass für alle j und für alle n gilt, dass aus $F_{i,j} = F^n$ schon $t_{2n} = 1$ folgt.

Wir müssen nun eine $\mathbf{\Sigma}^1_2$ Menge Z^* finden, so dass $G(Z^*)$ das Spiel H

wiedergibt.
Dazu bemerken wir, dass wir durch die Regeln 1-4 einen arithmetischen Baum T (auf X^*) definieren können, welcher genau alle endlichen Anfangsstücke jedes nach diesen Regeln erlaubten Spielverlaufs enthält (vgl. [Moschovakis]). Mit Hilfe dieses Baumes T definieren wir nun Z^*:

$$\begin{aligned}\langle x_0, x_1, \sum_0, \langle t_0, u_0\rangle, ...\rangle \in Z^* \leftrightarrow \neg(&\exists n\ \langle x_0, x_1, ..., x_{2n-1}\rangle \in T \\ &\wedge \langle x_0, x_1, ..., x_{2n-1}, x_{2n}\rangle \notin T) \\ \wedge\ [&(\exists n\ \langle x_0, x_1, ...x_{2n}\rangle \in T \\ &\wedge \langle x_0, x_1, ..., x_{2n}, x_{2n+1}\rangle \notin T)) \\ &\vee (\exists n\ t_{2n} = 0 \wedge \langle x_0, x_1, ...\rangle \notin F^n) \\ &\vee (\exists i\ \forall j\ \forall n\ [F_{i,j} = F^n \rightarrow t_{2n} = 1])].\end{aligned}$$

A gewinnt also das Spiel $G(Z^*)$ genau dann, wenn gilt: A spielt nach den Regeln und es gilt, dass B nicht nach den Regeln spielt oder dass B seine eventuell während des Spiels gemachten Versprechen an A nicht hält oder dass es ein i gibt, so dass für alle j und für alle n gilt, dass aus $F_{i,j} = F^n$ $t_{2n} = 1$ folgt.
Z^* ist offensichtlich $\mathbf{\Sigma}^0_2$ und daher nach Induktionsvoraussetzung determiniert[17]. Des Weiteren entspricht $G(Z^*)$ dem oben beschriebenen Spiel (mit Regeln) H.

Um die Verbindung von $G(Z)$ und $G(Z^*)$ zu verdeutlichen nennen wir einen Spielverlauf in $G(Z^*)$ *korrekt*, wenn sich beide Spieler an die Regeln gehalten haben und Spieler B alle seine Versprechen erfüllt hat, d.h. wenn $\forall n\ \langle x_0, x_1, ...\rangle \in F^n \leftrightarrow t_{2n} = 0$ gilt. Ist $\langle x_0, x_1, \sum_0, \langle t_0, u_0\rangle, ...\rangle$ ein solcher korrekter Spielverlauf, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle x_0, x_1, \sum_0, \langle t_0, u_0\rangle, ...\rangle \in Z^* &\leftrightarrow \exists i\ \forall j\ \forall n\ [F_{i,j} = F^n \rightarrow \langle x_0, x_1, ...\rangle \notin F^n] \\ &\leftrightarrow \langle x_0, x_1, ...\rangle \in Z.\end{aligned}$$

Da einer der beiden Spieler in $G(Z^*)$ eine Gewinnstrategie hat, genügt es nun zu zeigen, wie man aus dieser eine Gewinnstrategie für den entsprechenden Spieler in $G(Z)$ erhält:

1.Fall: Spieler A hat eine Gewinnstrategie σ^* in $G(Z^*)$.Wir beschreiben nun eine Gewinnstrategie für A in $G(Z)$. A simuliert hierzu einen Spielverlauf in $G(Z^*)$, welcher nach der Strategie σ^* gespielt wird. Dabei sollen die $x_1, x_2, ...$ aus dem Spielverlauf in $G(Z^*)$ mit denen aus dem Spielverlauf in $G(Z)$ übereinstimmen, wobei A die x_{2n} in $G(Z^*)$ entsprechend der Strategie σ^* wählt

[17] Man beachte hierbei, dass die Komplexität von Z^* von der letzten Zeile der Definition von Z^* und damit von der Komplexität von Z abhängt: Ist Z eine $\mathbf{\Sigma}^0_{n+1}$ Menge mit $n > 0$, so folgt, dass Z^* $\mathbf{\Sigma}^1_n$ ist.

und die x_{2n+1} in $G(Z)$ von B vorgegeben werden. Ferner simuliert A die $\sum_{2n}$ und die $\langle t_{2n}, u_{2n}\rangle$ im Spielverlauf $G(Z^*)$ wie folgt:
$\sum_0$ wird durch σ^* bestimmt. Anschließend setzt er $t_0 = 0$ (u_0 ist dabei irrelevant), so dass Spieler B in $G(Z^*)$ damit verspricht, dass $\langle x_0, x_1, x_2, ...\rangle$ in F^0 liegen wird. Nehmen wir an, dass er auf diese Weise n-mal vorgegangen ist, d.h. für $i < n$ $\sum_{2i}$ durch σ^* bestimmt und t_{2i} gleich Null gesetzt hat. Stellt sich nun heraus, dass es ein $i < n$ gibt, so dass

$$\langle x_0, x_1, ..., x_{2n}\rangle \notin T_i$$

gilt, also dass Spieler B seine bis dahin gegebenen Versprechen nicht wird halten können, dann ändert er den simulierten Zug $\langle 0, u_{2i}\rangle$ zu $\langle 1, \langle x_0, x_1, ..., x_{2n}\rangle\rangle$. Des Weiteren ändert er für $i < j < n$ evtl. die $\sum_{2j}$ entsprechend der Strategie σ^*.
Anschließend simuliert A für $k > n$ wie zuvor $\sum_{2k}$ durch die Vorgabe von σ^* und t_{2k} durch 0 bis es abermals klar wird, dass B seine Versprechen in $G(Z^*)$ nicht halten könnte und A entsprechend einige Spielzüge abändert.

