



# Skalierungsgesetze für Komplianz-minimierende 3D Mikrostrukturen unter Zugbeanspruchung

BACHELORARBEIT

vorgelegt von: Lukas Renelt

Matr. 444591

Betreuer: Prof. Dr. Benedikt Wirth  
Zweitgutachter: JProf. Dr. Manuel Friedrich

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

Münster, 15. Oktober 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Problemformulierung</b>	<b>3</b>
1.1	Motivation und Einführung . . . . .	3
1.2	Einführung in die Komplianzminimierung . . . . .	4
1.3	Das konkrete Setting dieser Ausarbeitung . . . . .	5
1.4	Duale Formulierung . . . . .	6
1.5	Bestimmung der Energie für $\varepsilon = 0$ . . . . .	7
1.6	Verwandte Problemstellungen . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Ein Skalierungsgesetz für den zweidimensionalen Fall</b>	<b>10</b>
2.1	Konstruktion einer oberen Schranke . . . . .	10
2.2	Eine untere Schranke in 2D . . . . .	13
2.2.1	Beweis mittels konvexer Dualität . . . . .	13
2.2.2	Beweis mittels der Hashin-Shtrikman Grenze . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Skalierungsgesetze im dreidimensionalen Fall für mittlere und kleine Span-</b>	<b>21</b>
	<b>nungen</b>	
3.1	Konstruktion einer oberen Schranke in 3D . . . . .	21
3.1.1	Mittlere anliegende Spannungen . . . . .	21
3.1.2	Kleine anliegende Spannungen . . . . .	22
3.2	Eine untere Schranke in 3D . . . . .	25
3.2.1	Mittlere anliegende Spannungen . . . . .	25
3.2.2	Kleine anliegende Spannungen . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>26</b>
<b>5</b>	<b>Eigenständigkeitserklärung</b>	<b>29</b>

# 1 Problemformulierung

## 1.1 Motivation und Einführung

In dieser Bachelorarbeit beschäftigen wir uns mit einem Problem aus dem Bereich der mechanischen Strukturoptimierung. Ziel ist es, in einem zwei- oder dreidimensionalen Gebiet  $\Omega$ , an dessen Rand eine feste Spannung anliegt, eine Geometrie  $\mathcal{O} \subset \Omega$  zu finden, die eine gewichtete Summe aus Volumen  $\text{Vol}(\mathcal{O})$ , Oberfläche  $\text{Per}(\mathcal{O})$  und Komplianz  $\text{Comp}(\mathcal{O})$  minimiert. Während Komplianz physikalisch als Inverses der Steifigkeit definiert ist, werden wir diese als die von der anliegenden Spannung verrichtete Arbeit verstehen (eine genaue Definition stellen wir im folgenden Kapitel vor). Durch das Einbeziehen eines Oberflächenterms wird die Komplexität der Struktur beschränkt. Eine solche Problemstellung lässt sich in vielen Anwendungsfeldern wiederfinden, wie beispielsweise in der Architektur (siehe Abbildung 1).

Auch in der Physik treten mathematisch ähnliche Probleme auf. So werden wir in dieser Arbeit eine Beziehung zur Bildung von supraleitenden Regionen in Typ-I-Supraleitern, an denen ein Magnetfeld anliegt, herleiten. Schränken wir die Komplexität der optimalen Geometrien durch eine hohe Gewichtung der Oberfläche stark ein, so können numerisch beispielsweise durch Finite Elemente Ansätze gute Ergebnisse erzielt werden. Bei einer schwachen Gewichtung hingegen sind als optimale Geometrien sehr fein verzweigte Mikrostrukturen zu erwarten, diese sind mit numerischen Ansätzen nur schwer zu erfassen. Wie von Kohn und Müller [KM94] festgestellt, lässt sich durch Betrachtung der minimalen Energie und deren Skalierung trotzdem ein gutes Verständnis für die minimierenden Geometrien entwickeln. Findet man ein Skalierungsgesetz für die Energie, so kann man erwarten, dass optimale Geometrien diesem gehorchen, auch wenn man deren Struktur nicht explizit beschreiben kann. Um ein solches Skalierungsgesetz zu beweisen, lassen sich zunächst durch die Konstruktion einer fast-optimalen Geometrie und die Berechnung deren Energie obere Schranken finden. Um sicherzustellen, dass andere Konstruktionen keine bessere Skalierungen erzielen, ist es außerdem erforderlich, eine vom Ansatz unabhängige und zur oberen Schranke passende untere Schranken zu beweisen.

Diese Bachelorarbeit behandelt sowohl den zwei-, als auch den dreidimensionalen Fall. In Kapitel 1 werden zunächst grundlegende Überlegungen in der Komplianzminimierung und insbesondere in unserem konkreten Setting vorgestellt. Wir werden dann in Kapitel 2 im 2D-Setting eine Konstruktion für eine obere Schranke vorstellen und zwei verschiedene Beweise für die untere Schranke führen, einmal mit einem klassischen Dualitätsargument und einmal mit einer angepassten Hashin-Shtrikman Grenze. Dieser Teil gibt in ausführlicher Form die Überlegungen des Artikels *Optimal fine-scale structures in compliance minimization for a uniaxial load* [KW14] von Prof. Dr. Robert V. Kohn und Prof. Dr. Benedikt Wirth wieder, der 2014 in der Zeitschrift *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* publiziert wurde und die Grundlage dieser Bachelorarbeit bildet. Anschließend werden wir in Kapitel 3 den dreidimensionalen Fall betrachten und auch hier mit zwei verschiedenen Konstruktionen obere Schranken herleiten. Komplettiert werden diese durch untere Schranken, die wir einer Publikation zum verwandten Supraleiterproblem [CKO04] entnehmen und in Abschnitt 3.2 vorstellen werden.

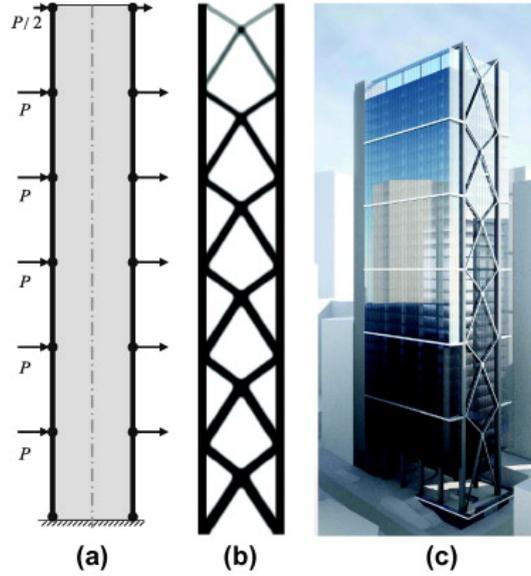


Abbildung 1: (a) Problemstellung (b) numerisches Ergebnis eines topologischen Strukturoptimierungsansatzes (c) Architektonische Umsetzung des Konzeptes (Abbildung entnommen aus [BBK<sup>+</sup>14])

## 1.2 Einführung in die Komplianzminimierung

Die Komplianz einer Geometrie  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ), die einer auf einen Teil  $\Gamma$  ihres Randes wirkenden Spannung  $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  ausgesetzt ist, ist definiert als

$$\text{Comp}(\mathcal{O}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} F \cdot u \, da.$$

Dabei ist  $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Auslenkung der Geometrie, die die freie Energie

$$E[u] = \int_{\mathcal{O}} \frac{1}{2} C \epsilon(u) : \epsilon(u) \, dx - \int_{\Gamma} F \cdot u \, da$$

minimiert und gegebenenfalls zusätzlichen Dirichlet-Randbedingungen auf  $\partial\mathcal{O} \setminus \Gamma$  genügt. Hier bezeichnet  $\epsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$  den linearisierten Stresstensor,  $C$  den Elastizitätstensor des Materials und wir haben mit  $A : B = \text{spur}(A^T B)$  das Froebenius-Skalarprodukt für Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  abgekürzt. Eine ausführliche Herleitung dieser physikalisch motivierten Definitionen findet sich beispielsweise in [Cia88].

Für ein fest gewähltes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\Gamma \subset \partial\Omega$  soll nun eine Geometrie  $\mathcal{O}$  gefunden werden, die die Komplianz  $\text{Comp}(\mathcal{O})$  minimiert. Gleichzeitig bestrafen wir das Volumen  $\text{Vol}(\mathcal{O}) = \int_{\mathcal{O}} 1 \, dx$  und die Oberfläche  $\text{Per}(\mathcal{O}) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\mathcal{O})$  ( $\mathcal{H}^n$  bezeichnet das  $n$ -dimensionale Hausdorff-Maß), sodass wir insgesamt eine Struktur  $\mathcal{O} \subset \Omega$  suchen, die das Funktional

$$J[\mathcal{O}] = \alpha \text{Comp}(\mathcal{O}) + \beta \text{Vol}(\mathcal{O}) + \varepsilon \text{Per}(\mathcal{O})$$

für gegebene Gewichte  $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$  minimiert.

### 1.3 Das konkrete Setting dieser Ausarbeitung

In dieser Arbeit wollen wir das Problem sowohl in 2D als auch in 3D betrachten. Im Zweidimensionalen beschränken wir uns, wie auch in [KW14], auf den einfachen Fall eines rechteckigen Gebietes  $\Omega = [0, \ell] \times [0, L]$ , an dessen Rand  $\partial\Omega$  eine Spannung  $\hat{\sigma}n$  angelegt ist. Diese sei in unserem Fall beschrieben durch  $\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$ , wir legen also eine Spannung der Stärke  $F$  an den oberen und unteren Rand  $\Gamma = [0, \ell] \times \{0, L\}$  an. Dies liefert dann bereits eine erste geometrische Bedingung, wir fordern  $\Gamma \subset \partial\Omega$ . Darüber hinaus sei unser Material isotrop mit Poissonzahl = 0, wir gehen also davon aus, dass das Volumen unserer Geometrie auch bei unterschiedlichen Spannungen konstant bleibt. Darüber hinaus bezeichne  $\mu$  das Schubmodul des Materials. Insgesamt wird die Komplianz also durch

$$\text{Comp}^{\mu, F, \ell, L}(\mathcal{O}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\hat{\sigma}n) \cdot u \, da \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

beschrieben, wobei  $u$  die freie Energie minimiert:

$$u = \text{argmin} E^{\mu, F, \ell, L} \quad \text{mit} \quad E^{\mu, F, \ell, L}[u] = \int_{\mathcal{O}} \mu |\epsilon(u)|^2 \, dx - \int_{\partial\Omega} (\hat{\sigma}n) \cdot u \, da$$

Sollte der Fall  $\Gamma \not\subset \partial\Omega$  auftreten, so setzen wir  $\text{Comp}^{\mu, F, \ell, L}(\mathcal{O}) = \infty$ .

Das zu minimierende Funktional ist dann gegeben durch

$$J^{\alpha, \beta, \varepsilon, \mu, F, \ell, L}[\mathcal{O}] = \alpha \text{Comp}^{\mu, F, \ell, L}(\mathcal{O}) + \beta \text{Vol}(\mathcal{O}) + \varepsilon \text{Per}(\mathcal{O}).$$

Für das dreidimensionale Problem betrachten wir analog ein quaderförmiges Gebiet mit quadratischer Grundfläche  $\Omega = [0, \ell]^2 \times [0, L]$ . Die angelegte Spannung wird durch den Spannungstensor  $\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$  beschrieben. Alle weiteren Annahmen treffen wir wie im Zweidimensionalen.

*Beobachtung:* Sei  $d = 2, 3$  die Dimension des Gebietes. Das Funktional  $J$  besitzt die folgende Skalierungseigenschaft:

$$J^{\alpha, \beta, \varepsilon, \mu, F, \ell, L}[L\mathcal{O}] = \beta L^d J^{1, 1, \frac{\varepsilon}{\beta L}, \frac{1}{4}, F \sqrt{\frac{\alpha}{4\mu\beta}}, \frac{\ell}{L}, 1}[\mathcal{O}]$$

Somit können wir oBdA den Fall  $\alpha = \beta = L = 1$ ,  $\mu = \frac{1}{4}$  betrachten.

