

Das Hindernisproblem - Existenz und Regularität

BACHELORARBEIT

Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

vorgelegt von: Lisa Unland
Matrikelnummer: 427143
Betreuer: Prof. Dr. Benedikt Wirth
Zweitgutachter: JProf. Dr. Manuel Friedrich
Abgabedatum: 19. Dezember 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Grundlagen	4
2.1 Sobolev-Räume	4
2.2 Direkte Methode der Variationsrechnung	6
2.3 Physikalische Motivation	9
2.4 Mathematische Formulierung	9
3 Hauptteil	19
3.1 Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung	19
3.2 Regularität	26
3.3 Blow-ups	30
3.3.1 Reguläre freie Randpunkte	31
3.3.2 Singuläre freie Randpunkte	32
4 Zusammenfassung	38
Literaturverzeichnis	39
Abbildungsverzeichnis	41
Plagiatserklärung	42

1 Einleitung

Diese Bachelorarbeit behandelt das Hindernisproblem, ein klassisches Problem mit freiem Rand. Das heißt, es ist ein Problem, bei dem ein Teil des Randes in dem Gebiet, in dem eine partielle Differentialgleichung gelöst werden soll, unbekannt ist. Diese Probleme sind häufig in der Industrie, Biologie, im Finanzwesen oder auch in der Physik zu finden. Beispiele dafür sind das Wachstum von Tumoren, Hindernisprobleme für elastische Membranen, Schmelz- und Erstarrungsphänomene, Bewertung von Finanzderivaten und viele weitere. Wir möchten uns in dieser Arbeit auf das Hindernisproblem beschränken.

Zu bemerken ist, dass es verschiedene Hindernisprobleme gibt. Es gibt solche mit zwei Hindernissen, welche für Integro-Differential Operatoren, das Hindernisproblem mit dünnem Hindernis, das klassische Hindernisproblem und weitere. Auch diese Probleme sind in unterschiedlichen Bereichen zu finden. Das Hindernisproblem mit dünnem Hindernis finden wir zum Beispiel in der Biologie. Der Prozess der Osmose, bei dem nur bestimmte Teilchen eine semipermeable Membran passieren können, kann durch das Hindernisproblem mit dünnem Hindernis mathematisch beschrieben werden. Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit allerdings mit dem Hindernisproblem, bei dem wir bei gegebenen Hindernis $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und der Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ einen Minimierer für das Energiefunktional

$$E(v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} |\nabla v|^2 - f v \right) dx$$

unter allen Funktionen $v \in H^1(\Omega)$, für die $v \geq \psi$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $v = u_0$ auf $\partial\Omega$ gilt, suchen. Zudem ist $u_0 : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u_0 \geq \psi$ ebenfalls vorausgesetzt. Es ist ein Problem, welches auch in der Physik vorkommt. Es handelt sich dabei um eine elastische Membran, die am Rand fest fixiert ist und dessen Auslenkung durch ein unter ihr befindliches Hindernis begrenzt wird. Das Problem besteht darin die Gleichgewichtsposition der Membran zu finden. Diese Gleichgewichtsposition stellt also die Lösung des Problems dar. Das Ziel dieser Arbeit ist es den entstandenen Rand der Kontaktfläche von Membran und Hindernis, der als freier Rand bezeichnet wird, hinsichtlich der Regularität zu untersuchen. Regularitätsuntersuchungen freier Ränder entwickelten sich erst Ende der 70er Jahre. Daher wird dieses Gebiet bis heute viel erforscht. Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist es die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Problems zu beweisen, wobei der Beweis der Existenz im Vordergrund steht.