Fährt A auf diese Weise fort, so ist klar, dass kein simulierter Zug in $G(Z^*)$ mehr als endlich oft abgeändert wird. Denn ein Zug der Form $\langle 0, u_{2i}\rangle$ kann höchstens einmal zu $\langle 1, \langle x_0, x_1, ..., x_{2n}\rangle\rangle$ geändert werden und ein Zug der Form $\sum_{2j}$ kann nur geändert werden, wenn ein $\langle 0, u_{2i}\rangle$ mit $i < j$ geändert wurde.
Betrachten wir nun den resultierenden Spielverlauf in $G(Z^*)$. Spieler A hat sich in diesem an die Regeln gehalten, denn die $\sum_{2n}$ und die x_{2n} wurden von ihm zunächst nach der Gewinnstrategie σ^* gesetzt, die offensichtlich keine den Regeln widersprechenden Züge vorgeben kann. Ändert er im Nachhinein einen simulierten Zug $\langle 0, u_{2i}\rangle$ zu $\langle 1, \langle x_0, x_1, ..., x_{2n}\rangle\rangle$ mit $i < n$ und damit auch ggf. die $\sum_{2j}$ für $i < j < n$, so können sich dadurch die nun durch σ^* vorgegebenen $x_{2i+2}, x_{2i+4}, ..., x_{2n}$ nicht geändert haben. Denn den Regeln entsprechend dürfen die Spieler nach dem Zug $\langle 1, \langle x_0, x_1, ..., x_{2n}\rangle\rangle$ nur solche Spielzüge vornehmen, die den bis dorthin verlaufenen Spielverlauf kompatibel mit $\langle x_0, x_1, ..., x_{2n}\rangle$ machen.
Auch Spieler B hat sich in dem von A simulierten Spielverlauf an die Regeln gehalten. Denn da nach einer Änderung eines $\langle 0, u_{2i}\rangle$ zu $\langle 1, \langle x_0, x_1, ..., x_{2n}\rangle\rangle$ mit $i < n$ die $x_{2i+3}, x_{2i+5}, ..., x_{2n-1}$ nicht geändert wurden, hat auch er seine Züge so gesetzt, dass der resultierende Spielverlauf mit $\langle x_0, x_1, ..., x_{2n}\rangle$ kompatibel ist. Des Weiteren hat er offensichtlich alle seine Versprechen an A eingehalten.
Somit ist der von A simulierte Spielverlauf korrekt und da er außerdem nach einer Gewinnstrategie für A gespielt wurde gilt, dass er in Z^* liegen muss. Somit gilt

$$\langle x_0, x_1, x_2, ...\rangle \in Z$$

und damit hat A auch das Spiel $G(Z)$ gewonnen.

2.Fall: Spieler B hat eine Gewinnstrategie τ^* in $G(Z^*)$. In diesem Fall geben wir eine Gewinnstrategie für B in $G(Z)$ an. Diesmal simuliert B einen Spielverlauf in $G(Z^*)$, welchen er nach der Strategie τ^* spielt und bei dem die $x_0, x_1, x_2, ...$ mit denen im Spiel $G(Z)$ übereinstimmen, wobei B nun die x_{2n+1} in $G(Z^*)$ entsprechend τ^* wählt und die x_{2n} von A in $G(Z)$ vorgegeben werden. B simuliert die $\sum_{2n}$ und die $\langle t_{2n}, u_{2n}\rangle$ dann wie folgt:
Er setzt

$$\sum_0 = \{u : \text{für jede Quasistrategie } \sum \text{ gilt } \langle 1, \langle x_0, x_1\rangle^\frown u\rangle \neq \tau^*(x_0, x_1, \sum)\}.$$

Da $\sum_0$ alle Folgen gerader Länge enthält, ist es eine Quasistrategie im Teilspiel auf $\langle x_0, x_1\rangle$ und daher ein zulässiger Zug für Spieler A. Der Zug $\langle t_0, u_0\rangle$ wird durch $\tau^*(x_0, x_1, \sum)$ bestimmt. Dabei muss schon $t_0 = 0$ gelten, denn da τ^* eine Gewinnstrategie ist, darf sie Spieler B keine Züge, die nicht den Regeln genügen, angeben. Wäre $t_0 = 1$, so würde sie dieses tun, da nach Definition von $\sum_0$ dann u_0 nicht in $\sum_0$ liegen könnte.
Nehmen wir an, dass Spieler B auf diese Weise n-mal vorgegangen ist, d.h. für $i < n$ $\sum_{2i}$ durch

$$\begin{aligned}\sum_{2i} = \{u : \text{für jede Quasistrategie } \sum \text{ gilt } &\langle 1, \langle x_0, x_1, ..., x_{2i+1}\rangle^\frown u\rangle \neq \\ &\tau^*(x_0, x_1, ..., x_{2i-2}, x_{2i-1}, \sum_{2i-2}, \langle t_{2i-2}, u_{2i-2}\rangle, x_{2i}, x_{2i+1}, \sum)\}\end{aligned}$$

definiert und $\langle t_0, u_0\rangle$ mit τ^* bestimmt hat (wobei jedes Mal $t_{2i} = 0$ gelten muss). Nehmen wir weiter an, dass Spieler A nun ein solches x_{2n} gesetzt hat, dass

$$\langle x_0, x_1, ..., x_{2n}\rangle \notin \sum_{2i}$$

für ein $i < n$ gilt, sich also im simulierten Spiel $G(Z^*)$ nicht mehr an die Regeln hält. Nach Definition von $\sum_{2i}$ gibt es dann eine Quasistrategie $\sum'_{2i}$ mit

$$\tau^*(x_0, x_1, ..., x_{2i}, x_{2i+1}, \sum'_{2i}) = \langle 1, \langle x_0, x_1, ..., x_{2n}\rangle\rangle.$$

Spieler B ändert nun in seiner Simulation $\sum_{2i}$ um zu $\sum'_{2i}$. Weiter ändert er für $i < j < n$ evtl. die $\langle t_{2j}, u_{2j}\rangle$ entsprechend der Strategie τ^*. Eine Änderung der $x_{2j+1}, x_{2j+3}, ..., x_{2n-1}$ muss nicht vorgenommen werden, denn mit dem Setzen von $\langle t_{2i}, u_{2i}\rangle = \langle 1, \langle x_0, x_1, ..., x_{2n}\rangle$ verpflichten sich die Spieler, sofern sie nach den Regeln spielen, ihre weiteren Züge so zu wählen, dass der Spielverlauf kompatibel mit $\langle x_0, x_1, ..., x_{2n}\rangle$ bleibt.
B kann nun auf diese Weise fortfahren und ebenso wie im ersten Fall gilt, dass kein Zug in $G(Z^*)$ mehr als endlich oft abgeändert werden muss. Es ergibt sich damit wieder ein simulierter Spielverlauf in $G(Z^*)$ und da τ^* eine Gewinnstrategie für B ist, ist B dabei der Gewinner. Da der Spielverlauf von B offensichtlich so simuliert wurde, dass es sich um einen korrekten Spiel-

verlauf handelt, kann dies nur dann der Fall sein, wenn der entsprechende Spielverlauf in $G(Z)$ nicht in Z liegt. Somit hat Spieler B auch das Spiel $G(Z)$ gewonnen. □