*Beweis:* Definiere zunächst das skalierte Gebiet  $\hat{\Omega} = \frac{1}{L}\Omega = [0, \frac{\ell}{L}]^{d-1} \times [0, 1]$ , sowie den skalierten Spannungstensor  $\hat{\sigma}_s = \sqrt{\frac{\alpha}{4\mu\beta}} \cdot \hat{\sigma}$  und die skalierte Auslenkungsfunktion  $u_s(x) = \sqrt{\frac{4\mu\alpha}{\beta}} \cdot \frac{u(Lx)}{L}$ . Dann gilt:

$$\text{Vol}(L\mathcal{O}) = \int_{L\mathcal{O}} 1 \, dx = L^d \int_{\mathcal{O}} 1 \, dx = L^d \text{Vol}(\mathcal{O})$$

$$\text{Per}(L\mathcal{O}) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial(L\mathcal{O})) = \mathcal{H}^{d-1}(L\partial\mathcal{O}) = L^{d-1} \mathcal{H}^{d-1}(\partial\mathcal{O}) = L^{d-1} \text{Per}(\mathcal{O})$$

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha}{\beta L^d} \text{Comp}^{\mu, F, \ell, L}(L\mathcal{O}) &= \frac{\alpha}{\beta L^d} \int_{\partial\Omega} (\hat{\sigma}n) \cdot u \, da \\ &= \frac{\alpha}{\beta L} \int_{\partial\hat{\Omega}} (\hat{\sigma}_s n) \cdot u(Lx) \, da = \int_{\partial\hat{\Omega}} (\hat{\sigma}_s n) \cdot u_s \, da \end{aligned}$$

$$= 2 \operatorname{Comp}^{\frac{1}{4}, F, \sqrt{\frac{\alpha}{4\mu\beta}}, \frac{\ell}{L}, 1}(\mathcal{O})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mu, F, \ell, L}[u] &= \int_{L\mathcal{O}} \mu |\epsilon(u)|^2 dx - \int_{\partial\Omega} (\hat{\sigma}n) \cdot u da \\ &= L^d \int_{\mathcal{O}} \mu |\epsilon(u)(Lx)|^2 dx - L^{d-1} \int_{\partial\hat{\Omega}} (\hat{\sigma}n) \cdot u(Lx) da \\ &= \frac{L^d \beta}{\alpha} \int_{\mathcal{O}} \frac{1}{4} |\epsilon(u_s)|^2 dx - \frac{L^d \beta}{\alpha} \int_{\partial\hat{\Omega}} (\hat{\sigma}_s n) \cdot u_s da \\ &= \frac{L^d \beta}{\alpha} \mathbf{E}^{\frac{1}{4}, F, \sqrt{\frac{\alpha}{4\mu\beta}}, \frac{\ell}{L}, 1}[u_s] \end{aligned}$$

Dabei haben wir bei der vorletzten Umformung den folgenden Zusammenhang genutzt:

$$2 \cdot \epsilon(u(Lx)) = \nabla(u(Lx)) + \nabla(u(Lx))^T = L \cdot (\nabla u)(Lx) + L \cdot (\nabla u^T)(Lx) = 2L \cdot \epsilon(u)(Lx)$$

Fügen wir nun alles zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{\alpha, \beta, \varepsilon, \mu, F, \ell, L}[L\mathcal{O}] &= \alpha \operatorname{Comp}^{\mu, F, \ell, L}(\mathcal{O}) + \beta \operatorname{Vol}(\mathcal{O}) + \varepsilon \operatorname{Per}(\mathcal{O}) \\ &= \alpha \frac{\beta L^d}{\alpha} \operatorname{Comp}^{\frac{1}{4}, F, \sqrt{\frac{\alpha}{4\mu\beta}}, \frac{\ell}{L}, 1}(\mathcal{O}) + \beta L^d \operatorname{Vol}(\mathcal{O}) + \varepsilon L^{d-1} \operatorname{Per}(\mathcal{O}) \\ &= \beta L^d \mathbf{J}^{1, 1, \frac{\varepsilon}{\beta L}, \frac{1}{4}, F, \sqrt{\frac{\alpha}{4\mu\beta}}, \frac{\ell}{L}, 1}[\mathcal{O}]. \end{aligned}$$

In anderen Artikeln, die sich mit Strukturoptimierung beschäftigen ([CKO04; CCK<sup>+</sup>08]), findet sich teilweise als zugrundeliegendes Gebiet  $\Omega = [0, 1]^d \times [0, L]$ . Mit der oben gezeigten Skalierungseigenschaft lässt sich allerdings einfach zwischen den beiden Settings wechseln:

$$\mathbf{J}^{1, 1, \varepsilon, \frac{1}{4}, F, 1, L}[\mathcal{O}] = L^d \mathbf{J}^{1, 1, \frac{\varepsilon}{L}, \frac{1}{4}, F, \frac{1}{L}, 1}[\mathcal{O}]$$

## 1.4 Duale Formulierung

Es ist möglich, die Komplianz einer Geometrie in Abhängigkeit von geeigneten Spannungsfeldern zu beschreiben anstatt die in 1.3 vorgestellte Formulierung über die Auslenkungsfunktion zu nutzen:

**Theorem 1.4.1:** In unserem Setting gilt:

$$\operatorname{Comp}^{F, \ell}(\mathcal{O}) = \int_{\mathcal{O}} |\sigma|^2 dx = \min_{\tilde{\sigma} \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\mathcal{O}} |\tilde{\sigma}|^2 dx$$

Dabei ist  $\Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}$  die Menge der zulässigen Spannungsfelder, die wie folgt definiert sei:

$$\Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}} = \{ \sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2} \mid \operatorname{div} \sigma = 0 \text{ in } \Omega, \sigma = 0 \text{ in } \Omega \setminus \mathcal{O}, \sigma n = \hat{\sigma} n \text{ auf } \partial\Omega \}$$

*Beweis:* Da  $u$  die Energie  $E^{F,\ell}$  minimiert, muss die Gâteaux-Ableitung  $\partial_u E^{F,\ell}[v]$  insbesondere für  $v = u$  verschwinden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E^{F,\ell}[u + tu] &= \frac{d}{dt} \left[ \int_{\mathcal{O}} \frac{1}{4} |\epsilon(u + tu)|^2 dx - \int_{\partial\Omega} (\hat{\sigma}n) \cdot (u + tu) da \right]_{t=0} \\ &= 2 \int_{\mathcal{O}} \frac{1}{4} |\epsilon(u)|^2 dx - \int_{\partial\Omega} (\hat{\sigma}n) \cdot u da \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow - \int_{\partial\Omega} (\hat{\sigma}n) \cdot u da = 2 \int_{\mathcal{O}} \frac{1}{4} |\epsilon(u)|^2 dx - 2 \int_{\partial\Omega} (\hat{\sigma}n) \cdot u da \\ &\Leftrightarrow \text{Comp}^{F,\ell}(\mathcal{O}) = -E^{F,\ell}[u] \end{aligned}$$

Nach der zweiten binomischen Formel gilt außerdem

$$\int_{\mathcal{O}} \left| \frac{1}{2} \epsilon(\tilde{u}) - \tilde{\sigma} \right|^2 dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\mathcal{O}} \frac{1}{4} |\epsilon(\tilde{u})|^2 + |\tilde{\sigma}|^2 dx \geq \int_{\mathcal{O}} \tilde{\sigma} : \epsilon(\tilde{u}) dx = \int_{\Omega} \tilde{\sigma} : \epsilon(\tilde{u}) dx$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $\tilde{\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon(\tilde{u})$ , d.h.  $\tilde{\sigma}$  genau die durch  $\tilde{u}$  erzeugte Spannung ist. Wir nutzen die Symmetrie von  $\tilde{\sigma}$  und integrieren partiell. Der obere Term ist somit gleich

$$\int_{\partial\Omega} (\tilde{\sigma}n) \cdot \tilde{u} da - \int_{\Omega} \text{div} \tilde{\sigma} \cdot \tilde{u} dx \stackrel{\text{div} \tilde{\sigma} = 0}{=} \int_{\partial\Omega} (\tilde{\sigma}n) \cdot \tilde{u} da$$

Für ein beliebiges  $\tilde{u}$  und  $\tilde{\sigma} \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}$  gilt also

$$\int_{\mathcal{O}} |\tilde{\sigma}|^2 dx \geq \int_{\partial\Omega} (\tilde{\sigma}n) \cdot \tilde{u} da - \int_{\mathcal{O}} \frac{1}{4} |\epsilon(\tilde{u})|^2 dx = -E^{F,\ell}$$

und wir erhalten somit insgesamt die gewünschte Gleichheit.

Die alternative Problemstellung, die wir im Folgenden betrachten werden, lautet also

$$\min_{\mathcal{O} \subset \Omega} J^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] \text{ mit } J^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] = \min_{\tilde{\sigma} \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\mathcal{O}} |\tilde{\sigma}|^2 dx + \text{Vol}(\mathcal{O}) + \varepsilon \text{Per}(\mathcal{O}).$$

## 1.5 Bestimmung der Energie für $\varepsilon = 0$

Wir wollen zunächst den Grenzfall  $\varepsilon = 0$  betrachten. Wir identifizieren die Geometrie  $\mathcal{O}$  mit dem Support des Spannungstensors  $\sigma$  und können so die gesuchte Energie wie folgt ausdrücken:

$$J_0^{*, F, \ell} := \inf_{\mathcal{O} \subset \Omega} J_0^{F, \ell}[\mathcal{O}] = \inf_{\sigma \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\Omega} g(\sigma) dx \quad \text{mit} \quad g(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \sigma = 0, \\ |\sigma|^2 + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für Folgen von Geometrien mit schwach konvergierenden charakteristischen Funktionen ist dieses Integral nicht schwach unterhalbstetig, somit existieren keine minimierenden Geometrien. Wir relaxieren also das Problem:

Da unser Integrand matrixwertig ist, ist Konvexifizierung im Allgemeinen nicht ausreichend, sondern wir müssen stattdessen die quasikonvexe Hüllfunktion von  $g$  betrachten. Diese wird in [KS83] für  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  explizit bestimmt:

$$J_0^{*, F, \ell} = \min_{\sigma \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\Omega} \tilde{g}(\sigma) dx \quad \text{mit} \quad \tilde{g}(\sigma) = \begin{cases} 2(|\sigma_1| + |\sigma_2| - |\sigma_1 \sigma_2|) & \text{falls } |\sigma_1| + |\sigma_2| \leq 1, \\ 1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $|F| \leq 1$  wird das Minimum  $J_0^{*,F,\ell} = 2|F|\text{Vol}(\Omega)$  bei  $\sigma = \hat{\sigma}$  angenommen. Wir stellen allerdings fest, dass in unserem speziellen Fall einer Zugspannung nur die zweite Zeile des Spannungstensors  $\sigma$  zur Energie beiträgt. Sehen wir also  $g$  als ausschließlich von der letzten Zeile abhängende vektorwertige Funktion an, so ist deren Quasikonvexifizierung äquivalent zur echten Konvexifizierung und tatsächlich stellen wir fest:

$$J_0^{*,F,\ell} = \min_{\sigma \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\Omega} g^{**}(\sigma) dx \quad \text{mit} \quad g^{**}(\sigma) = \begin{cases} 2|\sigma| & \text{falls } |\sigma| \leq 1, \\ 1 + |\sigma|^2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir treffen mit diesem Wissen die begründete Annahme, dass auch für  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  die Beziehung  $J_0^{*,F,\ell} = \min_{\sigma \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\Omega} g^{**}(\sigma) dx$  gilt. Falls diese Annahme zutrifft, so wird das Minimum  $J_0^{*,F,\ell} = 2|F|\text{Vol}(\Omega)$  für  $|F| \leq 1$  auch im Dreidimensionalen bei  $\sigma = \hat{\sigma}$  angenommen.

Die fast-optimalen Strukturen, die das relaxierte Problem minimieren, sind fast eindimensional und bestehen aus vielen äußerst dünnen Strängen, die entlang der Zugrichtung verlaufen. Betrachten wir nun wieder das eigentliche Setting  $\varepsilon > 0$ , so bezeichnen wir die Differenz  $\Delta J = \min_{\mathcal{O} \subset \Omega} J^{\varepsilon,F,\ell}[\mathcal{O}] - J_0^{*,F,\ell}$  als "Überschussenergie". Intuitiv kann man sich vorstellen, dass als optimale Geometrie die Geometrie des relaxierten Problems angestrebt wird, gleichzeitig aber eine Bündelung der Stränge vorgenommen werden muss, um Oberflächenenergie zu sparen. Wir werden in Kapitel 2 und 3 Skalierungen für genau diese Überschussenergie finden.