Nach dieser kurzen Einführung in das Thema werden wir in Kapitel 2 weitere Grundlagen für das Verständnis des Problems liefern. In Kapitel 2.1 werden wir dazu zunächst einige Definitionen zum Thema der Sobolev-Räume anbringen. Da wir die Existenz einer Lösung des Problems mit der direkten Methode der Variationsrechnung zeigen möchten, wird das Verfahren der Methode im Kapitel 2.2 thematisiert. In dieser Einleitung haben wir schon einen kleinen Teil der physikalischen Motivation des Hindernisproblems für eine elastische Membran erwähnt. In Kapitel 2.3 werden wir dann eine genauere physikalische Motivation sehen. Anschließend können wir dann das Problem ins Mathematische übersetzen. Diesen Teil finden wir unverändert in Kapitel 7.1 des Buches *Mathematische Modellierung* [\[EGK17\]](#) von Christof Eck, Harald Garcke und Peter Knaber, welches die Grundlage dieser Bachelorarbeit darstellt. Der Hauptteil der vorliegenden Arbeit befindet sich in Kapitel 3. Dort werden wir mit der Vorarbeit aus Kapitel 2 die Eindeutigkeit und die Existenz einer Lösung mit der direkten Methode der Variationsrechnung zeigen. Danach werden wir die Regularität des freien Randes genauer untersuchen. Dafür werden wir dann zur Vereinfachung annehmen, dass für das Hindernis $\psi = 0$ gilt.

2 Grundlagen

2.1 Sobolev-Räume

Wir möchten in diesem Kapitel einige Definitionen angeben. Darunter sind vor allem Definitionen bestimmter Funktionenräume, die im Verlauf dieser Arbeit erscheinen. Wir beginnen mit den Lebesgue-Räumen. Wir werden in Kapitel 2.4 voraussetzen, dass das Hindernis ψ in einem solchen Lebesgue-Raum liegt.

Definition 2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $1 \leq p \leq \infty$. Dann wird die Menge der *Lebesgue-Räume* definiert durch

$$L^p = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \|f\|_{L^p} < \infty\},$$

$$\text{wobei } \|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & p \neq \infty \\ \text{esssup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf_{\tilde{f}=f \text{ f.ü.}} \sup_{x \in \Omega} |\tilde{f}(x)|, & p = \infty \end{cases}.$$

Durch die Menge

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^1(w) \forall \bar{w} \subset \Omega \text{ kompakt} \right\}$$

werden die *lokal integrierbaren Funktionen* definiert.

Definition 2.2. Der *Raum der m -mal stetig differenzierbaren Funktionen* $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist $C^m(\bar{\Omega})$. Die dazugehörige Norm ist gegeben durch

$$\|f\|_{C^m} := \sup_{x \in \Omega, |\alpha| \leq m} |D^\alpha f(x)| < \infty$$

mit $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$, wobei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex ist und $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

$C_0^\infty(\Omega)$ ist der *Raum aller unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen* $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit kompaktem Träger $\text{supp}(f) := \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\} \subset \Omega$.

Wir haben schon in der Einleitung erfahren, dass das Hindernisproblem ein Problem mit freiem Rand ist. Es geht also darum eine partielle Differentialgleichung in einem Gebiet mit teilweise unbekanntem Rand zu lösen. Die schwachen Ableitungen, die wir im Folgenden definieren, sind wichtig für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Sie werden für Funktionen benutzt, die im klassischen Sinn nicht stark differenzierbar sind.

Definition 2.3. $w \in L^1_{loc}$ heißt *schwache α -Ableitung* von $u \in L^1_{loc}$, wenn gilt

$$\int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

wobei α ein Multiindex ist. Wenn eine solche Ableitung existiert, so ist sie eindeutig.

Beispiel 2.4. Es seien $\Omega = (0, 2)$, $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $u(x) = \begin{cases} x & , x \in (0, 1] \\ 1 & , x \in (1, 2) \end{cases}$ und $\alpha = 1$.