Um das Hilfsspiel $G(Z^*)$ zu definieren, brauchen wir die Existenz der Potenzmenge von X. Denn Z^* ist eine Teilmenge von ${}^{\omega}X^*$, wobei X^* eine Menge ist, die neben den Elementen aus X auch noch Elemente der Potenzmenge von X enthält. (Endliche Folgen von Elementen aus X können durch eine geeignete Aufzählung mit Elementen aus X identifiziert werden, so dass Quasistrategien bzw. Züge der Form $\langle t_{2n}, u_{2n} \rangle$ zu Elementen der Potenzmenge von X werden.)
Somit benötigen wir für obigen Beweis im Laufe der Induktion die ω-fach iterierte Potenzmenge der Menge X[18] und H. Friedman konnte in [Friedman] sogar zeigen, dass hierauf tatsächlich nicht verzichtet werden kann. Dies ist erstaunlich, denn die Aussage, dass jede Borel-Menge reeller Zahlen determiniert ist, bezieht sich zunächst lediglich auf den Gegenstandsbereich der "gewöhnlichen" Mathematik (ohne die moderne Mengenlehre). Es ist daher alles andere als selbstverständlich, dass in ihrem Beweis auf solche "higher-type-objects" mit Kardinalitäten weit über der des Kontinuums nicht verzichtet werden kann.

Aufgrund der fundamentalen Rolle des Potenzmengenaxioms im Beweis von Borel-Determiniertheit lässt es sich auf den ersten Blick vermuten, dass Satz (6.12) in $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP bzw. in $SOA + \mathbf{\Sigma}^1_3$-LM nicht gezeigt werden kann.

Mit Hilfe von Satz (6.1) stellt sich diese Annahme nun jedoch als falsch heraus, denn wir können mit dem Beweisprinzip von Satz (6.8) folgenden Satz beweisen:

Satz 6.13 *SOA+$\mathbf{\Pi}^1_1$-PSP und SOA+$\mathbf{\Sigma}^1_3$-LM beweisen Borel-Determiniertheit.*

Beweis:
Ist $\varphi(x, y)$ eine Π^1_1-Formel und $\phi(x, y)$ eine Σ^1_1-Formel, so ist folgender Satz Π^1_3:

$$(\forall y \in \mathcal{N})[(\forall x \in \mathcal{N})[\varphi(x, y) \leftrightarrow \phi(x, y)] \rightarrow Det(\{x \in \mathcal{N} : \varphi(x, y)\})].$$

Nach Martins Satz (6.12) ist diese Aussage wahr in ZFC. Damit folgt der Beweis von (6.13) aus Satz (6.8). □

Eine sich anschließende und noch offene Frage ist nun, ob sich der Beweis von Satz (6.13) auch auf "direktem" Wege, d.h. ohne Bezugnahme auf ein inneres Modell, in welchem wir mit dem Potenzmengenaxiom arbeiten können

[18] Im vollständigen Beweis die ω_1-fache iterierte Potenzmenge von X.

und das gewünschte Ergebnis dann aufgrund von Shoenfield-Absolutheit erhalten, beweisen lässt. Ein solcher Beweis wäre zugleich ein neuer Beweis von der Gültigkeit von Borel-Determiniertheit in ZFC, denn wie in der Arbeit von [Busche] gezeigt wird gilt, dass jeder in $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$-PSP beweisbare Π^1_3-Satz bereits in ZFC beweisbar ist.

6.4 Hauptresultat

Am Ende dieser Arbeit werden wir nun unsere Hauptresultate zusammen mit den bereits in den Abschnitten 6.1 und 6.2 zitierten Ergebnissen aus der Arbeit von Daniel Busche (vgl. [Busche]) in einem abschließendem Theorem zusammenfassen:

Theorem 6.14 *Folgende Theorien sind äquikonsistent und beweisen die gleichen* Π^1_3*-Sätze von* $\mathcal{L}_2$ *.*

- ZFC*.*
- $SOA + \mathbf{\Pi}^1_1$*-PSP.*
- $SOA + \mathbf{\Sigma}^1_3$*-LM.*
- *SOA+volle topologische Regularität.*

A Zur Stärke mathematischer Axiomatisierungen – einige metamathematische Überlegungen

Im Folgenden möchte ich einige Anmerkungen zu im Vergleich zu ZFC schwachen Axiomensystemen, wie beispielsweise dem in dieser Arbeit verwendeten System SOA bzw. $ZFC^- + V = HC$, einer konservativen Erweiterung von SOA, machen.
In der Literatur, welche sich mit schwachen Axiomatisierungen beschäftigt, ist oft im Vorwort eine “Rechtfertigung” dieser Thematik zu finden. Beispielsweise bedauert Simpson [Simpson], dass das Interesse an mathematischer Grundlagenforschung und somit auch an der Frage, wie stark Axiome denn überhaupt sein müssen um die wesentlichen Theoreme der Mathematik zu beweisen (Stichwort: “reverse mathematics”) heutzutage “aus der Mode” gekommen sei. Barwise [Barwise] gibt eine noch direktere Rechtfertigung, indem er zunächst konkrete Aspekte, welche ihm an ZFC missfallen, anführt und daraus schlussfolgert: ‘[...] these considerations [...] eventually dictate the study of set theories weaker than ZF’.
Im Folgenden möchte ich nun auch Argumente beschreiben, welche die Beschäftigung mit schwächeren Axiomensystemen als sinnvoll erscheinen lassen. Diese werden Bezug nehmen auf die Rolle der Mathematik in den Naturwissenschaften, insbesondere in der Physik.
In ihrem Buch “Naturalism in Mathematics” [Maddy1] beschäftigt sich Maddy mit der Frage, nach welchen Kriterien mathematische Axiome gewählt werden sollten. Sie stellt diese Frage jedoch in einem für unser Anliegen wenig relevantem Kontext, da sich ihre Ausführungen auf neue mögliche Axiome im Bereich der Mengenlehre (Konstruktibilitätsaxiom, Große-Kardinalzahl-Axiome, Determiniertheitsaxiome) beziehen und sie damit die “Rechtfertigung” von ZFC selber schon voraussetzt.
Dennoch werde ich in gewisser Weise an ihre Argumentation anknüpfen und sie daher an dieser Stelle kurz erläutern:

Welche möglichen Ansätze gibt es zur Beantwortung der Frage nach der Wahl geeigneter Axiome? Ein erster wäre sicher der “philosophische Ansatz”: Man beschäftigt sich mit der Philosophie der Mathematik, insbesondere mit Fragen der Ontologie und Epistemologie, und versucht schließlich die Axiome so zu wählen, dass diese im Einklang mit den eigenen philosophischen Überzeugungen stehen. Material zum Studium verschiedener philosophischer Ansätze steht zur Genüge zur Verfügung, man findet nahezu zu jeder erkenntnistheoretischen Theorie in der Philosophie den dazu passenden Ansatz in der Mathematik. Schöne Ausarbeitungen enthalten beispielsweise [Maddy2] (Realismus), [Shapiro] (Strukturalismus), [Rheinwald] (Nominalismus, Formalismus,...?), [Heyting] (Intuitionismus) oder (in Kurzform) auch [Ebbinghaus] (einige Anmerkungen unter anderem zum Konzeptualismus).