## 1.6 Verwandte Problemstellungen

Wenn wir unser Problem als vektorwertiges und durch eine Differentialgleichung beschränktes Optimierungsproblem betrachten, liegt es nahe, dessen skalare Formulierung zu betrachten. Physikalisch gesehen handelt es sich dabei um die Optimierung eines wärme- bzw. stromleitenden Materials bei vorgegebenem Fluss  $\hat{f} \cdot n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, d \in \{2, 3\}, \hat{f} = F \cdot e_d$  auf dem Rand ( $e_d$  bezeichne den  $d$ -ten Einheitsvektor). In der dualen Formulierung über Flüsse lautet das Problem dann

$$\min_{\mathcal{O} \subset \Omega} J_{\text{scal}}^{\varepsilon,F,\ell}[\mathcal{O}] \quad \text{mit} \quad J_{\text{scal}}^{\varepsilon,F,\ell}[\mathcal{O}] = \min_{\tilde{f} \in \Phi_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\mathcal{O}} |\tilde{f}| dx + \text{Vol}(\mathcal{O}) + \varepsilon \text{Per}(\mathcal{O}),$$

wobei die Menge der zulässigen Flüsse  $\Phi_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}$  gegeben ist durch

$$\Phi_{\text{ad}}^{\mathcal{O}} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \text{div} f = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d, f = 0 \text{ auf } \Omega \setminus \mathcal{O}, f \cdot n = \hat{f} \cdot n \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Wir wollen nun die beiden Probleme in Beziehung setzen. Sei dazu  $\tilde{\sigma}_d$  die  $d$ -te Zeile eines beliebigen, zulässigen Spannungstensors  $\tilde{\sigma}$  des vektorwertigen Problems. Dann ist  $\tilde{\sigma}_d$  ein zulässiger Fluss für das skalare Problem. Mit  $|\tilde{\sigma}_d|^2 \leq |\tilde{\sigma}|^2$  erhalten wir

$$J^{\varepsilon,F,\ell}[\mathcal{O}] \geq J_{\text{scal}}^{\varepsilon,F,\ell}[\mathcal{O}].$$

Um eine relaxierte Version des skalaren Problems zu erhalten, kann nun der Fluss auf ganz  $\mathbb{R}^d$  erweitert werden. Somit entfällt die starke punktweise Bedingung  $f \cdot n = \hat{f} \cdot n$ , die bisher auf  $\partial\Omega$  gefordert wurde. Stattdessen bestrafen wir außerhalb von  $\Omega$  die Differenz  $f - \hat{f}$ , was uns auf die relaxierte, skalare Formulierung

$$\min_{\mathcal{O} \subset \Omega} J_{\text{scal,rel}}^{\varepsilon,F,\ell}[\mathcal{O}]$$

mit

$$J_{\text{scal,rel}}^{\varepsilon,F,\ell}[\mathcal{O}] = \min_{\tilde{f} \in \Phi_{\text{ad,rel}}^{\mathcal{O}}} \int_{\mathcal{O}} |\tilde{f}| dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} |\tilde{f} - \hat{f}|^2 dx + \text{Vol}(\mathcal{O}) + \varepsilon \text{Per}(\mathcal{O})$$

führt. Der zugehörige Raum  $\Phi_{\text{ad,rel}}^{\mathcal{O}}$  der zulässigen Flüsse ist dabei

$$\Phi_{\text{ad,rel}}^{\mathcal{O}} = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \operatorname{div} f = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d, f = 0 \text{ auf } \Omega \setminus \mathcal{O}\}.$$

Diese relaxierte Formulierung ist insofern interessant, als dass sie äquivalent zu einem weiteren Optimierungsproblem ist: der Beschreibung von Zuständen in Typ-I Supraleitern. Legt man ein magnetisches Feld  $F \cdot e_d$  von außen an ein aus supraleitendem Material bestehendes Objekt  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  an, so entstehen in diesem supraleitende Regionen. Zusätzlich bildet sich ein divergenzfreies Magnetfeld  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , das in der supraleitenden Region verschwindet. Wenn wir mit  $\mathcal{O}$  die nicht-supraleitende Region bezeichnen, so berechnet man die freie Energie durch

$$J_{\text{SC}}^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] = \min_{f \in \Phi_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\mathcal{O} \cup (\mathbb{R}^d \setminus \Omega)} |f - \hat{f}|^2 dx + \int_{\Omega \setminus \mathcal{O}} |\hat{f}| - 1 dx + \varepsilon \operatorname{Per}(\mathcal{O}).$$

Die relaxierte Energie nimmt als Minimum  $J_{\text{SC},0}^{*, F, \ell} = -(1 - |F|)^2 \operatorname{Vol}(\Omega)$  an [CKO04]. Wir stellen fest:

$$\begin{aligned} J_{\text{SC}}^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] - J_{\text{SC},0}^{*, F, \ell} &= \min_{f \in \Phi_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\mathcal{O}} |f|^2 - 2f \cdot \hat{f} + |\hat{f}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} |f - \hat{f}|^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} |\hat{f}|^2 - 1 dx - \left( \int_{\mathcal{O}} |\hat{f}|^2 dx - \int_{\mathcal{O}} 1 dx \right) + \varepsilon \operatorname{Per}(\mathcal{O}) + (1 - |F|)^2 \operatorname{Vol}(\Omega) \\ &= \min_{f \in \Phi_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\mathcal{O}} |f|^2 - 2|F|f \cdot e_d dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} |f - \hat{f}|^2 dx + \int_{\mathcal{O}} 1 dx + \varepsilon \operatorname{Per}(\mathcal{O}) \\ &\quad + (|F|^2 - 1) \operatorname{Vol}(\Omega) - \int_{\mathcal{O}} |\hat{f}|^2 dx + (1 - |F|)^2 \operatorname{Vol}(\Omega) \\ &= \min_{f \in \Phi_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\mathcal{O}} |f|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} |f - \hat{f}|^2 dx + \operatorname{Vol}(\mathcal{O}) + \varepsilon \operatorname{Per}(\mathcal{O}) \\ &\quad - 2|F|^2 \operatorname{Vol}(\Omega) + (|F|^2 - 1) \operatorname{Vol}(\Omega) + (1 - |F|)^2 \operatorname{Vol}(\Omega) \\ &= J_{\text{scal,rel}}^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] - 2|F| \operatorname{Vol}(\Omega) \\ &= J_{\text{scal,rel}}^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] - J_0^{*, F, \ell} \end{aligned}$$

Dabei haben wir genutzt, dass für jedes zulässige Magnetfeld  $f$  und für jedes  $x_d$  das Integral der  $d$ -ten Komponentenfunktion über die Schnittfläche  $[0, \ell]^{d-1} \times \{x_d\}$  konstant gleich  $|F| \operatorname{Vol}(\Omega)$  ist.

Insgesamt haben wir also in diesem Abschnitt gezeigt:

$$J^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] - J_0^{*, F, \ell} \geq J_{\text{scal}}^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] - J_0^{*, F, \ell} \geq J_{\text{scal,rel}}^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] - J_0^{*, F, \ell} = J_{\text{SC}}^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] - J_{\text{SC},0}^{*, F, \ell}$$

Demnach ist jede untere Schranke des Supraleiterproblems auch eine untere Schranke des Komplianzminimierungsproblems. In [CKO04; CCK<sup>+</sup>08] werden entsprechende Skalierungsgesetze hergeleitet. Wir werden in Abschnitt 2.2 die zugrundeliegenden Ansätze für den Beweis der unteren Schranke aufgreifen, während wir uns in Abschnitt 3.2 direkt auf die Skalierungsgesetze des Supraleiterproblems beziehen werden.

## 2 Ein Skalierungsgesetz für den zweidimensionalen Fall

In diesem Abschnitt zeigen wir ein Skalierungsgesetz für die Überschussenergie im zweidimensionalen Setting, dieses besagt:

**Theorem 2.1:** Sei  $\delta = \frac{1}{16}$ ,  $|F| < 1 - \delta$ ,  $\varepsilon < \min\{\ell^3|F|, |F|^4\}$ . Dann existieren Konstanten  $c, C > 0$  mit

$$c\ell|F|^{\frac{1}{3}}\varepsilon^{\frac{2}{3}} \leq \min_{\mathcal{O} \subset \Omega} J^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] - J_0^{*, F, \ell} \leq C\ell|F|^{\frac{1}{3}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}.$$

*Notation:* Im Folgenden nutzen wir für zwei Terme  $A, B$  die gängige Notation  $A \lesssim B$ , wenn eine feste Konstante  $C$  existiert, sodass  $A \leq C \cdot B$  gilt. Analog schreiben wir  $A \gtrsim B$ , falls eine solche Konstante mit  $A \geq C \cdot B$  existiert. Schließlich nutzen wir  $A \sim B$ , falls  $B \lesssim A \lesssim B$  gilt.

### 2.1 Konstruktion einer oberen Schranke

Eine fast-optimale Struktur muss in der Mitte  $x_2 \sim \frac{1}{2}$  relativ grob sein, um die Oberfläche zu minimieren, gleichzeitig aber an den Rändern  $x_2 \sim 0, 1$  gleichmäßig verteilt sein, damit die dort anliegende Spannung nicht zu viel Komplianz erzeugt. Somit liegt eine sich von der Mitte aus schrittweise verfeinernde Konstruktion, wie sie beispielsweise aus dem Supraleiterproblem bekannt ist [CKO04], nahe. Diese Geometrien haben insbesondere die Eigenschaft, symmetrisch bezüglich der Mittellinie zu sein, sodass wir für unsere Konstruktion nur die obere Hälfte  $(0, \ell) \times [\frac{1}{2}, 1]$  des Gebietes betrachten werden. Wir folgen dem in [CKO04] beschriebenen Standardalgorithmus für die Konstruktion verzweigter Geometrien, der wie folgt funktioniert:

1. Konstruiere eine Basiszelle der Größe  $w \times l$  und berechne deren Überschussenergie. Optimierte anschließend die Höhe der Zelle  $l$  bei konstant gehaltener Breite  $w$  und erhalte so ein  $l_{\text{opt}}(w)$ .
2. Setze  $w_k := w_{\text{coarse}}2^{-k}$ ,  $l_k := l_{\text{opt}}(w_k)$ . Nimmt man kurzzeitig eine unendliche Anzahl an Schichten an, so ist die Gesamtenergie der Struktur als geometrische Reihe  $\sum \Delta J_{\text{cell}}$  gegeben. Wir wählen  $w_{\text{coarse}}$  so, dass sich die Gesamthöhe  $\sum_{k=1}^{\infty} l_k$  zur Gebietshöhe  $L$  addiert - diese ist in unserem Setting gleich 1. Damit erhalten wir eine Formel für  $w_{\text{coarse}}$  in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  und  $|F|$ , mit der wir die gesamte Überschussenergie berechnen können. Gleichzeitig erhalten wir durch die Einschränkung  $w_{\text{coarse}} \leq \ell$  eine erste Bedingung für die Konstruktion.
3. Anders als zunächst angenommen, müssen wir bei der Schichtung die Bedingung  $w_k < l_k$  einhalten, somit existiert eine maximale Schichtenanzahl  $n$ . Wir fordern also zusätzlich, dass die Skalierung der Energie des Gebietes, das nicht durch Zellen gefüllt ist, zu der bisher errechneten Skalierung passt. In unserem Setting muss hierfür aufgrund der Bedingung  $\Gamma \subset \partial\Omega$  eine Grenzschicht konstruiert werden.

**Schritt 1:** Die klassische baumartige Struktur ist zur Komplianzminimierung nicht ausreichend. Grund dafür ist, dass sich die Äste unter anliegender Spannung zueinander biegen (siehe Abbildung 2), wodurch viel Komplianz entsteht. Durch das Hinzufügen eines Querbalkens wird jeder Balken unter Last entweder gestreckt oder gestaucht - dies kostet deutlich weniger Komplianzenergie.

In Abbildung 3 ist eine Basiszelle der Größe  $w \times l$  dargestellt. Wir wissen bereits, dass die Kraft, die am oberen und unteren Rand ansetzt,  $|F|w$  beträgt. Aus der Konvexifizierung wissen wir außerdem, dass zur Komplianzminimierung die Streben uniaxialen Kräften der Stärke 1 ausgesetzt sein sollten. Wir erreichen dies, indem wir als Querschnittsflächen

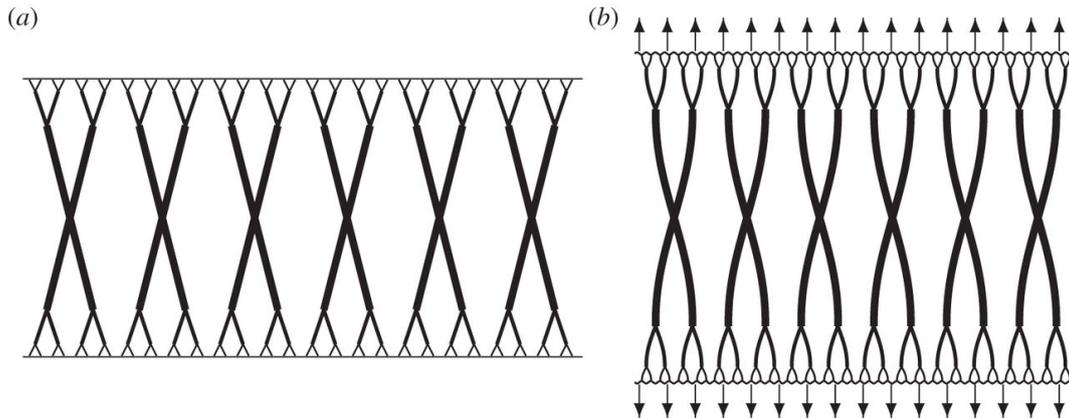


Abbildung 2: (a) Klassische, baumartige Struktur wie beispielsweise aus dem Supraleiterproblem bekannt. (b) Deformation unter anliegender Spannung. Das Biegen der Äste führt zu starker Komplianz. (Abbildung entnommen aus [KW14])

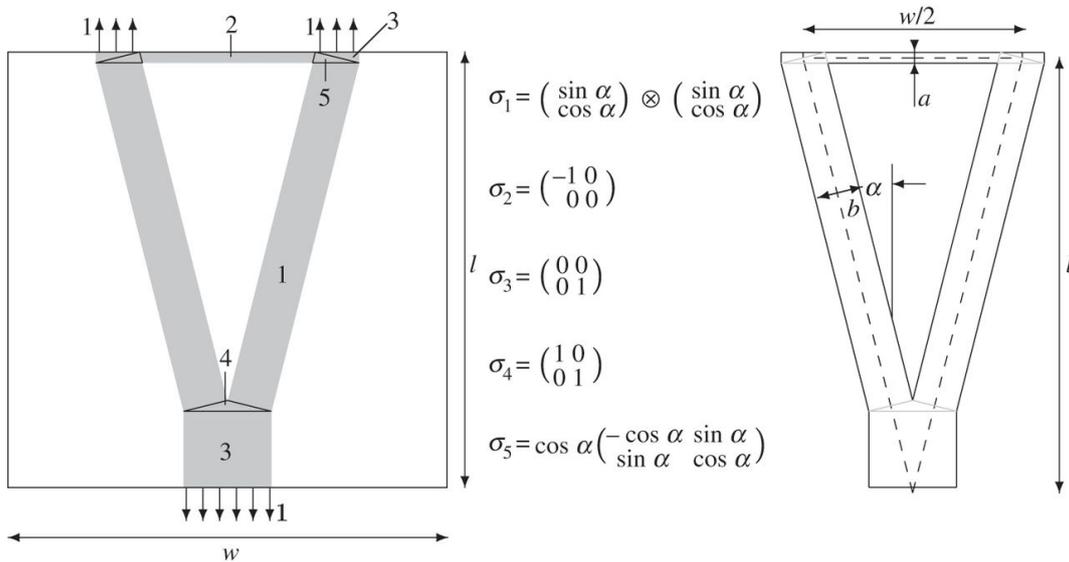


Abbildung 3: Darstellung einer 2D-Basiszelle; für jedes Gebiet gleicher Spannung ist der entsprechende Spannungstensor angegeben. Auf der rechten Seite sind die geometrischen Parameter angedeutet. (Abbildung entnommen aus [KW14])

$a = \frac{|F|w}{2} \tan \alpha$  und  $b = \frac{|F|w}{2 \cos \alpha}$  wählen. Dabei ist  $\tan \alpha = w/4l$  gegeben, wir werden zudem im Folgenden  $w/l \leq 1$  sicherstellen.