Wir bekommen dann die schwache Ableitung w von u durch

$$\begin{aligned} \int_0^2 u(x)\varphi'(x) dx &= \int_0^1 x \varphi'(x) dx + \int_1^2 1 \varphi'(x) dx \\ &\stackrel{\text{p.I.}}{=} [x \varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 1 \varphi(x) dx + [\varphi(x)]_1^2 \\ &= \varphi(1) - 0 - \int_0^1 \varphi(x) dx + \varphi(2) - \varphi(1) \\ &= - \int_0^1 \varphi(x) dx \stackrel{!}{=} - \int_0^2 w(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty. \\ \Rightarrow w(x) &= \begin{cases} 1 & , x \in (0, 1] \\ 0 & , x \in (1, 2) \end{cases} \text{ ist die schwache Ableitung von } u(x). \end{aligned}$$

Sobolev-Räume spielen bei partiellen Differentialgleichungen ebenfalls eine entscheidende Rolle. Sie sind Funktionenräume, in denen die schwach differenzierbare Funktionen liegen. Wir werden sie bei dem Verfahren der direkten Methode finden. Zudem werden wir im Folgenden einen speziellen Sobolev-Raum, den m -Hilbertraum definieren. Dieser ist für das Minimieren des Dirichlet Energiefunktional oder auch anderer Variationsfunktionale notwendig. Außerdem werden wir in Kapitel 3.1 viel mit Hilberträumen arbeiten.

Definition 2.5. Für $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid f \text{ hat schwache } \alpha - \text{Ableitung } D^\alpha f \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq m\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

der (m,p) -Sobolev-Raum.

Für $p = 2$ ist auf $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ ein Skalarprodukt

$$(f, g)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha f D^\alpha g dx$$

definiert. H^m wird als m -Hilbertraum bezeichnet. Ein Hilbertraum ist ein vollständiger Vektorraum, das heißt ein metrischer Raum, in dem jede Cauchyfolge konvergiert, versehen mit einem Skalarprodukt.

Zum Schluss dieses Kapitels möchten wir noch zwei hilfreiche Theoreme ohne Beweis angeben. Eines davon ist die Poincaré-(Friedrichs-)Ungleichung, die wir in einem Beweis, bei dem wir die direkte Methode anwenden, nutzen werden.

Theorem 2.6. Der Raum $W^{m,p}$ ist zusammen mit der Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ vollständig.

Beweis. siehe [N11, Satz 2.13] □

Theorem 2.7. (Poincaré-(Friedrichs-)Ungleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes und zusammenhängendes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Zudem sei $\Gamma \subset \partial\Omega$ einfach zusammenhängend mit $|\Gamma| > 0$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $v \in H_\Gamma^1 = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ auf } \Gamma\}$ gilt

$$\|v\|_{L^2} \leq C \|\nabla v\|_{L^2}.$$

Beweis. siehe [W17, Folien 52/53] □

2.2 Direkte Methode der Variationsrechnung

In diesem Kapitel möchten wir die direkte Methode der Variationsrechnung kennenlernen, um diese für den Beweis der Existenz einer Lösung in Kapitel 3.1 nutzen zu können. Wir orientieren uns dazu an [D04]. Wie der Name schon vermuten lässt, können wir mit Hilfe der direkten Methode die Existenz von Minimierern direkt nachweisen, ohne die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen der Funktionale genauer untersuchen zu müssen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes und offenes Gebiet mit Lipschitz-Rand und $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$. Wir betrachten das Grundproblem der Variationsrechnung:

$$\inf \left\{ I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) \, dx \mid u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\}. \quad (2.1)$$

Dabei bedeutet $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, dass $u, u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ und $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, also gilt $u = u_0$ auf $\partial\Omega$. Zudem soll u aus einer schwach abgeschlossenen Menge K stammen. Wir möchten gleich die Existenz einer Lösung $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}$ des Problems (2.1) unter geeigneten Voraussetzungen zeigen. Vorher erwähnen wir kurz die drei Hauptschritte, um die Existenz eines Minimierers direkt zu zeigen:

Schritt 1: Kompaktheit

Wir wählen zunächst eine minimierende Folge $u_\nu \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ zu (2.1), das heißt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} I(u_\nu) = \inf \{I(u)\}.$$