Dieser Ansatz kann jedoch verschiedene Probleme bergen, insbesondere jenes, dass zu wenig Bezug zur tatsächlichen Praxis der Mathematiker hergestellt wird. In dieser spielen philosophische Aspekte, wenn überhaupt, nur eine sehr untergeordnete Rolle. Was zählt sind die mathematischen Interessen, nicht die philosophischen.
Dieses Argument wird von Maddy ausführlich geschildert und ist schließlich der Ausgangspunkt für ihre zweite Strategie zur Beantwortung der Frage nach der Wahl von Axiome. Der "mathematische" Ansatz bzw. "naturalism": Dieser Ansatz entspricht keiner philosophischen Richtung, auch wenn eine solche durch ihn nicht ausgeschlossen wird. Er ist mehr eine Strategie oder eine Überzeugung, nach welcher Mathematik so betrieben werden sollte, wie es "mathematisch am natürlichsten" ist. Bezogen auf die Frage nach der Wahl von Axiomen bedeutet dies, dass diese aus der Mathematik selber entschieden werden sollte. Das heißt, man wählt Axiome so, dass sie den Vorstellungen der Mathematiker (und nicht unbedingt denen der Philosophen) genügen und mathematisch wünschenswert erscheinende Ziele mit ihrer Hilfe verwirklicht werden können.

Diesen letzten Ansatz, nach welchem sich die Axiomatisierung der Mathematik vor allem an der Praxis orientieren sollte, werde ich nun aufgreifen. Dabei werde ich jedoch nicht, wie Maddy, auf die Erwartungen an die Mathematik eingehen, die sich aus der Praxis der Mathematiker selbst ergeben, sondern vielmehr auf die, die sich aus der mathematischen Praxis der Anwender der Mathematik, insbesondere der Physik, ergeben. Denn angesichts der fundamentalen Rolle, die die Mathematik in der Physik einnimmt[19], liegt auch hier ein weites Feld vor, in dem aktiv Mathematik betrieben wird.
Im Folgenden werden wir uns nun mit der mathematischen Praxis der Physiker auseinandersetzen und anschließend versuchen, mit den daraus gewonnenen Erkenntnissen herauszufinden, welchen Anforderungen an mathematischen Axiomatisierungen gestellt werden sollten, damit diese mit der Physik kompatibel bleiben. Diese Ergebnisse werden wir schließlich sowohl auf die Frage anwenden, was sich Physiker von der mathematischen Forschung erhoffen dürften, als auch auf darauf aufbauende Überlegungen, warum mit der Physik kompatible mathematische Systeme auch für die Mathematik selbst von Interesse sein könnten.

1. Die mathematische Praxis der Physik:

Um die Situation der mathematischen Praxis der Physiker zu untersuchen, werde ich zunächst auf die "philosophische Situation" der Physik eingehen.

[19] Die Quantenmechanik ist bis heute nicht intuitiv erklärbar, ihre Existenz wäre ohne den mathematischen Formalismus schlicht eine Unmöglichkeit. Allgemeiner lässt sich feststellen, dass insbesondere theoretische Physik in ihrer heutigen Form ohne Mathematik undenkbar wäre.

Es ist hierbei wichtig zu beachten, dass oben beschriebene Konzepte zur Wahl mathematischer Axiome – zum einen die Orientierung an philosophischen Überzeugungen und zum anderen die Orientierung an der tatsächlichen Praxis – sich keinesfalls ausschließen. Dieser Eindruck könnte sich daraus ergeben, dass vor allem in der modernen Mengenlehre philosophische Überlegungen wenig Einfluss auf die Praxis haben und somit das erstere Konzept (wie oben bereits erwähnt) bei der Wahl von möglichen ZFC erweiternden mengentheoretischen Axiomen auf Grundlage der mathematischen Praxis wenig von Bedeutung ist. Wie wir nun erörtern werden, scheint dies im Falle der Physik jedoch nicht in gleicher Weise zuzutreffen.

Vereinfacht ausgedrückt ist es das Ziel der Physik, das "Universum" zu beschreiben. Auch wenn "Realität" philosophisch gesehen sicher auf die unterschiedlichsten Weisen interpretiert werden kann, so lässt sich schwer bezweifeln, dass der Physiker "von Haus aus" an eine gewisse Realität und Existenz physikalischer Objekte glauben muss, um in sinnvoller Weise seiner Wissenschaft nachzugehen. Seine Gründe, an die Realität seiner Forschungsobjekte zu glauben, sind jedenfalls viel nahe liegender als jegliche Gründe, die einen Mathematiker dazu bewegen könnten. (Auch wenn der Mathematiker natürlich, wenn er seine Wissenschaft ausübt, nicht umhin kann, zumindest sprachlich so zu tun, als ob den mathematischen Objekten eine gewisse Existenz zukomme!)
Auch wenn sich dieser "Realismus" der Physiker zunächst nur auf physikalische, also raum-zeitliche, Objekte bezieht und nicht auf abstrakte mathematische Konstruktionen, so dürfte es dem Physiker auch in Hinsicht auf letztere schwerer fallen, diesen eine gewisse "Existenz" (insbesondere auch im Hinblick auf Eindeutigkeit) abzustreiten. Angesichts der engen Verknüpfung von Mathematik und Physik steht er hier einem ähnlichen Fall gegenüber wie dem klassischen "Leib-Seele-Problem" der Philosophie, denn: Wie könnten "nicht-existente Dinge" einen derartigen Einfluss auf eine physikalisch existierende Welt haben[20]?
Auch wenn der Mathematiker sicher mit eben solchem Erstaunen dieses "Mathematik-Physik-Problem" betrachtet, so muss es ihn in Bezug auf seine Tätigkeit als Wissenschaftler weit weniger beeinflussen als den Physiker.

[20] Bei dem "Leib-Seele-Problem" geht es um die Frage, ob "Leib" und "Seele" von gleicher Natur sind (unser "Seelenleben" beruht auf nichts Weiterem als gewissen physikalisch erklärbaren Vorgängen, beispielsweise elektrischen Impulsen) oder sich grundsätzlich voneinander unterscheiden. Beide Annahmen führen zu Schwierigkeiten, denn im ersteren Fall würde uns in gewisser Hinsicht unser "Verständnis von uns selbst" (insbesondere unser freier Wille) verloren gehen und im zweiten Fall ist es schwer zu erklären, auf welche Weise "seelische Dinge" physikalische Prozesse in Gang setzen können, was sie ja unzweifelhaft kontinuierlich tun. Dieses Problem der "Nichterklärbarkeit der Verbindungsstelle" zweier prinzipiell unterschiedlicher Existenzformen, die dennoch in engster Wechselwirkung miteinander zu stehen scheinen, betrifft auch analoge Überlegungen bezüglich der Mathematik und Physik.