Wir wollen nun die Überschussenergie einer Basiszelle über die relaxierte Energie  $2|F|wl$  berechnen. Dazu stellen wir zunächst fest, dass der Komplianzterm wie der Volumenterm skaliert, da unsere Spannungsfelder alle Norm 1 besitzen. Sowohl für den Volumen- als auch für den Oberflächenterm betrachten wir nur die durch die drei Hauptstreben beigetragene Terme. Wie man sich grafisch oder durch eine kurze Rechnung schnell klar macht, skalieren die restlichen Terme gleich - somit ist dies oBdA erlaubt. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \Delta J_{\text{cell}} &\sim 2\text{Vol}_{\text{cell}} + \varepsilon \text{Per}_{\text{cell}} - J_0^{*,F,\ell} \sim 2\left(2\frac{l}{\cos \alpha} b + a\frac{w}{2}\right) + 4\varepsilon \frac{l}{\cos \alpha} + 2\varepsilon \frac{w}{2} - 2|F|wl \\ &\sim 2|F|wl \frac{1}{\cos^2 \alpha} + |F| \frac{w^2}{2} \tan \alpha + 4\varepsilon l \frac{1}{\cos \alpha} + \varepsilon w - 2|F|wl \end{aligned}$$

Wir nutzen die trigonometrische Gleichung  $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ :

$$\begin{aligned} \Delta J_{\text{cell}} &\sim 2|F|wl + |F| \frac{w^3}{8l} + |F| \frac{w^3}{8l} + 4\varepsilon l \sqrt{1 + \frac{w^2}{16l^2}} + \varepsilon w - 2|F|wl \\ &\sim |F| \frac{w^3}{l} + \varepsilon l + \varepsilon w \\ &\lesssim |F| \frac{w^3}{l} + \varepsilon l \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Bedingung  $w < l$  angewendet. Dieser Term kann nun über  $l$  minimiert werden, als optimalen Wert erhält man  $l = \sqrt{|F|w^3/\varepsilon}$ . Damit ergeben sich für die Konstanten in Abbildung 3 folgende Werte:

$$l = \sqrt{\frac{|F|w^3}{\varepsilon}}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon}{|F|w}}\right), \quad a = \frac{1}{8}\sqrt{|F|w\varepsilon}, \quad b = \frac{|F|w}{2}\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{16|F|w}}$$

Setzen wir unser optimales  $l$  in den letzten Term für  $\Delta J_{\text{cell}}$  ein, ergibt sich

$$\Delta J_{\text{cell}} \lesssim \sqrt{|F|w^3\varepsilon}.$$

**Schritt 2:** Die Konstruktion sieht vor, bei  $x_2 = \frac{1}{2}$  mit Zellen mit der größten Breite  $w_{\text{coarse}}$  zu beginnen und anschließend deren Breite pro Schicht zu halbieren, d.h. die Zellen der  $k$ -ten Schicht besitzen die Breite  $w_k = w_{\text{coarse}}/2^k$  und die Höhe  $l_k = \sqrt{|F|w_k^3/\varepsilon} = 2^{-3k/2}l_{\text{coarse}}$ . Die Gesamthöhe des Gebietes  $\Omega$  entspricht den summierten Höhen der einzelnen Schichten, wobei jede Schicht aufgrund der Symmetrie der Konstruktion zweimal vorkommt. Bei  $n$  Schichten erhalten wir also

$$1 = 2 \sum_{k=0}^n l_k = 2 \sqrt{\frac{|F|w_{\text{coarse}}^3}{\varepsilon}} \sum_{k=0}^n 2^{-\frac{3k}{2}} \sim \sqrt{\frac{|F|w_{\text{coarse}}^3}{\varepsilon}},$$

woraus wir  $w_{\text{coarse}} \sim \sqrt[3]{\varepsilon/|F|}$  entnehmen. Wir müssen außerdem sicherstellen, dass die maximale Zellenbreite die Gebietsbreite  $\ell$  nicht übersteigt:

$$w_{\text{coarse}} \leq \ell \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \lesssim \ell^3 |F|$$

In der  $k$ -ten Schicht haben wir maximal  $\frac{\ell}{w_k}$  Zellen, insgesamt beträgt die Überschussenergie somit

$$\Delta J_{\text{ges}} \leq 2 \sum_{k=0}^n \frac{\ell}{w_k} \Delta J_{\text{cell}}(w_k) \sim \frac{\ell}{w_{\text{coarse}}} \Delta J_{\text{cell}}(w_{\text{coarse}}) \sim \ell |F|^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{2}{3}}.$$

**Schritt 3:** Die maximale Anzahl an Schichten  $n$  ist durch die Bedingung  $w_k < l_k$  gegeben:

$$\begin{aligned} w_n = l_n &\Leftrightarrow 2^{-n} w_{\text{coarse}} = 2^{-\frac{3n}{2}} \sqrt{\frac{|F|w_{\text{coarse}}}{\varepsilon}} \\ &\Leftrightarrow n = \log_2\left(\frac{|F|w_{\text{coarse}}}{\varepsilon}\right) \sim \frac{2}{3} \log_2\left(\frac{|F|}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

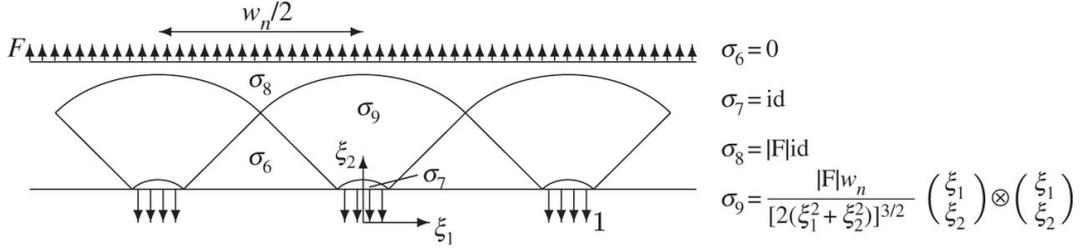


Abbildung 4: Grenzschicht bei  $x_2 = 1$  mit zugehörigen Spannungsfeldern (Abbildung entnommen aus [KW14])

Selbstverständlich muss für unsere Konstruktion  $n \geq 1$  gelten, somit erhalten wir die Bedingung  $\varepsilon \lesssim |F|$ .

Außerdem muss das Gebiet zwischen der  $n$ -ten Schicht und  $x_2 = 0, 1$  mit einer Grenzschicht gefüllt werden. Diese ist mit den zugehörigen Spannungsfeldern in Abbildung 4 dargestellt. Wir stellen fest, dass  $w_n \sim l_n \sim \sqrt{|F|w_n^3/\varepsilon} \Rightarrow w_n \sim \frac{\varepsilon}{|F|}$ , somit skaliert das Volumen unserer Grenzschicht wie  $\ell w_n \sim \frac{\ell \varepsilon}{|F|}$ . Damit dieser Term unsere bisherige Skalierung nicht stört, muss also außerdem gelten:

$$\frac{\ell \varepsilon}{|F|} \leq \ell |F|^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{2}{3}} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon \leq |F|^4$$

Für die angegebenen Spannungstensoren gilt  $|\sigma_i| \lesssim 1$ , sodass die auftretenden Komplianzterme wie das Volumen skalieren. Der Oberflächenterm besitzt Ordnung  $\varepsilon \ell$ , was sogar noch weniger ins Gewicht fällt. Wir haben somit gezeigt, dass unter zusätzlichen Anforderungen die Grenzschicht die Skalierung der Überschussenergie der Zellen nicht stört.

## 2.2 Eine untere Schranke in 2D

Es bleibt nun zu zeigen, dass die gefundene obere Schranke insofern optimal ist, als dass eine passende untere Schranke existiert. Wir werden in diesem Abschnitt also die folgende Abschätzung zeigen:

$$c_F \ell \varepsilon^{\frac{2}{3}} \leq \min_{\mathcal{O} \subset \Omega} J^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] - J_0^{*, F, \ell}.$$

Hierbei müssen wir zwei verschiedene Fälle betrachten. Für  $|F|$  nahe bei 0 (in unserem Beweis nehmen wir aus technischen Gründen  $|F| < \frac{1}{2} - \delta$  an), erhalten wir mit einem klassischen Dualitätsansatz [KM94] die optimale Skalierung in  $|F|$ , d.h.  $c_F$  skaliert wie  $|F|^{\frac{1}{3}}$ . Berechnen wir hingegen eine angepasste Hashin-Shtrikman-Grenze, so erhalten wir die korrekte Skalierung in  $\varepsilon$ , allerdings ist die Skalierung in  $|F|$  für kleine  $|F|$  nur suboptimal ( $c_F \sim |F|$ ). Trotzdem ist diese Abschätzung von Interesse, da sie auch für  $|F| \geq \frac{1}{2}$  gültig bleibt und die Basis für die Komplianzminimierung unter anliegenden Scherkräften bildet [KW15].

### 2.2.1 Beweis mittels konvexer Dualität

Bezeichne  $\min_{\mathcal{O} \subset \Omega} J^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}]$  als  $\hat{J}$  und setze  $\Delta J := \hat{J} - J_0^{*, F, \ell} = \hat{J} - 2|F|\ell$ . Aus  $\Delta J \geq \varepsilon \text{Per}(\mathcal{O})$  für die optimale Geometrie  $\mathcal{O}$  schließen wir, dass auf einem beliebigen Querschnitt  $x_2 = \hat{x}_2 \sim \frac{1}{2}$  die Anzahl der Interfaces mit  $\frac{\Delta J}{\varepsilon}$  skaliert. Außerdem gilt  $\hat{J} \geq \text{Vol}(\mathcal{O})$ , sodass der Volumenanteil des Materials auf  $\hat{x}_2$  als (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) kleiner als  $\frac{\hat{J}}{\ell}$  angenommen werden. Wie bereits gezeigt, ist dieser Term  $\lesssim |F|$ .

Wir werden nun die Überschussenergie  $\Delta J$  für das oben beschriebene Setting berechnen: Nehmen wir dazu an, es gebe genau  $N$  Materiallücken auf dem Querschnitt  $x_2 = \hat{x}_2$ , die wir

mit  $\tilde{\Gamma} = ((a_1, b_1) \cup \dots \cup (a_N, b_N)) \times \{\hat{x}_2\}$  bezeichnen. Dann gilt

$$\begin{aligned} J^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] &= \min_{\substack{\sigma \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}} \\ \sigma n = 0 \text{ auf } \tilde{\Gamma} \cap \mathcal{O}}} \int |\sigma|^2 dx + \text{Vol}(\mathcal{O}) + \varepsilon \text{Per}(\mathcal{O}) \\ &\geq \min_{\substack{\sigma \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}} \\ \sigma n = 0 \text{ auf } \tilde{\Gamma} \cap \mathcal{O}}} \int |\sigma|^2 + 1 dx \\ &= \min_{\substack{\sigma \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}} \\ \sigma n = 0 \text{ auf } \tilde{\Gamma} \cap \Omega}} \int g(\sigma) dx \\ &\geq \min_{\substack{\sigma \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}} \\ \sigma n = 0 \text{ auf } \tilde{\Gamma} \cap \Omega}} \int g^{**}(\sigma) dx \end{aligned}$$