Danach zeigen wir, dass eine Teilfolge, die wir wieder mit u_ν bezeichnen, existiert, die schwach gegen ein $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}$ konvergiert, also

$$u_\nu \rightharpoonup \bar{u} \text{ in } W^{1,p} \text{ für } \nu \rightarrow \infty.$$

Schritt 2: Schwache Unterhalbstetigkeit

In diesem Schritt müssen wir die schwache Unterhalbstetigkeit von I zeigen, nämlich

$$u_\nu \rightharpoonup \bar{u} \text{ in } W^{1,p} \Rightarrow \liminf_{\nu \rightarrow \infty} I(u_\nu) \geq I(\bar{u})$$

für u_ν beliebige (schwach in $W^{1,p}$ konvergente) Folge.

Schritt 3: Folgerung der Existenz

Nun können wir Schritt 1 und 2 zusammensetzen und die Existenz folgern. Da u_ν nach Schritt 1 eine minimierende Folge ist, existiert ein schwacher Grenzwert \bar{u} einer Teilfolge. Dann folgt, dass dieser Grenzwert aufgrund der schwachen Unterhalbstetigkeit und der minimierenden Eigenschaft von u_ν ein Minimierer von (2.1) ist. Wir haben also $I(\bar{u}) = \inf \{I(u)\}$.

Kommen wir nun zum eigentlichen Beweis der Existenz eines Minimierers $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}$ des Problems (2.1).

Theorem 2.8. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes und offenes Gebiet mit Lipschitz-Rand $f \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $f = f(x, u, \xi)$. Es gelten:

- (A1) $\xi \rightarrow f(x, u, \xi)$ ist konvex für alle $(x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$;
 (A2) es existieren $p > q \geq 1$ und $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, sodass
 $f(x, u, \xi) \geq \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3$, $\forall (x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Zudem sei unser Problem (2.1) mit $I(u_0) < \infty$ gegeben. Dann existiert ein Minimierer $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}$ von (2.1).

Beweis. Wir beweisen das Theorem unter vereinfachten Annahmen. Dazu sei $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ und

- (A1+) $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$ ist konvex für alle $x \in \bar{\Omega}$;
 (A2+) es existieren $p > 1$ und $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, sodass
 $f(x, u, \xi) \geq \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_3$, $\forall (x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;
 (A3) es existiert eine Konstante $\beta \geq 0$, sodass für alle $(x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gilt
 $|f_u(x, u, \xi)|, |f_\xi(x, u, \xi)| \leq \beta (1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1})$,
 wobei $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$, $f_\xi = (f_{\xi_1}, \dots, f_{\xi_n})$ mit $f_{\xi_i} = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}$.

Mit diesen vereinfachten Annahmen können wir nun den Beweis mit den drei Schritten der direkten Methode führen.

Schritt 1: Kompaktheit

Wir wählen uns eine minimierende Folge $u_\nu \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ von (2.1). Dann haben wir also

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} I(u_\nu) = \inf \{I(u)\}.$$

Mit Annahme (A2+) existieren Konstanten $\alpha_1 > 0$ und $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, sodass

$$m + 1 \geq I(u_\nu) \stackrel{(A2+)}{\geq} \alpha_1 \|\nabla u_\nu\|_{L^p}^p - |\alpha_3| \text{meas } \Omega$$

für genügend großes ν . Daraus folgt wiederum, dass eine Konstante $\alpha_4 > 0$ existiert, für die

$$\|\nabla u_\nu\|_{L^p} \leq \alpha_4$$

gilt. Mit Hilfe der Poincaré-(Friedrichs-)Ungleichung (Theorem 2.7) können wir Konstanten $\alpha_5, \alpha_6 > 0$ finden, damit gilt

$$\alpha_4 \geq \|\nabla u_\nu\|_{L^p} \stackrel{\text{Poincaré-Ungl.}}{\geq} \alpha_5 \|u_\nu\|_{W^{1,p}} - \alpha_6 \|u_\nu\|_{W^{1,p}} \Rightarrow \|u_\nu\|_{W^{1,p}} \leq \alpha_7$$

mit $\alpha_7 > 0$. Wir folgern jetzt mit Beispiel 1.4.5 aus [D04](#), dass eine schwach konvergente Teilfolge, die wir wieder mit u_ν bezeichnen, existiert. Das heißt

$$u_\nu \rightharpoonup \bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \text{ in } W^{1,p} \text{ für } \nu \rightarrow \infty.$$