Anders als im Fall der Physik ist es für die Beschäftigung mit Mathematik vollkommen irrelevant, ob die “Existenz einer physikalischen Welt” vorausgesetzt wird oder nicht.
Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass der Physiker in seinen philosophischen Einstellungen (aufgrund der angenommenen Tatsache, dass er sein wissenschaftliches Tun für sinnvoll erachtet) im Allgemeinen mehr Grund zur Annahme einer “Realität” hat als dies bei einem Mathematiker der Fall ist, denn seiner Wissenschaft würde sonst in gewisser Weise “die Grundlage” entzogen[21] [22].
Dieser philosophische Aspekt ist meines Erachtens bei der Wahl eines mathematischen Axiomensystems von tragender Wichtigkeit. Denn während sich der Mathematiker in seinem “wissenschaftlichen Hintergrunddenken” sehr unbefangen alle möglichen Welten vorzustellen vermag[23], so existiert in dem “philosophischen Hintergrunddenken” des Physikers nur eine reale Welt und somit wahrscheinlich auch nur eine dazugehörige Mathematik.
In anderen Worten, der Mathematiker hat die (gedankliche) Freiheit zu fragen, “Welches Axiom ist schön und im Sinne meiner Interessen?”, während der (realistische) Physiker fragen muss: “Welches Axiom ist richtig?”
Da das “Hintergrunddenken”, ob gewollt oder ungewollt, auch immer Einfluss auf die Praxis hat, liegt somit die Vermutung nahe, dass sich der Physiker in seinem Tun tatsächlich mehr von philosophischen Überzeugungen leiten lässt als ein Mathematiker. Daraus ergibt sich ein erster zu beachtender Aspekt zum Verständnis der Mathematik aus Sicht der physikalischen Praxis.

Gehen wir nun aber daran einen direkten (nicht durch ein philosophisches Hinterfenster erspähten) Blick auf die Praxis des Physikers zu werfen, um herauszufinden, welche Ansprüche dieser an die Mathematik stellt.

[21] Natürlich kann weder ein Physiker, noch ein Mathematiker, noch ein Philosoph irgendeine philosophische Richtung “beweisen”, auch nicht innerhalb seiner eigenen Wissenschaft. Ich gehe auch nicht davon aus, dass alle Physiker realistische Ansichten pflegen. Es geht mir vielmehr darum, wie die allgemeine “Strömung ”in den einzelnen Wissenschaften ist, bzw., ob eine solche überhaupt vorhanden ist. Im Falle der Mathematik und der Philosophie scheint dies (jedenfalls für mich) wenig erkennbar, während in der Physik ein gewisser Realismus” bzw. “Glaube an eine existierende Wirklichkeit” schon alleine deswegen nahe zu liegen scheint, da ohne ihn die Tätigkeiten eines Physikers in der Gefahr schweben würde, ihren Sinn zu verlieren.

[22] Es soll an dieser Stelle nicht verschwiegen werden, dass es durchaus auch Interpretationen physikalischer Theorien gibt, die nicht auf dem Gedanken einer “eindeutige Realität” aufbauen. Ein Beispiel hierzu ist die “Vielwelten”-Interpretation der Quantenmechanik, nach der sich der Beobachter selbst in eine Superposition möglicher Zustände verwandelt. Solche Interpretationen dürften von den meisten Physikern jedoch nicht in ernsthafter (und damit für die Praxis relevanter) Weise in ihre physikalisches Weltbild einbezogen werden, zumal auch einige technische Probleme bestehen bleiben, vgl. [Tegmark, Wheeler].

[23] Selbst wenn er an eine eindeutige mathematische Wirklichkeit glaubt, kann er dennoch mit Hilfe von inneren Modellen oder Forcing allerhand “weitere Welten” studieren.

Ein Physiker stellt Beobachtungen an der Natur an und versucht diese anschließend in einem Modell zu erklären. Sein Primat dabei ist die Übereinstimmung der beobachtbaren Phänomene mit den Vorhersagen des Modells. Fragen wir ihn nach der Mathematik, die er in seinem Modell verwendet, so würde er wahrscheinlich antworten, dass er von dieser vor allem erwartet, "zu funktionieren", d.h. ihm (möglichst) vollständig alles zu liefern, was er für den Formalismus seiner Theorie benötigt. Tut sie das nicht, so hat die Geschichte gezeigt, dass Physiker durchaus motiviert sind, "die Lücken zu stopfen" und die fehlende Mathematik selbst zu entwerfen[24]. Dem Physiker ist dabei in seinem Tun die Maxime "Vollständigkeit" wichtiger als die der "Konsistenz". Mehr oder weniger kleine "Inkonsistenten" werden, wenn es sein muss, ohne große Bedenken durch allerhand "Tricks" ausgebessert[25].
Wir haben somit einen zweiten wichtigen Aspekt der Rolle der Mathematik in der Physik ausfindig gemacht: Mathematik als Mittel um physikalische Theorien mit logischer Struktur und einer exakten Sprache zu unterlegen, wobei die Mathematik der Theorie bzw. den beobachtbaren Phänomenen, welche diese erklärt, ggf. angepasst wird.
Es gibt jedoch noch einen dritten Aspekt der Mathematik, der in der Praxis der Physik eine Rolle spielen könnte: Mathematik als "Intuition". Um den Blick zu öffnen für neue, fruchtbare Ansätze zur Erklärung seiner Beobachtungen ist es manchmal notwendig, dass der Physiker "neue Teile der Welt" betritt und sich nicht vor Ungewohntem scheut. Für solche Entdeckungsreisen ist Intuition und Fantasie unabdingbar. Gerade im Bereich der Physik liegt es nahe, diese auch in Form aller möglichen denkbaren mathematischen Konstruktionen, und seien diese auf den ersten Blick noch so sonderbar (hier sei nur an einige der durch die moderne Mengenlehre ins Leben gerufene mathematischen Objekte erinnert), zu suchen[26].

[24]Beispiel: Dirac's Delta-Funktion, die er zur Beschreibung des Elektrons benötigte, und die dann erst sehr viel später von Schwartz als Beispiel einer verallgemeinerten Funktion verstanden wurde.