Minimieren unter der Nebenbedingung  $\text{div} \sigma = 0$  durch einen Lagrange-Multiplikator  $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ , führt auf

$$\min_{\substack{\sigma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}_{\text{sym}} \\ \sigma n = \hat{\sigma} n \text{ auf } \partial\Omega \\ \sigma n = 0 \text{ auf } \tilde{\Gamma}}} \sup_{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2} \int_{\Omega} g^{**}(\sigma) + u \cdot \text{div} \sigma dx.$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie von  $\sigma$  und nach Einsetzen der Randbedingung  $\sigma n = \hat{\sigma} n$  auf  $\partial\Omega$  ist dies gleich

$$\begin{aligned} &\min_{\sigma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}_{\text{sym}}} \sup_{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2} \int_{\Omega \setminus \tilde{\Gamma}} g^{**}(\sigma) - \varepsilon(u) : \sigma dx + \int_{\partial\Omega} (\hat{\sigma} n) \cdot u da \\ &\geq \sup_{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2} \int_{\Omega \setminus \tilde{\Gamma}} \min_{\sigma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}_{\text{sym}}} g^{**}(\sigma) - \varepsilon(u) : \sigma dx + \int_{\partial\Omega} (\hat{\sigma} n) \cdot u da \\ &= \sup_{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2} \int_{\Omega \setminus \tilde{\Gamma}} -g^*(\varepsilon(u)) dx + \int_{\partial\Omega} (\hat{\sigma} n) \cdot u da. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt bezeichnet  $g^*(\varepsilon) = (g^{**})^*(\varepsilon)$  die Legendre-Fenchel-Duale, diese ist definiert durch

$$g^*(\varepsilon) = - \inf_{\sigma} \{g(\sigma) - \varepsilon : \sigma\}$$

In unserem Fall lässt sich  $g^*$  explizit bestimmen:

$$g^*(\varepsilon) = - \inf_{\sigma} \{g(\sigma) - \varepsilon : \sigma\} = - \min\{0, \inf_{|\sigma| \neq 0} \{|\sigma|^2 + 1 - \varepsilon : \sigma\}\} = - \min\{0, -\frac{|\varepsilon|^2}{4} + 1\}$$

Der zweite Term ist nur für  $|\varepsilon| > 2$  negativ, insgesamt erhält man also:

$$g^*(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |\varepsilon| \leq 2 \\ \frac{|\varepsilon|}{4} - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der erste Integrand unserer letzten Abschätzung wird maximiert für  $|\varepsilon(u)| \leq 2$  und nimmt dann das Maximum 0 an. Zusammenfassend können wir  $\Delta J$  also nach unten abschätzen durch

$$\sup_{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2} \int_{\partial\Omega} (\hat{\sigma} n) \cdot u da - 2|F|\ell.$$

Im Folgenden werden wir nun die Energie für eine Testfunktion  $\tilde{u}$  ausrechnen, wodurch wir dann die gewünschte Skalierung erhalten. Diese Funktion kann als Auslenkung interpretiert

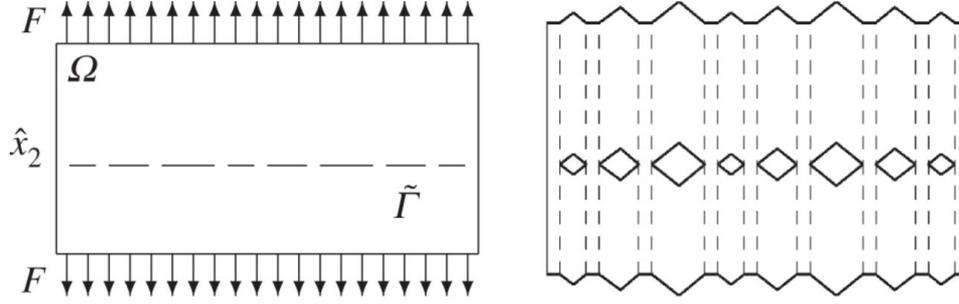


Abbildung 5: Darstellung des Gebietes  $\Omega$  mit eingezeichneten Materiallücken. Auf der rechten Seite die gewählte Auslenkung: eine Streckung um den Faktor  $2(1 + \eta)$ , die die Lücken aufreißt. (Abbildung entnommen aus [KW14])

werden, die die Materiallücken aufreißt (siehe Abbildung 5) Wegen  $(-\hat{\sigma}n) \cdot \tilde{u} = (\hat{\sigma}n) \cdot (-\tilde{u})$  kann oBdA  $F > 0$  (also eine Zuglast) angenommen werden. Unser Ansatz sei

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\eta x_2 \end{pmatrix} + 2f(x_1) \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sgn}(x_2 - \hat{x}_2) \end{pmatrix}, \quad D\tilde{u} = \begin{pmatrix} \pm 2f'(x_1) & 0 \\ 0 & 2\eta \end{pmatrix}, \quad \epsilon(\tilde{u}) = \begin{pmatrix} 0 & \pm f'(x_1) \\ \pm f'(x_1) & 2\eta \end{pmatrix}$$

mit  $\eta \in \mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir nehmen  $f$  als stetig und stückweise linear auf den Intervallen  $(a_i, b_i)$  an und erhalten durch die Bedingungen  $f(x) = 0$ , falls  $x \notin (a_i, b_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , und  $|\epsilon(\tilde{u})| = 2$  die Funktion

$$f(x) = \sqrt{2(1 - \eta^2)} \begin{cases} x - a_i & \text{falls } x \in [a_i, \frac{a_i + b_i}{2}] \\ b_i - x & \text{falls } x \in [\frac{a_i + b_i}{2}, b_i] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir definieren  $d_i := b_i - a_i$ ,  $d := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i$  und berechnen die Komplianz unter Verwendung von  $\tilde{u}$ , dazu teilen wir das Randintegral auf oberen und unteren Rand auf:

$$\begin{aligned} \Delta J &\geq \sup_{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2} \int_{\partial\Omega} (\hat{\sigma}n) \cdot u(x) \, da - 2|F|\ell \\ &\geq \int_0^\ell (\hat{\sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \cdot \tilde{u}(t) \, dt + \int_0^\ell (\hat{\sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}) \cdot \tilde{u}(t) \, dt - 2|F|\ell \\ &= \int_0^\ell \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\eta + 2f(t) \end{pmatrix} \, dt + \int_0^\ell \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2f(t) \end{pmatrix} \, dt - 2|F|\ell \\ &= \int_0^\ell 2\eta|F| \, dt + 2|F| \int_0^\ell f(t) \, dt + 2|F| \int_0^\ell f(t) \, dt - 2|F|\ell \\ &= 2|F|\ell\eta - 2|F|\ell + 4|F| \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} f(t) \, dt \\ &= 2|F| \left( \ell(\eta - 1) + \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2}} \sum_{i=1}^N d_i^2 \right) \\ &\geq 2|F| \left( \ell(\eta - 1) + \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2}} N d^2 \right) \end{aligned}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt die aus der 2. binomischen Formel abgeleitete Abschätzung  $(\sum_{i=1}^N x_i)^2 \leq N \sum_{i=1}^N x_i^2$  genutzt. Minimierung über  $\eta$  liefert  $\eta^2 = 1/(1 + \frac{(Nd)^4}{2N^2\ell^2})$ , durch

Einsetzen erhalten wir schließlich

$$\Delta J \geq 2|F|\ell \left( \sqrt{1 + \frac{(Nd)^4}{2N^2\ell^2}} - 1 \right).$$

Aus dem am Anfang beschriebenen geometrischen Setting entnehmen wir  $Nd \gtrsim \ell - \hat{J}$  und schließen  $\frac{\hat{J}}{\ell} \lesssim |F| \Rightarrow (\ell - \hat{J}) \gtrsim \ell(1 - |F|) \sim \ell$ , dabei haben wir erstmals  $|F| < \frac{1}{2}$  genutzt. Mit  $N \lesssim \frac{\Delta J}{\varepsilon} \lesssim \ell|F|^{1/3}\ell^{-1/3}$  (unsere obere Grenze aus dem vorherigen Abschnitt) erhalten wir schlussendlich

$$\Delta J \gtrsim 2|F|\ell \left( \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon}{|F|} \right)^{2/3}} - 1 \right) \gtrsim \ell|F|^{\frac{1}{3}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt  $\sqrt{x+y} \gtrsim x+y$  für  $x, y \leq 1$  genutzt, dies ist wegen  $\varepsilon < |F|$  möglich.

### 2.2.2 Beweis mittels der Hashin-Shtrikman Grenze

Um auch für den Fall  $\frac{1}{2} \leq |F| < 1 - \delta$  eine untere Schranke zu finden, optimieren wir die Hashin-Shtrikman Grenze [HS63]. Diese liefert in ihrer ursprünglichen Formulierung eine untere Schranke für den Elastizitätskoeffizienten zusammengesetzter Materialien. In unserem Fall erhalten wir für ein gegebenes Spannungsfeld die minimale Komplianz, die ein Material mit bekanntem Volumenanteil besitzen kann. Dafür orientieren wir uns an [AA99] und verfeinern die dort vorgenommenen Berechnungen. Der Ablauf des Beweises:

1. Optimierte die Hashin-Shtrikman Grenze und finde so die Energiekosten für eine Abweichung der Geometrie vom optimalen Volumenanteil und für Abweichung der Äste von einer vertikalen Orientierung
2. Nutze eine Fourier-Abschätzung, um die Randbedingung  $\sigma n = \hat{\sigma} n$  für  $\sigma$  einfließen zu lassen
3. Füge eine Fourier-Abschätzung für den Oberflächenterm  $\varepsilon \text{Per}(\mathcal{O})$  hinzu

Anschließend werden wir die Abschätzungen kombinieren, um die gewünschte Grenze zu erhalten.

**Schritt 1:** Sei  $\chi : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  die charakteristische Funktion der optimalen Geometrie  $\mathcal{O}$  und  $\theta = \frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \int_{\Omega} \chi(x) dx$  deren Volumenanteil. Wir definieren außerdem  $\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  als  $\chi - \theta$  auf  $\Omega$  und 0 außerhalb von  $\Omega$ . Im Folgenden sei zudem die Fourier-Transformierte einer Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\hat{f}(k) := \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-2\pi i k \cdot x} dx$$

bezeichnet. Zuletzt ist der Raum der zulässigen symmetrischen und divergenzfreen Tensorfelder gegeben durch

$$\Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}} = \{ \eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2} \mid \text{div} \eta = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2, \eta = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \}.$$

Beachte, dass dies bereits  $\eta n = 0$  auf  $\partial\Omega$  impliziert und dass für  $\eta \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}$  auch  $\hat{\sigma} + \eta \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}$  gilt.

Zunächst soll der Komplianz- und der Volumenterm im Fourierraum abgeschätzt werden:

$$\text{Comp}(\mathcal{O}) + \text{Vol}(\mathcal{O}) = \min_{\substack{\eta \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}} \\ (\hat{\sigma} + \eta) = 0 \text{ auf } \Omega \setminus \mathcal{O}}} \int |\hat{\sigma} + \eta|^2 + \chi dx$$

Wir adaptieren den Ansatz aus [AA99]. Vom mathematischen Standpunkt aus relaxieren wir das Problem, indem wir nicht mehr  $(\hat{\sigma} + \eta) = 0$  auf  $\Omega \setminus \mathcal{O}$  voraussetzen, sondern den dadurch entstehenden zusätzlichen Term  $\int_{\Omega \setminus \mathcal{O}} |\hat{\sigma} + \eta|^2 dx$  immer stärker bestrafen. Physikalisch gesehen umhüllen wir unsere Geometrie mit einem zweiten Material, bekommen also genau das Setting eines zusammengesetzten Materials, für das die Hashin-Shtrikman-Grenze, wie bereits erwähnt, ursprünglich publiziert wurde. Unsere tatsächliche Problemstellung erhalten wir, indem wir anschließend die Komplianz dieses zweiten Materials (die wir hier im physikalischen Sinne als skalare Größe  $K$  verstehen) gegen unendlich gehen lassen:

$$\begin{aligned}
& \min_{\substack{\eta \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}} \\ (\hat{\sigma} + \eta) = 0 \text{ auf } \Omega \setminus \mathcal{O}}} \int_{\Omega} |\hat{\sigma} + \eta|^2 + \chi dx \\
& \geq \limsup_{K \rightarrow 0} \min_{\eta \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\Omega} \chi |\hat{\sigma} + \eta|^2 + \chi + (1 - \chi) K^{-1} |\hat{\sigma} + \eta|^2 dx \\
& = \limsup_{K \rightarrow 0} \min_{\eta \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\Omega} |\hat{\sigma} + \eta|^2 + \chi + (1 - \chi) (K^{-1} - 1) |\hat{\sigma} + \eta|^2 dx \\
& = \limsup_{K \rightarrow 0} \min_{\eta \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\Omega} |\hat{\sigma} + \eta|^2 + \chi + (1 - \chi) \max_{\tau} \{2(\hat{\sigma} + \eta) : \tau - (K^{-1} - 1)^{-1} |\tau|^2\} dx
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde Fenchel-Dualität genutzt. Wir wählen ein beliebiges  $\tau$ , das konstant in  $x$  ist, und nutzen  $\int_{\Omega} \gamma dx = 0$ , sodass sich der obere Ausdruck wie folgt weiter nach unten abschätzen lässt:

$$\begin{aligned}
& \min_{\eta \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\Omega} |\hat{\sigma} + \eta|^2 + \chi + (1 - \chi) 2(\hat{\sigma} + \eta) : \tau dx \\
& = \text{Vol}(\Omega) (|\hat{\sigma}|^2 + 2(1 - \theta) \hat{\sigma} : \tau + \theta) + \min_{\eta \in \Sigma_{\text{ad}}^{\mathcal{O}}} \int_{\mathbb{R}^2} |\eta|^2 - 2\gamma \eta : \tau dx \\
& = \ell(|\hat{\sigma}|^2 + 2(1 - \theta) \hat{\sigma} : \tau + \theta) + \min_{\substack{\hat{\eta}(k) \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2} \\ \hat{\eta}(k) k = 0 \ \forall k \in \mathbb{R}^2}} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\eta}|^2 - 2\bar{\gamma} \hat{\eta} : \tau dk
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Parseval'sche Gleichung genutzt, die Bedingung  $\hat{\eta}(k)k = 0$  entstammt der Divergenzfreiheit.