Schritt 2: Schwache Unterhalbstetigkeit

Da f konvex ist und in C^1 liegt, gilt

$$f(x, u_\nu, \nabla u_\nu) \geq f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) + f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})(u_\nu - \bar{u}) + \langle f_\xi(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}); \nabla u_\nu - \nabla \bar{u} \rangle. \quad (2.2)$$

Mit (A3) und $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})|^{p'} dx &\stackrel{(A3)}{\leq} \beta^{p'} \int_{\Omega} \left(1 + |\bar{u}|^{p-1} + |\nabla \bar{u}|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx \\ &\stackrel{\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)}{\leq} \beta_1 \left(1 + \|\bar{u}\|_{W^{1,p}}^p\right) < \infty, \end{aligned}$$

wobei β_1 eine Konstante ist und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Damit haben wir bewiesen, dass

$$f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \in L^{p'}(\Omega) \quad (2.3)$$

und können analog beweisen, dass

$$f_\xi(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^n). \quad (2.4)$$

Benutzen wir nun die letzten beiden Aussagen (2.3) und (2.4) und wenden die Hölder-Ungleichung an, so folgt für $u_\nu \in W^{1,p}$

$$f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})(u_\nu - \bar{u}), \langle f_\xi(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}); \nabla u_\nu - \nabla \bar{u} \rangle \in L^1(\Omega).$$

Kommen wir jetzt auf die Ungleichung (2.2) zurück, so folgt mit Integrieren

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, u_\nu, \nabla u_\nu) dx &\geq \int_{\Omega} f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) dx + \underbrace{\int_{\Omega} f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})(u_\nu - \bar{u}) dx}_{=0 \text{ für } \nu \rightarrow \infty} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega} \langle f_\xi(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}); \nabla u_\nu - \nabla \bar{u} \rangle dx}_{=0 \text{ für } \nu \rightarrow \infty} \\ &\Rightarrow \liminf_{\nu \rightarrow \infty} I(u_\nu) \geq I(\bar{u}). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von $u_\nu - \bar{u} \rightarrow 0$ in $W^{1,p}$, das heißt $u_\nu - \bar{u} \rightarrow 0$ in L^p und $\nabla u_\nu - \nabla \bar{u} \rightarrow 0$ in L^p und mit Hilfe von (2.3) und (2.4) folgern wir mit der Definition der schwachen Konvergenz in L^p das Verschwinden der beiden Integralterme im Limes. Insgesamt folgt damit

$$u_\nu \rightharpoonup \bar{u} \text{ in } W^{1,p} \Rightarrow \liminf_{\nu \rightarrow \infty} I(u_\nu) \geq I(\bar{u}),$$

also die schwache Unterhalbstetigkeit von I .

Schritt 3: Folgerung der Existenz

Bringen wir nun die vorherigen zwei Schritte zusammen, so können wir direkt die Existenz eines Minimierers von (2.1) folgern. Wir wissen aus Schritt 1, dass u_ν eine minimierende Folge ist. Zudem haben wir herausgefunden, dass eine Teilfolge u_ν existiert, die schwach gegen einen Grenzwert \bar{u} konvergiert. Dieser Grenzwert ist, aufgrund der im vorherigen Schritt bewiesenen schwachen Unterhalbstetigkeit und der minimierenden Eigenschaft der Folge u_ν , ein Minimierer von unserem Problem (2.1). Es folgt also insgesamt