[25]Ein Beispiel hierfür ist die Elektrodynamik, die sowohl in ihrer klassischen als auch in ihrer quantenmechanischen Beschreibung die Physiker vor (zunächst) unlösbar erscheinende mathematische Probleme stellt. Über die heute gängige Theorie QED, für deren Entwicklung Feynman (zusammen mit Schwinger und Tomonaga) den Nobel-Preis erhielt, schreibt dieser: "it turns out that it is possible to sweep the infinities under the rug, by a certain crude skill, and temporarily we are able to keep on calculating"[Feynman1] und weiter "[...]What is certain is that we do not have a good mathematical way to describe the theory of quantum electrodynamics; such a bunch of words...is not good mathematics."[Feynman2]

[26]Auch wenn dieses Vorwort im wesentlichen ein Argument für die Beschäftigung mit schwächeren mathematischen Theorien sein soll, so ist dieser Aspekt hier aufgeführt, um auch eine Überlegung angeben, welche nahe legt, dass auch die mathematischen Ergebnisse starker Axiomatisierungen für die Physik in gewisser Hinsicht von Interesse sein könnten. Jedoch bleibt zu beachten, dass dieser Aspekt vermutlich nicht in dem Maße die tägliche Arbeit des Physikers bestimmt wie die ersteren.

Greifen wir die ersten beiden Aspekte unserer Erörterung der mathematischen Praxis der Physiker auf, so kann man sich nun überlegen, warum Axiomensysteme wie ZFC evtl. für eine Axiomatisierung im Sinne der Praxis der Physik mitunter zu stark sind.
Für einen ersten Punkt bzgl. der aus der Praxis entstehenden Einstellungen der Physiker zu solch starken Axiomensystemen wie ZFC ziehen wir das "philosophische Hintergrunddenken", welches den Physiker in seiner täglichen Arbeit stets begleitet, also den ersten Aspekt unserer Erörterung der mathematischen Praxis der Physik, heran. Da der Physiker durch dieses mehr in den Vorstellungen von einer "realen Welt" gefangen ist als der Mathematiker, liegt die Frage nahe, ob er sich demzufolge nicht auch schwerer tut, gewisse "obskure" Objekte der Mengenlehre zu akzeptieren.
Insbesondere das Potenzmengenaxiom, welches die Existenz von Objekten mit Kardinalitäten weit über der des Kontinuums postuliert, dürfte ihm zunächst eher befremdlich anmuten. Denn beispielsweise scheint schon die angenommene Existenz des bei der Suche nach physikalischen Objekten vom Umfang des Kontinuums unter anderem am nahe liegenden Objektes, dem Raum-Zeit-Kontinuum, eine primäre Ursache in der Unvereinbarkeit von Quantenmechanik und allgemeiner Relativitätstheorie darzustellen (vgl. [Isham]). Man braucht sich aber noch nicht einmal so weit in die Theorien der modernen Physik vorzuwagen: Schon auf "klassischer Ebene" finden sich zahlreiche Hinweise auf die Problematik mit dem Kontinuum, z.B. im Zusammenhang mit dem statistischen Gewicht für den Boltzmann-Faktor bei der Herleitung der Maxwell-Boltzmann-Verteilung für die Geschwindigkeit in Gasen.
Gehen wir nun auf den zweiten auf Grundlage der Praxis erörterten Aspekt ein: Die Mathematik als Strukturelement physikalischer Theorien, wobei die beobachtbaren Phänomene im Vordergrund stehen und der Mathematik in diesem Sinne ein zweitrangiger Charakter zukommt. Um seiner Maxime "Übereinstimmung des Modells mit der Beobachtung ist wichtiger als die dazu verwendeten Methoden" gerecht zu werden, benötigt der Physiker damit (mathematischen) Freiraum. Er muss die Möglichkeit haben, seine eigenen mathematischen Ideen und Zielvorstellungen einzubringen, welche sich daran orientieren, beobachtbare Phänomene in Einklang mit physikalischen Theorien zu bringen und somit von anderer Natur sind als bei einem Mathematiker. Die verwendete Mathematik muss sich von ihm "anpassen" lassen und dabei können zu starke Axiome durchaus hinderlich sein.
Denn zum einen ist die Gefahr der Inkonsistenz größer, besonders dann, wenn der Physiker zusätzliche mathematische Annahmen in seine Theorie steckt. (Das Physiker zuweilen selbst gerne Mathematik erfinden, haben wir bereits gesehen!)

Aber Inkonsistenz ist nicht das einzige Problem. Obwohl man die meisten Aussagen im Bereich der "gewöhnlichen" Mathematik (damit beziehe ich mich auf nicht-mengentheoretische Mathematik) schon in relativ schwachen Theorien beweisen kann, so gibt es dennoch Beispiele für solche, zu deren Beweis man in starkem Maße auf die Methoden der Mengenlehre zurückgreift[27]. Da Physiker in ihren Theorien im Allgemeinen mit Aussagen aus der "gewöhnlichen" Mathematik arbeiten, ist somit durchaus die Situation denkbar, dass Aussagen benötigt werden, welche bislang nur unter zur Hilfenahme starker Axiome bewiesen wurden. Was tut ein gewissenhafter Physiker in solch einer Situation?

Auch hier wird die Maxime "Übereinstimmung von Beobachtung und Modell" vermutlich die Antwort bestimmen: Erweist sich die in Frage stehende Aussage als seiner Theorie förderlich, so wird der Physiker aller Wahrscheinlichkeit nach die zu ihrem Beweis benötigten Hilfsmittel (Axiome) akzeptieren, auch wenn sie ihm noch so merkwürdig vorkommen mögen[28]. Lässt die Aussage sich mit seiner Theoriebildung jedoch nur schwer oder gar überhaupt nicht vereinbaren, so dürfte der Physiker wenig Grund sehen, warum er diese "verrückten Ideen der Mathematiker" in seinen Ansichten über Mathematik berücksichtigen sollte. Mit anderen Worten: Der Physiker möchte selbst entscheiden, ob er gewisse starke Axiome akzeptiert oder nicht.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass bei einer mathematische Axiomatisierung, welche den Anspruch erhebt, mit der Praxis der Physik kompatibel zu sein, nicht auf Axiome zurückgegriffen werden sollte, die den Rahmen der Mathematik zu weit festlegen könnten.

3. Zum möglichen Nutzen von mit der Physik kompatiblen mathematischen Systemen

Mathematik ist von Physikern, genau wie von Mathematikern, lange Zeit einfach "gemacht" worden (und wird es noch heute), ohne dass sich zu den axiomatischen Grundlagen besonders viele Gedanken gemacht wurden[29]. Daher gehe ich davon aus, dass Physiker, ebenso wie Mathematiker, ein gewisses "intuitives Grundverständnis" der Mathematik besitzen, welches zumindest so weit geht, dass über die wesentlichen Axiome, die man für die "gewöhnliche Mathematik" benötigt, eine gewisse Übereinstimmung und Akzeptanz besteht. Es gibt also ein "mathematisches Grundgerüst", an dem

[27] Ein Beispiel hierfür ist der von Martin geführte Beweis von Borel-Determiniertheit, welcher unter anderem auf der iterierten Anwendung des Potenzmengenaxioms beruht.