Wir wollen nun über  $\hat{\eta}$  minimieren und folgern zunächst  $\hat{\eta}(k)k = 0 \Rightarrow k \in \ker(\hat{\eta}(k)) \Rightarrow k^{\perp} \in \text{Im}(\hat{\eta}(k))$ , wobei  $\perp$  eine Rotation um  $\frac{\pi}{2}$  gegen den Uhrzeigersinn bedeuten soll. Sei  $\hat{k}^{\perp} := k^{\perp}/|k^{\perp}|$ , so können wir  $\hat{\eta}$  aufgrund der Symmetrie durch  $\hat{\eta}(k) = f(k) \cdot \hat{k}^{\perp} \otimes \hat{k}^{\perp}$  beschreiben. Um nun  $f(k)$  zu bestimmen bilden wir die Gâteaux-Ableitung des Integranden mit Testrichtung  $\hat{\eta}$  und setzen das allgemeine  $\hat{\eta} = f(k) \cdot \hat{k}^{\perp} \otimes \hat{k}^{\perp}$  ein. Für das optimale  $\hat{\eta}$  muss die Gâteaux-Ableitung verschwinden, die so entstehende Gleichung können wir umformen und so  $f(k)$  bestimmen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [|\hat{\eta} + t\hat{\eta}|^2 - 2\bar{\gamma}(\hat{\eta} + t\hat{\eta}) : \tau]_{t=0} &= 2|\hat{\eta}|^2 - 2\bar{\gamma}\hat{\eta} : \tau \stackrel{!}{=} 0 \\
&\Leftrightarrow |\hat{\eta}|^2 = \bar{\gamma}\hat{\eta} : \tau \\
&\Leftrightarrow |f(k)|^2 |\hat{k}^{\perp} \otimes \hat{k}^{\perp}|^2 = \bar{\gamma}f(k)(\hat{k}^{\perp} \otimes \hat{k}^{\perp}) : \tau \\
&\Leftrightarrow |f(k)|^2 = \bar{\gamma}(\hat{k}^{\perp} \cdot \tau \hat{k}^{\perp}) f(k) \\
&\Leftrightarrow f(k) = \hat{\gamma}(\hat{k}^{\perp} \cdot \tau \hat{k}^{\perp})
\end{aligned}$$

Setzen wir diesen Ausdruck wiederum für  $\hat{\eta}$  ein, so erhalten wir

$$\text{Comp}(\mathcal{O}) + \text{Vol}(\mathcal{O}) \geq \ell(|\hat{\sigma}|^2 + 2(1 - \theta) \hat{\sigma} : \tau + \theta) - \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\gamma}|^2 |\hat{k}^{\perp} \cdot \tau \hat{k}^{\perp}|^2 dk.$$

Es gilt (erneut nach Parseval)  $\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\gamma}|^2 dk = \int_{\Omega} |\gamma|^2 dx = \int_{\Omega} \chi - 2\chi\theta + \theta^2 dx = \ell\theta(1-\theta)$ . Wir erweitern mit  $\pm\ell\theta(1-\theta)\max\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}$ , wobei  $\sigma_{1,2}$  die beiden Singulärwerte von  $\tau$  sind:

$$= \ell(|\hat{\sigma}|^2 + 2(1-\theta)\hat{\sigma} : \tau + \theta - \theta(1-\theta)\max\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}) + \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\gamma}|^2 \left( \max\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\} - |\hat{k}^\perp \cdot \tau \hat{k}^\perp|^2 \right) dk$$

Bisher haben wir  $\tau$  nur als konstant in  $x$  gefordert, nun wählen wir explizit  $\tau = \frac{\hat{\sigma}}{\theta}$  (dies maximiert den ersten Summanden). Damit verhält sich der Integrand wie

$$|\hat{\gamma}|^2 \left( \frac{F^2}{\theta^2} - \left| \begin{pmatrix} -\hat{k}_2 \\ \hat{k}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F/\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{k}_2 \\ \hat{k}_1 \end{pmatrix} \right|^2 \right) = \frac{F^2}{\theta^2} |\hat{\gamma}|^2 (1 - \hat{k}_1^2) = \frac{F^2}{\theta^2} |\hat{\gamma}|^2 \hat{k}_2^2 = \frac{F^2}{\theta^2} |\hat{\gamma}|^2 \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2},$$

sodass sich überschüssige Komplianz und Volumen nach unten abschätzen lassen gegen

$$\begin{aligned} \Delta J_{\text{elast}} &:= \text{Comp}(\mathcal{O}) + \text{Vol}(\mathcal{O}) - J_0^{*,F,\ell} \\ &\gtrsim \ell(F^2 + 2(1-\theta)\frac{F^2}{\theta} + \theta - \theta(1-\theta)\frac{F^2}{\theta^2}) + \frac{F^2}{\theta^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\gamma}|^2 \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} dk - 2|F|\ell \\ &= \ell\left(\frac{1}{\theta}F^2 + \theta - 2|F|\right) + \frac{F^2}{\theta^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\gamma}|^2 \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} dk \\ &= \ell\frac{(|F|-\theta)^2}{\theta} + \frac{F^2}{\theta^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\gamma}|^2 \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} dk. \end{aligned}$$

Falls also eine Geometrie vom Volumenanteil  $\theta = |F|$  abweicht und bei  $\chi$  beziehungsweise  $\gamma$  nicht ausschließlich Fourierkoeffizienten in horizontaler Richtung auftreten, quantifiziert die obige Abschätzung die in diesem Fall zusätzlich vorhandene Energie.

Nun wissen wir durch unsere obere Schranke bereits  $\Delta J_{\text{elast}} \lesssim \ell|F|^{1/3}\varepsilon^{2/3}$  und sehen so  $|F|^{1/3}\varepsilon^{2/3} \gtrsim \frac{(F-\theta)^2}{\theta} = |F|\left(\frac{|F|}{\theta} + 1\right)\left(1 - \frac{\theta}{|F|}\right)$ . Löst man dies nach  $\frac{|F|}{\theta}$  auf, ergibt sich  $\frac{|F|}{\theta} = 1 + O((\varepsilon/|F|)^{2/3})$  und unsere Abschätzung vereinfacht sich zu

$$\Delta J_{\text{elast}} \gtrsim \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\gamma}|^2 \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} dk.$$

**Schritt 2:** Unsere Geometrie  $\mathcal{O}$  stoppt abrupt auf  $x_2 = 0, 1$  und ist dort einer Zugbelastung ausgesetzt. Um dies in unsere Abschätzung einfließen zu lassen, nutzen wir das Analogon zu Lemma 2.4 aus [CKO99] im kontinuierlichen Fourier-Raum. Dieses besagt, dass der Großteil der  $L^2$ -Masse einer (charakteristischen) Funktion mit Träger in  $\Omega$  fern der  $k_2$ -Frequenz  $|k_2| = 1$  liegt. Der Vollständigkeit halber geben wir die Argumentation hier kurz wieder; es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\gamma}|^2 \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} dk_2 \geq \int_{|k_2| > \frac{1}{4}} |\hat{\gamma}|^2 \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} dk_2 \geq \frac{1}{16k_1^2 + 1} \left( \int_{\mathbb{R}} |\hat{\gamma}|^2 dk_2 - \int_{|k_2| \leq \frac{1}{4}} |\hat{\gamma}|^2 dk_2 \right)$$

Nach Hölder (und Parseval) gilt für jedes  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$  die Beziehung

$$|\hat{f}(k)|^2 \leq \left( \int_0^1 |f(x) \cdot e^{2\pi i k x}| dx \right)^2 \leq \|f\|_{L^2([0,1])}^2 = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

beziehungsweise für unser konkretes  $\hat{\gamma}$

$$\int_{|k_2| \leq \frac{1}{4}} |\hat{\gamma}|^2 dk_2 \leq \int_{|k_2| \leq \frac{1}{4}} \|\hat{\gamma}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dk_2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\gamma}|^2 dk_2.$$

Wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\gamma}|^2 \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} dk_2 \geq \frac{1}{2} \frac{1}{16k_1^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\gamma}|^2 dk_2,$$

mit Fubini wird aus der Abschätzung aus Schritt 1 somit

$$\Delta J_{\text{elast}} \gtrsim \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\gamma}|^2 \frac{1}{1+k_1^2} dk.$$

**Schritt 3:** Zuletzt benötigen wir eine Fourier-Abschätzung des Oberflächenterms. Wir nutzen dazu die folgende Aussage aus [AFP06, Beweis Lemma 3.24]:

Für  $u$  von beschränkter Variation auf  $\mathbb{R}^2$ ,  $s > 0$  klein genug,  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  kompakt,  $y$  aus der abgeschlossenen Einheitskugel in  $\Omega$ ,  $x \in \Omega$ , gilt

$$\int_{\Omega} |u(x - sy) - u(x)| dx \leq s |Du|(\mathbb{R}^2),$$

wobei  $|Du|(\mathbb{R}^2)$  die totale Variation von  $u$  auf  $\mathbb{R}^2$  bezeichnet.

Wir wählen  $u = \chi$  (erweitert mit 0), sowie  $y = (-1, 0)$ . Dann gilt:

$$\int_{\Omega} |\chi - \chi(\cdot + s, \cdot)| dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\chi - \chi(\cdot + s, \cdot)|^2 dx = \|\chi - \chi(\cdot + s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \|\gamma - \gamma(\cdot + s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

sowie  $\text{Per}(\mathcal{O}) = |D\chi|(\mathbb{R}^2)$ . Damit können wir  $\text{Per}(\mathcal{O})$  für  $0 < L \lesssim 1$  wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \text{Per}(\mathcal{O}) &\geq \frac{1}{s} \|\gamma - \gamma(\cdot + s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ \Leftrightarrow \text{Per}(\mathcal{O}) &\gtrsim \frac{1}{L} \int_{L/2}^{2L} \frac{1}{s} \|\gamma - \gamma(\cdot + s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \end{aligned}$$

Wie aus der Fourieranalysis bekannt, gilt  $\widehat{\gamma(\cdot + s, \cdot)} = \hat{\gamma} e^{2\pi i s k_1}$ . Wir nutzen außerdem  $\frac{1}{s} \sim \frac{1}{L}$ , somit ist der obere Ausdruck nach Parseval (bis auf Multiplikation mit einer Konstante) gleich

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^2} \int_{L/2}^{2L} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\gamma}(k)(1 - e^{2\pi i s k_1})|^2 dk ds &\geq \frac{1}{L^2} \int_{L|k_1| \geq 1} |\hat{\gamma}|^2 \int_{L/2}^{2L} |1 - e^{2\pi i s k_1}|^2 ds dk \\ &= \frac{1}{L} \int_{L|k_1| \geq 1} |\hat{\gamma}|^2 \int_{1/2}^2 |1 - e^{2\pi i s L k_1}|^2 ds dk. \end{aligned}$$

Da wir das äußere Integral auf  $L|k_1| \geq 1$  eingeschränkt haben, integrieren wir im inneren Integral über mindestens eine komplette Periode des in  $s$  periodischen Integranden. Somit lässt sich dieser gegen eine feste Konstante abschätzen:

$$\text{Per}(\mathcal{O}) \gtrsim \frac{1}{L} \int_{L|k_1| \geq 1} |\hat{\gamma}|^2 dk$$

**Kombination der Abschätzungen:** Fügen wir unsere Ergebnisse zusammen und nutzen

$L \lesssim 1$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L^2} \Delta J_{\text{elast}} + L \text{Per}(\mathcal{O}) &\stackrel{L \lesssim 1}{\gtrsim} \Delta J_{\text{elast}} \left(1 + \frac{1}{L^2}\right) + L \text{Per}(\mathcal{O}) \\
&\gtrsim \left(1 + \frac{1}{L^2}\right) \int_{L|k_1| \leq 1} |\hat{\gamma}|^2 \frac{1}{1+k_1^2} dk + \int_{L|k_1| \geq 1} |\hat{\gamma}|^2 dk \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\gamma}|^2 dk = \ell \theta (1 - \theta).
\end{aligned}$$

Die Wahl  $L = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$ , Multiplikation mit  $L^2$  und Ausnutzen von  $|F| \sim \theta$  ergibt dann

$$\Delta J_{\text{elast}} + \varepsilon \text{Per}(\mathcal{O}) \gtrsim \ell \theta (1 - \theta) \varepsilon^{\frac{2}{3}} \gtrsim \ell |F| \varepsilon^{\frac{2}{3}}.$$

Ist  $|F|$  von 0 wegbeschränkt, so skaliert diese Grenze wie  $\ell \varepsilon^{\frac{2}{3}}$ . Für Werte von  $|F|$  nahe bei 0 ist die Skalierung in  $|F|$  allerdings nicht optimal.