[28] Insbesondere im Hinblick auf sein "philosophisches Hintergrunddenken", vgl. den ersten erörterten Aspekt der mathematischen Praxis der Physik.

[29] Dabei sehe ich wenige Gründe, warum die Physik langfristig daran weniger interessiert sein sollte als die Mathematik. Auch wenn die Idee einer "Universumstheorie" philosophisch strittig sein mag, gehört sie dennoch immer noch unzweifelhaft zu den Hauptzielen der Physik (vgl. z.B. [**?**]). Eine in diesem Sinne vollständige Theorie erfordert mit Sicherheit auch die Festlegung der mathematischen Spielregeln.

der Physiker festhalten wird, auch wenn dieses zu Komplikationen in seiner Theorie führen sollte.
Somit ist das, was sich der Physiker von den Ergebnissen der Mathematiker erhoffen wird, zunächst einmal eine grundlegende Analyse dieses "mathematischen Grundgerüstes". Dieses kann er dann, sollte es die Theoriebildung erforderlich machen, später nach seinen spezifischen physikalischen Interessen um zusätzliche mathematische Annahmen erweitern.
Die Analyse eines solchen "Grundgerüstes" erfordert jedoch ein entsprechend moderates, auf den Gegenstandsbereich angepasstes Vorgehen bei der Wahl der Axiome.

Doch nicht nur die Physik dürfte an mit der Physik kompatiblen mathematischen Systemen interessiert sein. Es ist gut denkbar, dass auch die Mathematik selbst von der Beschäftigung mit solchen Systemen durchaus profitieren könnte.
Um diesen Gedanken weiter auszuführen sei hier an die durch das Auffinden mathematischer Paradoxien (z.B. der Russellschen Paradoxie) verursachte Grundlagenkrise der Mathematik am Ende des vorletzten Jahrhunderts erinnert. Da es nur wenige Dinge gibt, die einen Mathematiker mehr zum Verzweifeln bringen dürften als ein offen da liegender Widerspruch, bemühte man sich intensiv um eine Lösung und fand diese schließlich in der so genannten "axiomatischen Methode": Man sprach den Verursachern der Paradoxien die Existenz ab.
Paradoxien, die wie die Russellsche auf Selbstbezüglichkeit beruhen, sind seit der Antike bekannt und sind seither sicher auf die unterschiedlichsten Weisen zu "lösen" versucht worden, wobei eine "Lösung" in diesem Sinne zunächst als ein möglicher Weg im Umgang mit ihr zu verstehen ist. Auch wenn der Weg der axiomatischen Methode sicher eine kluge und auch in Zukunft weiter zu verfolgende Methode ist, so ist diese (wie wohl auch jede andere) dennoch nicht frei von Problemen:
Zum einen kann in einem erkenntnistheoretischen Sinne gefragt werden, welche Art neuen Wissens in solch einem axiomatischen System überhaupt gewonnen werden kann. Denn es handelt sich bei "neu" bewiesenen Sätzen stets um Erkenntnisse, die schon von Anbeginn in den Axiomen festgelegt sind und nur (für uns) nicht auf den ersten Blick aus diesen ersichtlich sind[30]. Wirklich "neue Erkenntnis", wie sie in anderen Wissenschaften vor allem aus dem immer wieder stattfindenden Abgleich zwischen Theorie und empirischem Wissen gewonnen wird, kann somit nicht möglich sein. Dabei ist "empirisches Wissen" in der Mathematik durchaus ein denkbares Konzept: Ein Kandidat für eine dazu benötigte "mathematische Realität" wäre beispielsweise die "mathematische Intuition", deren Rolle in Bezug zur Er-

[30]Diese Problematik ist in der Philosophie auch unter dem Namen "Analyseparadoxon" bekannt, vgl. philex.de vom 24.01.03.

kenntnisgewinnung in der Mathematik bereits von Gödel mit der Rolle der "physikalischen Realität" in Bezug zur Erkenntnisgewinnung in der Physik verglichen wurde[31]. Ein weiterer für unser Anliegen relevanterer Ansatz jedoch ist es, "mathematische Realität" und damit die Möglichkeit tatsächlich "neuen Wissens", in der "physikalischen Realität" zu suchen. Gerade unter dem Aspekt, dass die Physik (warum auch immer) untrennbar mit der Mathematik verknüpft zu sein scheint, scheint es durchaus denkbar, dass die in der Physik erworbenen Kenntnisse auch Ideen für mathematische Konstruktionen liefern könnten[32].
Ein weiteres Problem des Lösungswegs der axiomatischen Methode ist das der Unvollständigkeit, welches durch die Formulierung des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes sowohl in der Mathematik als auch in der Philosophie für Aufsehen sorgte. Auch hier liegt der Gedanke nicht fern, warum eine mehr an dem Abgleich mit den Naturwissenschaften orientierte Denkweise der Mathematik von Nutzen sein könnte: Mit der "physikalischen Realität" (die evtl. eine "mathematische Realität" beinhaltet), steht ein Modell zur Verfügung, auf welches im Gegensatz zu einem angenommenen Modell V der Mengenlehre ein Zugriff möglich ist, der sich nicht nur auf eine (unvollständige) axiomatische Beschreibung des Modells bezieht und mit dem somit das Prinzip "Vollständigkeit" nicht von vornherein ausgeschlossen wird.
Alternative Lösungsansätze zur "axiomatischen Methode" bzgl. der Paradoxieproblematik in der Mathematik müssen nicht auf die Annahme gewisser Axiome verzichten[33]. Auch in der Physik werden manche Aussagen axiomatisch gefordert, angefangen bei den klassischen Newtonschen Axiomen der Mechanik bis hin zu den Axiomen der Quantenmechanik, welche in ihrer philosophischen Interpretation vielleicht noch rätselhafter als die Axiome der modernen Mengenlehre erscheinen mögen. Dennoch ist hier eine der entscheidenden Methoden zur Gewinnung neuen Wissens das physikalische Experiment, welches Erkenntnis in einem davon gänzlich unberührtem Rahmen möglich macht.