### 3 Skalierungsgesetze im dreidimensionalen Fall für mittlere und kleine Spannungen

In diesem Abschnitt gehen wir auf den dreidimensionalen Fall ein. Ähnlich wie beim Supraleiterproblem hängen die optimale Energieskalierung und die Konstruktionen, die diese erzielen, essentiell von der Stärke der angelegten Spannung ab. Wir wollen die folgenden beiden Aussagen zeigen:

**Theorem 3.1:** Sei  $\delta \in (0, 1)$ ,  $|F| \in (\delta, 1 - \delta)$ ,  $\varepsilon < \min\{\ell^3|F|, |F|^4\}$ . Dann existieren Konstanten  $c = c(\delta)$ ,  $C > 0$  mit

$$c\ell^2|F|^{\frac{1}{3}}\varepsilon^{\frac{2}{3}} \leq \min_{\mathcal{O} \subset \Omega} J^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] - J_0^{*, F, \ell} \leq C\ell^2|F|^{\frac{1}{3}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}.$$

Bei kleineren Werten von  $|F|$  lässt sich sogar ein Vorfaktor von  $|F|^{\frac{2}{3}}$  erzielen:

**Theorem 3.2:** Sei  $|F|^{7/2} < 1/2$ ,  $\varepsilon < \min\{\ell^3\sqrt{|F|}, |F|^{7/2}\}$ . Dann existieren Konstanten  $c, C > 0$  mit

$$c\ell^2|F|^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{2}{3}} \leq \min_{\mathcal{O} \subset \Omega} J^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] - J_0^{*, F, \ell} \leq C\ell^2|F|^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}.$$

Wir werden zunächst in Abschnitt 3.1 Konstruktionen vorstellen, die diese beiden Skalierungen erreichen. Es wird sich herausstellen, dass bei den mittleren Spannungen aus Theorem 3.1 bereits eine zweidimensionale Verzweigung ausreicht, während für die relativ kleinen Werte von  $|F|$  in Theorem 3.2 erst eine echte dreidimensionale Verzweigung fast-optimal ist. Im Anschluss werden wir in Abschnitt 3.2 die Beziehung zum Supraleiterproblem herstellen und daraus für beide Regimes eine passende untere Schranke erhalten.

#### 3.1 Konstruktion einer oberen Schranke in 3D

##### 3.1.1 Mittlere anliegende Spannungen

Sei  $\mathcal{O}$  unsere Basiszelle aus dem 2D-Fall. Wir definieren  $\tilde{\mathcal{O}} := (0, \ell) \times \mathcal{O}$ , dies entspricht der natürlichen Extrusion der Struktur in die dritte Dimension. Passende Spannungsfelder erhalten wir durch  $\sigma_i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$ . Eine kurze Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} \Delta J_{\text{cell}, 3\text{D}} &= \text{Comp}(\tilde{\mathcal{O}}) + \text{Vol}(\tilde{\mathcal{O}}) + \varepsilon \text{Per}(\tilde{\mathcal{O}}) - 2|F|w\ell \\ &\sim 2\left(2\frac{\ell}{\cos(\alpha)}b\ell + a\frac{w}{2}\ell\right) + 4\varepsilon\frac{\ell}{\cos(\alpha)}\ell + 2\varepsilon\frac{w}{2}\ell - 2|F|w\ell \\ &\lesssim \sqrt{|F|w^3\varepsilon} \cdot \ell, \end{aligned}$$

unter Nutzung der in Abschnitt 2.1 durchgeführten Rechnungen. Mit den gleichen Überlegungen wie im 2D-Fall erhalten wir für die gesamte Energie nach Zusammensetzen der Basiszellen

$$\Delta J_{\text{ges}} \lesssim \ell^2|F|^{\frac{1}{3}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}$$

unter der Bedingung  $\varepsilon \lesssim \ell^3|F|$ .

Auch die Grenzschicht extrudieren wir aus dem 2D-Modell und erhalten analog die Bedingung  $\varepsilon \lesssim |F|$ . Das Volumen (und somit auch die Komplianz) der Grenzschicht skaliert dann wie  $\ell^2w_n \sim \frac{\ell^2\varepsilon}{|F|}$ , was unter der Bedingung  $\varepsilon \leq |F|^4$  kleiner als die angestrebte Skalierung ist. Die Oberfläche trägt nur einen Term der Ordnung  $\varepsilon\ell^2$  bei, sodass auch im analogen 3D-Fall die Grenzschicht kein Problem darstellt.

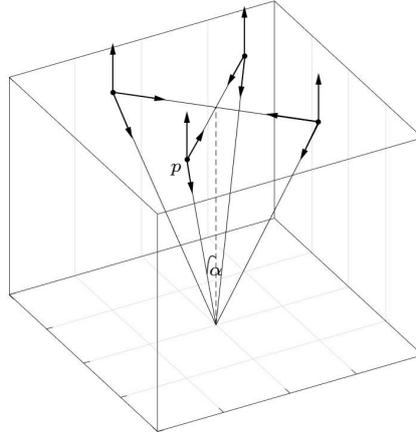


Abbildung 6: Schematische Darstellung der zugrundeliegenden Struktur und der anliegenden Kräfte

### 3.1.2 Kleine anliegende Spannungen

Als Basis unserer Konstruktion fungiert eine dreidimensionale Baumstruktur. Um große Komplianzterme zu verhindern, müssen wie im Zweidimensionalen zusätzliche Querstreben zwischen den vier oberen Enden eingefügt werden. Tatsächlich ist es für die Skalierung irrelevant, ob die vier oberen Strebenenden über Kreuz oder im Quadrat verbunden werden. Aus technischen Gründen ist aber die kreuzförmige Variante zu bevorzugen (siehe Abbildung 7). Wir verfahren erneut nach dem in Abschnitt 2.1 vorgestellten Konstruktionsalgorithmus:

**Schritt 1:** Nehmen wir die Streben kurzzeitig als eindimensional an, so erhalten wir die in Abbildung 6 dargestellte Struktur. An jedem der oberen Knotenpunkte greift von oben eine Kraft der Stärke  $\frac{|F|w^2}{4} =: s^2$  an. Stellen wir beispielsweise in  $p$  das Kräftegleichgewicht auf, so erhalten wir

$$s^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} s^2 \tan \alpha, \quad c_2 = \frac{s^2}{\cos \alpha}$$

mit  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}w}{4l}$ . Zudem werden wir erneut  $w/l \leq 1$  sicherstellen. Um also in allen Streben uniaxiale konstante Spannungen zu haben, muss für deren Querschnittsflächen  $A, B$  gelten:  $A \sim \frac{1}{\sqrt{2}} s^2 \tan \alpha$ ,  $B \sim \frac{s^2}{\cos \alpha}$ .

In Abbildung 7 ist die Basiszelle dargestellt, die wir im Folgenden für die Konstruktion verwenden werden. Wie man schnell verifizieren kann, gilt  $a = \sqrt{2}s \tan \alpha$  und  $b = \frac{\sqrt{2}s}{\cos \alpha}$ , sodass die Querschnittsflächen wie gewünscht skalieren.

Wir treffen die Annahme, dass es möglich ist, die Struktur in endlich viele Gebiete zu zerteilen, auf denen jeweils die Norm der Spannungstensoren nach oben durch eine Konstante beschränkt ist. Insbesondere für die Übergangsgeometrien (siehe z.B. Abbildung 9) ist das Finden einer passenden Zerteilung kompliziert. Intuitive Ansätze lieferten keine Ergebnisse - komplexere Zerlegungen konnten im Rahmen dieser Bachelorarbeit nicht mehr untersucht werden.

Sollte unsere Annahme zutreffen, so skaliert die Komplianz wie das Volumen und wir können

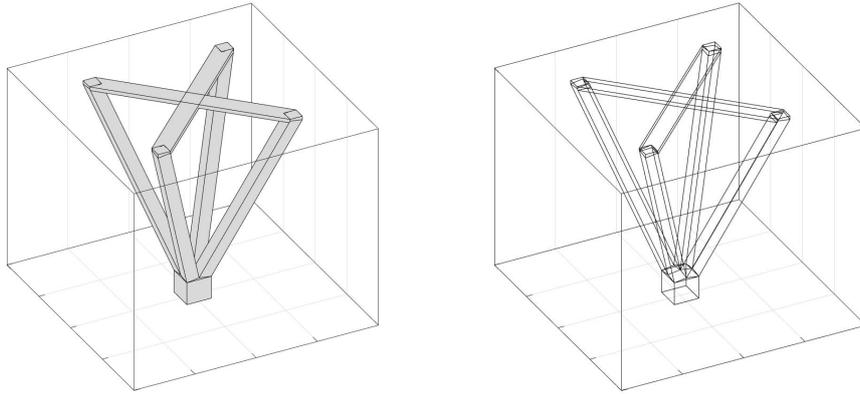


Abbildung 7: Darstellung einer 3D-Basiszelle der Größe  $w \times w \times l$

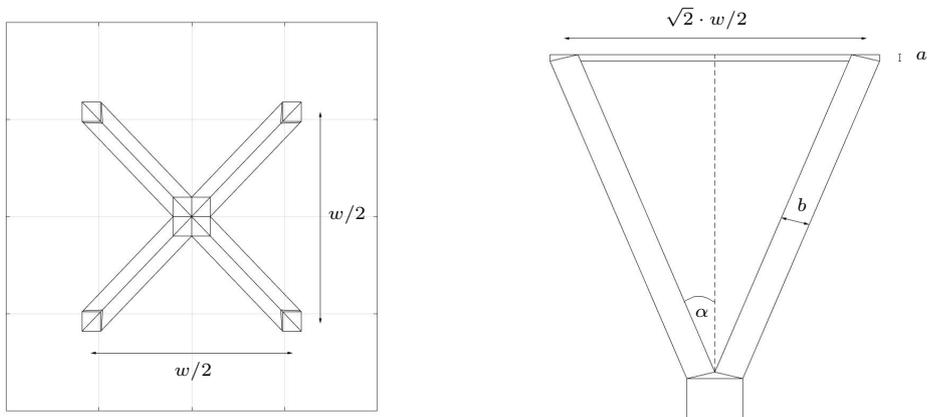


Abbildung 8: Ansicht von oben und diagonaler Querschnitt

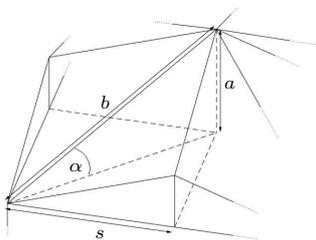


Abbildung 9: Detailansicht der unteren Übergangsgeometrie

die Überschussenergie einer Basiszelle berechnen:

$$\begin{aligned}
\Delta J_{\text{cell}} &\sim 2\text{Vol}_{\text{cell}} + \varepsilon\text{Per}_{\text{cell}} - 2|F|w^2l \\
&\sim 2\left(4\frac{l}{\cos\alpha}B + 2A\sqrt{2}\frac{w}{2}\right) + 8\varepsilon\sqrt{2}\frac{w}{2}(a + \sqrt{2}s) + 16\varepsilon\frac{l}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2s^2 + b^2} - 2|F|w^2l \\
&\sim 8\frac{s^2l}{\cos^2\alpha} + s^2w\tan\alpha + \varepsilon sw(\tan\alpha + \sqrt{2}) + \varepsilon\frac{sl}{\cos\alpha} + \varepsilon\frac{sl}{\cos^2\alpha} - 8s^2l \\
&\sim 8s^2l\left(1 + \frac{w^2}{8l^2}\right) + s^2w\frac{\sqrt{2}w}{4l} + \varepsilon sw\left(\frac{\sqrt{2}w}{4l} + \sqrt{2}\right) + \varepsilon sl\sqrt{1 + \frac{w^2}{8l^2}} + \varepsilon sl\left(1 + \frac{w^2}{8l^2}\right) - 8s^2l \\
&\sim \frac{s^2w^2}{l} + \frac{s^2w^2}{l} + \frac{\varepsilon sw^2}{l} + \varepsilon sw + \varepsilon sl + \varepsilon sw + \varepsilon sl + \frac{\varepsilon sw^2}{l} \\
&\sim \frac{s^2w^2}{l} + \frac{\varepsilon sw^2}{l} + \varepsilon sw + \varepsilon sl \\
&\sim \frac{|F|w^4}{l} + \frac{\varepsilon\sqrt{|F|}w^3}{l} + \varepsilon\sqrt{|F|}w^2 + \varepsilon\sqrt{|F|}wl
\end{aligned}$$

Wir nutzen die Konstruktionsbedingung  $w \leq l$  und erhalten

$$\Delta J_{\text{cell}} \lesssim \frac{|F|w^4}{l} + \varepsilon\sqrt{|F|}w^2 + \varepsilon\sqrt{|F|}wl$$

Minimieren über  $l$  ergibt  $l = \sqrt{\sqrt{|F|}w^3/\varepsilon}$  und die Abschätzung der Überschussenergie vereinfacht sich zu

$$\Delta J_{\text{cell}} \lesssim |F|^{3/4}w^{5/2}\varepsilon^{1/2} + \varepsilon\sqrt{|F|}w^2.$$

Wir folgern

$$w \leq l \Leftrightarrow w \leq \sqrt{\sqrt{|F|}w^3/\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon^{1/2} \leq |F|^{1/4}w^{1/2},$$

somit skaliert der zweite Summand wie der erste und es ergibt sich

$$\Delta J_{\text{cell}} \lesssim |F|^{3/4}w^{5/2}\varepsilon^{1/2}.$$

**Schritt 2:** Analog zum 2D-Fall findet sich auf  $x_3 \sim \frac{1}{2}$  die größte Zellenbreite  $w_{\text{coarse}}$ , die Zellen der  $k$ -ten Schicht besitzen dann die Breite  $w_k = w_{\text{coarse}}/2^k$  und die Höhe  $l_k = \sqrt{\sqrt{|F|}w_k^3/\varepsilon} = 2^{-3k/2}l_{\text{coarse}}$ . Nehmen wir  $n$  Schichten pro Gebietshälfte an, so erhalten wir

$$1 = 2 \sum_{k=0}^n l_k = 2 \sqrt{\sqrt{|F|}w_{\text{coarse}}^3/\varepsilon} \sum_{k=0}^n 2^{-\frac{3k}{2}} \sim \sqrt{\sqrt{|F|}w_{\text{coarse}}^3/\varepsilon}.$$

Es ergibt sich also  $w_{\text{coarse}} \sim \sqrt[3]{\varepsilon/\sqrt{|F|}}$ . Mit  $\frac{\ell}{w_k}$  Zellen pro Schicht können wir schlussendlich abschätzen:

$$\Delta J_{\text{ges}} \leq 2 \sum_{k=0}^n \frac{\ell}{w_k} \Delta J_{\text{cell}}(w_k) \sim \frac{\ell}{w_{\text{coarse}}} \Delta J_{\text{cell}}(w_{\text{coarse}}) \sim \ell^2 |F|^{2/3} \varepsilon^{2/3}$$

Wir müssen auch bei dieser Konstruktion wieder sicherstellen, dass die maximale Zellenbreite  $w_{\text{coarse}}$  die Gebietsbreite  $\ell$  nicht übersteigt:

$$w_{\text{coarse}} \leq \ell \Leftrightarrow \varepsilon \leq \ell^3 \sqrt{|F|}$$

**Schritt 3:** Der Bedingung  $w_k < l_k$  entnehmen wir erneut die maximale Anzahl von Schichten  $n$ :

$$\begin{aligned}
w_n &= l_n \\
\Leftrightarrow 2^{-n}w_{\text{coarse}} &= 2^{-\frac{3n}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{|F|}w_{\text{coarse}}}{\varepsilon}} \\
\Leftrightarrow n &= \log_2\left(\frac{\sqrt{|F|}w_{\text{coarse}}}{\varepsilon}\right) \sim \frac{2}{3} \log_2\left(\frac{\sqrt{|F|}}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

Wir benötigen mindestens eine Schicht, somit erhalten wir als zusätzliche Konstruktionsbedingung  $\varepsilon \lesssim \sqrt{|F|}$ .

Zuletzt bleibt, die Energieskalierung in der Grenzschicht zu überprüfen. Wir stellen fest:

$$w_n \sim l_n \sim \sqrt{\frac{\sqrt{|F|}w_n^3}{\varepsilon}} \Rightarrow w_n \sim \frac{\varepsilon}{\sqrt{|F|}}$$

Das Volumen der Grenzschicht skaliert somit wie  $\ell^2 l_n \sim \ell^2 w_n \sim \frac{\ell^2 \varepsilon}{\sqrt{|F|}}$ . Damit dies die gefundene Skalierung der Überschussenergie nicht stört, fordern wir also

$$\frac{\ell^2 \varepsilon}{\sqrt{|F|}} \leq \ell^2 |F|^{2/3} \varepsilon^{2/3} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon \leq |F|^{7/2}.$$

Die Oberflächenenergie skaliert wie  $\varepsilon \ell^2$  und ist demnach nochmal kleiner. Somit haben wir gezeigt, dass die Grenzschicht unter obiger Bedingung zu der gefundenen Energieskalierung passt.

## 3.2 Eine untere Schranke in 3D

Wie in Abschnitt 1.6 gezeigt, ist jede untere Schranke des Supraleiterproblems auch eine untere Schranke des zugehörigen Komplianzminimierungsproblems. Wir werden also im Folgenden passende Theoreme vorstellen und zeigen, dass deren Voraussetzungen erfüllt sind. Wir beziehen uns dabei auf den Artikel [CCK<sup>+</sup>08].

Umrechnung zwischen den Settings:

Als zugrundeliegendes Gebiet wird im zitierten Artikel  $\Omega = [0, 1]^2 \times [0, L]$  verwendet. Wir haben in Abschnitt 1.2 bereits gezeigt, dass wir die Gesamtenergie wie folgt umrechnen können:

$$J^{\varepsilon, F, 1, L}[\mathcal{O}] = L^3 J^{\varepsilon/L, F, 1/L, 1}[\mathcal{O}] \geq L^3 J_{\text{SC}}^{\varepsilon/L, F, 1/L, 1}[\mathcal{O}].$$

Auch für die relaxierte Energie gilt  $J_0^{*, F, 1, L} = 1/\ell^2 \cdot J_0^{*, F, \ell, L} = L^3 J_0^{*, F, 1/L, 1}$ , sodass wir durch den Übergang  $\frac{\varepsilon}{L} \rightarrow \varepsilon, \frac{1}{L} \rightarrow \ell$  und Division durch  $L^3$  eine untere Schranke für das Komplianzminimierungsproblem in dem von uns gewählten Setting bekommen.

Der Einfachheit halber werden wir die bisher genutzten Notationen weiterhin verwenden und auch die Theoreme in dieser Form vorstellen. Zu beachten ist außerdem, dass die Anforderungen an die zulässigen Magnetfelder  $f$  (im Artikel  $B$  genannt) in [CCK<sup>+</sup>08] erst im Theorem selbst gestellt werden (Divergenzfreiheit,  $f = 0$  f.ü. in der supraleitenden Region), während wir diese bereits in der Definition von  $\Phi_{\text{ad,rel}}^{\mathcal{O}}$  voraussetzen. Dadurch, dass jedes  $f$  aus  $\Phi_{\text{ad,rel}}^{\mathcal{O}}$  homogene Neumann-Randbedingungen erfüllt, sind diese  $f$  immer auch  $[0, 1]^2$ -periodisch.

### 3.2.1 Mittlere anliegende Spannungen

Wir möchten Theorem 4.1 anwenden, dieses besagt:

**Theorem 3.2.1:** Sei  $\delta > 0$  beliebig, dann existiert eine (von  $\delta$  abhängende) Konstante  $c(\delta)$ , sodass für jedes  $\varepsilon < L$ ,  $|F| \in (\delta, 1 - \delta)$  und  $f \in \Phi_{\text{ad,rel}}^{\mathcal{O}}$  gilt

$$J_{\text{SC}}^{\varepsilon, F, L}[\mathcal{O}] - J_{\text{SC}, 0}^{*, F, L} \geq c(\delta) \varepsilon^{2/3} L^{1/3}.$$

Mit  $c(\delta) \varepsilon^{2/3} L^{1/3} = L^3 c(\delta) (\frac{1}{L})^2 (\frac{\varepsilon}{L})^{2/3}$  erhalten wir dann:

$$J^{\varepsilon, F, \ell}[\mathcal{O}] - J_0^{*, F, \ell} \geq c(\delta) \ell^2 \varepsilon^{2/3}$$

### 3.2.2 Kleine anliegende Spannungen

In diesem Fall steht die gewünschte Aussage in Theorem 4.3:

**Theorem 3.2.2:** Es gelte  $\frac{\varepsilon}{L} \leq |F|^{7/2} \leq \frac{1}{2}$ . Dann existiert eine Konstante  $c$ , sodass für jedes  $f \in \Phi_{\text{ad,rel}}^{\mathcal{O}}$  gilt:

$$J_{\text{SC}}^{\varepsilon,F,L}[\mathcal{O}] - J_{\text{SC},0}^{*,F,L} \geq c|F|^{2/3}\varepsilon^{2/3}L^{1/3}$$

In unserem Setting also

$$J^{\varepsilon,F,\ell}[\mathcal{O}] - J_0^{*,F,\ell} \geq c\ell^2|F|^{2/3}\varepsilon^{2/3}$$

unter der Bedingung  $\varepsilon \leq |F|^{7/2} \leq \frac{1}{2}$ .

## 4 Zusammenfassung und Diskussion

In dieser Arbeit haben wir uns mit Skalierungsgesetzen für Komplianz-minimierende Mikrostrukturen beschäftigt. Dazu haben wir fast-optimale Geometrien konstruiert, deren Energie berechnet und anschließend mit Ansatz-unabhängigen Argumenten passende untere Schranken gefunden.

Eine klassische Baumstruktur lieferte im Zweidimensionalen eine mögliche Skalierung, die wir anschließend mit einem Dualitätsargument und einer Fourier-basierten Abschätzung als optimal verifizieren konnten.

Durch Extrusion haben wir anschließend diese Struktur in den dreidimensionalen Raum übertragen. Die Konstruktion einer echt-dreidimensionalen Baumstruktur ergab zudem eine weitere mögliche fast-optimale Struktur mit besserer Skalierung. Der Vergleich mit dem verwandten Problem der Strukturbildung in Typ-I Supraleitern führte schließlich auf passende untere Schranken. Es stellte sich heraus, dass die extrudierte Struktur für mittlere Werte der angelegten Spannungsstärke  $|F|$  fast-optimal ist, während für kleinere Werte von  $|F|$  erst die echt dreidimensionale Struktur die optimale Skalierung erzielt.

Wir konnten so die Vermutung bestätigen, dass im dreidimensionalen Komplianzminimierungsproblem ähnlich wie beim Supraleiterproblem unterschiedliche Regimes mit voneinander verschiedenen optimalen Skalierungen auftreten. Tatsächlich entsprechen zwei der von uns gefundenen Skalierungen denen des Supraleiterproblems und auch die zugrundeliegenden Regimes von  $|F|$  entsprechen einander. Wir erwarten deshalb, dass sich auch die Skalierungsgesetze der verbleibenden drei Regimes auf das Komplianzminimierungsproblem übertragen lassen. Dies ist nötig, um Aussagen für das Verhalten bei großen und extrem kleinen Werten von  $|F|$  treffen zu können. Hierfür sind weitere Konstruktionen nötig, die aber vermutlich ebenso durch Anpassung bekannter Ansätze an die Komplianzminimierung gefunden werden können.

## Literaturverzeichnis

- [AA99] Grégoire Allaire und Sylvie Aubry. On optimal microstructures for a plane shape optimization problem. *Structural Optimization*, 17(2):86–94, 1999.
- [AFP06] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco und Diego Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford: Clarendon Press, 2006.
- [BBK<sup>+</sup>14] L. Beghini, A. Beghini, N. Katz, W. Baker und G. Paulino. Connecting architecture and engineering through structural topology optimization. *Engineering Structures*, 59:716–726, 2014.
- [CCK<sup>+</sup>08] Rustum Choksi, Sergio Conti, Robert V. Kohn und Felix Otto. Energy minimization and flux domain structure in the intermediate state energy scaling laws during the onset and destruction of the intermediate state in a type i superconductor. *Comm. Pure Appl. Math.*, 61(5):595–626, 2008.
- [Cia88] Philippe G. Ciarlet. *Three-dimensional elasticity*. Elsevier Science Publishers B.V., 1988.
- [CKO04] Rustum Choksi, Robert V. Kohn und Felix Otto. Energy minimization and flux domain structure in the intermediate state of a type-i superconductor. *J.Nonlinear Sci.*, 14(2):119–171, 2004.
- [CKO99] Rustum Choksi, Robert V. Kohn und Felix Otto. Domain branching in uniaxial ferromagnets: a scaling law for the minimum energy. *Comm. Math. Phys.*, 201(1):61–79, 1999.
- [HS63] Z. Hashin und S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 11(2):127–140, 1963.
- [KM94] Robert V. Kohn und Stefan Müller. Surface energy and microstructure in coherent phase transitions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47(4):405–435, 1994.
- [KS83] Robert V. Kohn und Gilbert Strang. Explicit relaxation of a variational problem in optimal design. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 9:211–214, 1983.
- [KW14] Robert V. Kohn und Benedikt Wirth. Optimal fine-scale structures in compliance minimization for uniaxial load. *Proceedings of the Royal Society A: Math., Phys. and Eng. Sciences*, 470(2170), 2014.
- [KW15] Robert V. Kohn und Benedikt Wirth. Optimal fine-scale structures in compliance minimization for a shear load. *Comm. Pure Appl. Math.*, 69(8):1572–1610, 2015.

## Abbildungsverzeichnis

1	Ergebnis eines numerischen Strukturoptimierungsprozesses in der Architektur (entnommen aus [BBK <sup>+</sup> 14]) . . . . .	4
2	Klassische, baumartige Struktur und Deformation unter anliegender Spannung (entnommen aus [KW14]) . . . . .	11
3	Darstellung einer 2D-Basiszelle (entnommen aus [KW14]) . . . . .	11
4	Darstellung der 2D-Grenzschicht (entnommen aus [KW14]) . . . . .	13
5	Darstellung des Gebietes $\Omega$ mit eingezeichneten Materiallücken und Aufreißen der Lücken unter Streckung (entnommen aus [KW14]) . . . . .	15
6	Schematische Darstellung der zugrundeliegenden Struktur und der anliegenden Kräfte . . . . .	22
7	Darstellung einer 3D-Basiszelle der Größe $w \times w \times l$ . . . . .	23
8	Ansicht von oben und diagonalen Querschnitt . . . . .	23
9	Detailansicht der unteren Übergangsgeometrie . . . . .	23

## 5 Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über *Skalierungsgesetze für Komplianz-minimierende 3D Mikrostrukturen unter Zugbeanspruchung* selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

---

(15. Oktober 2018, Lukas Renelt)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks der Auffindung von Übereinstimmungen sowie einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in einer Datenbank einverstanden.

---

(15. Oktober 2018, Lukas Renelt)