Die unterschiedliche Herangehensweise im Umgang mit Mathematik in der Physik und der Mathematik selbst sollten Anlass geben, dem Prinzip der Interdisziplinarität auch in der Mathematik Beachtung zu schenken.
Nicht nur die Physik profitiert in offensichtlicher Weise von der mathematischen Forschung. Auch für die Mathematik selbst könnten Anregungen

[31] In [Goedel] schreibt dieser: "I don´t see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e., in mathematical intuition, than in sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them, and moreover, to believe that a question not decidable now has meaning and may be decided in the future."

[32] In geringem Umfang ist dies bereits schon geschehen, vgl. Fußnote (24)

[33] Ansonsten könnte ggf. auch eine schwächere bzw. mit der Physik kompatible Axiomatisierung wenig zu neuen Lösungsvorschlägen bezüglich eines interdisziplinär orientierten Austausches beitragen.

aus jener Wissenschaft, die (in mathematisch etwas arroganter Art) in mancher Hinsicht schon fast als ein Teilgebiet der Mathematik gesehen werden kann[34], und die sich dennoch so grundlegend in weiten Teilen ihrer Methodik von der Mathematik unterscheidet, durchaus viel versprechend sein[35]. Indem sich die Mathematik zusätzlich auch mit Physik kompatibleren Axiomensystemen als beispielsweise ZFC beschäftigt, wird verhindert, dass wir uns den Möglichkeiten solcher Ansätze von vornherein verschließen.

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Kurt Roth, der mir einige Einblicke in die philosophischen Gedanken eines Physikers gewährte und bei meiner Freundin und ehemalige Kommilitonin Mona Frommert, die zur Zeit selber an ihrer Diplomarbeit (in der Physik) schreibt und jederzeit bereit war, mein physikalisches Wissen zu ergänzen.

[34]Vgl. Fußnote (19).

[35]Vielleicht mag heute einem Mathematiker der Gedanke, dass es noch weitere Möglichkeiten zur "Lösung" der Paradoxieproblematik geben könnte, genauso absurd vorkommen wie einem Physiker vor nicht einmal hundert Jahren die Überlegung, dass es eine physikalische Theorie geben könnte, die selbst im Falle der genauen Kenntnis der Anfangsbedingungen meist nur Wahrscheinlichkeitsaussagen macht, was sich – und das ist das eigentlich Schlimme – jedoch nicht aus der Unkenntnis der "verborgenden Variablen" ergibt, sondern aus einer Superposition sich nach klassischen Theorien ausschließender Zustände, welche erst durch den Akt des Beobachtens wieder aufgehoben wird. Dennoch, obwohl die Quantenmechanik selbst von ihren Erfindern, die noch mit dem Weltbild einer zumindest theoretisch vollkommen deterministischen Physik, eine der wohl bis dahin seit Jahrhunderten fest verankertsten Grundannahmen dieser Wissenschaft, aufwuchsen, heftigst kritisiert wurde ("Gott würfelt nicht", A. Einstein), zählt sie heute zu den erfolgreichsten Theorien der modernen Physik.

Literatur

[Bartoszyński/Judah] Tomek Bartoszyński, Haim Judah, Set Theory: On the Structure of the Real Line, AK Peters Wellesley, Massachusetts, 1995

[Barwise] Jon Barwise, Admissible Sets and Structures, An Approach to Definability Theory, Springer-verlag 1975

[Busche] Daniel Busche, Topologische Regularität und zweitstufige Arithmetik, 2004

[Ebbinghaus] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Einführung in die Mengenlehre, BI-Wissenschaftsverlag, 1994

[Feynman1] Richard Feynman, The Character of Physical Law, Cambridge, Mass.: MIT Press, 1967, zitiert aus [Maddy1]

[Feynman2] Richard Feynman, QED: The Strange Theory of Light and Matter, Princeton University Press, 1985, zitiert aus [Maddy1]

[Friedman] Harvey M. Friedman, A more explicit set theory, In Dana S. Scott, editor, Axiomatic Set Theory, volume 1, number 13 in Proceedings of Symposia in Pure mathematics, pp.49-66, American Mathematical Society, Providence, 1971

[Goedel] Kurt Gödel, ‘What is Cantor‘s continuum problem?’, Collected Works, vol.ii, ed. S. Feferman et al., Oxford University Press, 1990, zitiert nach [Maddy1]

[Heyting] A.Heyting, Intuitionism. An Introduction, North-Holland Publishing Company, 1956

[Isham] Chris Isham, ‘Quantum gravity’, The New Physics (herausgegeben von Paul Davies), Cambridge University Press, 1989, S.70-93, zitiert nach [Maddy1]

[Jech] Thomas Jech, Set Theory, Springer Verlag, 2002

[Kanamori] Akihiro Kanamori, The Higher Infinite, Springer Verlag, 2003

[Kechris] Alexander S. Kechris, Classical Descriptive Set Theory, Springer-Verlag, 1995

[Kohnen] Winfried Kohnen, Analysis III, Skriptum der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 1997

[Kunen] Kenneth Kunen, Set Theory, an Introduction to Independence Proofs, North-Holland Publishing Company, 2004

[Levy] Azriel Levy, Basic Set Theory, Springer Verlag, 1979

[Maddy1] Penelope Maddy, Naturalism in Mathematics, Clarendon Press, 1997

[Maddy2] Penelope Maddy, Realism in Mathematics,Clarendon Press, 1990

[Möllerfeld/Koepke] Michael Möllerfeld und Peter Koepke, Topological Regularity and Second Order Arithmetic, ?

[Möllerfeld] Michael Möllerfeld, Generalized Inductive Definitions, The μ-calculus and Π^1_2-comprehension, 2001

[Moschovakis] Yiannis Nicholas Moschovakis, Descriptive Set Theory, North-Holland Publishing Company, 1980

[Pohlers] Wolfram Pohlers, Computability Theory of Hyperarithmetical Sets, 1996

[Raisonnier] Jean Raisonnier, A mathematical proof of S. Shelah's theorem on the measure problem and related results, Israel J. Math., 48 (1):48-56, 1984

[Rheinwald] Rosemarie Rheinwald, Der Formalismus und seine Grenzen– Untersuchungen zur neueren Philosophie der Mathematik , Hain, 1984

[Shapiro] Stewart Shapiro, Philosophy of Mathematics, Structure and Ontology, Oxford University Press, 1997

[Shelah] Saharon Shelah, Can you take Solovay‘s inaccessible away?, Israel J. Math., 48(1):1-47, 1984

[Simpson] Stephen G. Simpson, Subsystems of Second Order Arithmetic, Springer Verlag

[Schmitz] Norbert Schmitz, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie, Teubner Verlag, 1996

[Solovay] Robert M. Solovay, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Annals of mathematics 92, 1970

[Tegmark, Wheeler] Spektrum der Wissenschaft, Dossier 01/03: Vom Quant zum Kosmos

Erklärung

Ich versichere, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen Quellen als die angegebenen benutzt habe.