$$I(\bar{u}) = \inf \{I(u)\}.$$

□

2.3 Physikalische Motivation

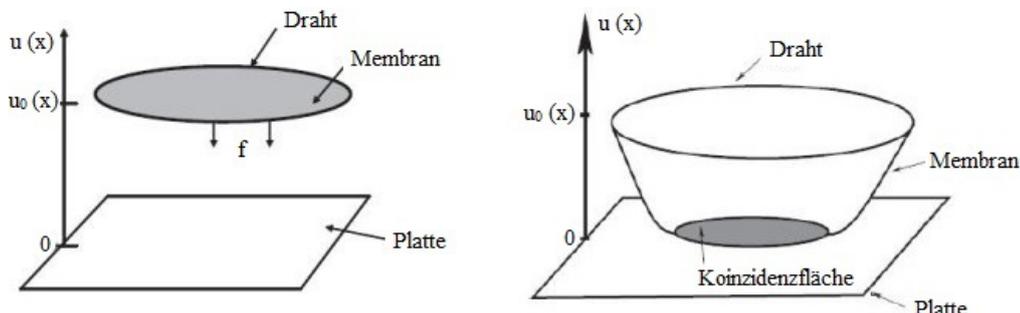


Abbildung 1 Elastische Membran über einer Platte als Hindernis. (aus [K07])

Physikalisch können wir uns das Hindernisproblem im dreidimensionalen Raum anhand eines Drahtes und einer elastischen Membran leicht verdeutlichen (siehe Abbildung 1). Wir nehmen uns den Draht, an dem die elastische Membran hängt. Den Draht halten wir waagrecht, sodass die Membran durch die auf sie in vertikaler Richtung wirkenden Kräfte nach unten gezogen wird. Die Membran hängt somit frei durch. Nehmen wir jetzt zusätzlich an, dass wir ein Hindernis, zum Beispiel eine Platte, unter der Membran halten. Dann sehen wir unter der Voraussetzung, dass wir die Platte hoch genug, aber immer noch unterhalb des Drahtes halten, dass die Verformung der Membran durch das Hindernis begrenzt wird. Die Membran liegt jetzt also auf der Platte auf. Wir bekommen eine *Kontaktfläche* zwischen Membran und Platte. Diese wird auch *Koinzidenzfläche* genannt. Der Rand der Koinzidenzfläche wird als *freier Rand* des Hindernisproblems bezeichnet.

2.4 Mathematische Formulierung

Nach der physikalischen Betrachtung des Hindernisproblems versuchen wir nun das Problem ins Mathematische zu übersetzen. Die elastische Membran können wir durch die Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ darstellen. Da die Membran fest am Rand an dem Draht fixiert ist, haben wir $u(x) = u_0(x)$ für $x \in \partial\Omega$ mit einer Funktion $u_0 : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Die auf die Membran wirkenden Kräfte stellen wir mit Hilfe der Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dar. Mit ihr können wir bestimmen wie stark die Kräfte von unten in vertikaler Richtung wirken. Durch das zunehmende Durchhängen der Membran wird die Oberfläche der Membran vergrößert. Dafür muss Energie aufgewendet werden. Die potentielle Energie ergibt sich dann bis auf eine additive Konstante durch

$$\int_{\Omega} \left[\lambda \left(\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - 1 \right) - fu \right] dx. \quad (2.5)$$

Die elastische Deformationsenergie wird dabei durch die Elastizitätskonstante $\lambda > 0$ beschrieben. Die durch die äußeren Kräfte verrichtete Arbeit wird physikalisch durch die

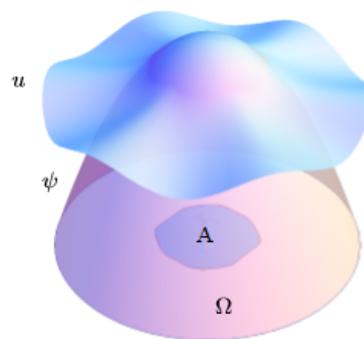


Abbildung 2 Eine elastische Membran auf ein Hindernis ψ . (aus [PSU12])

Formel $\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg}$ erzeugt. Mathematisch gesehen beschreibt der Term $\int_{\Omega} fu \, dx$ die Arbeit. Nehmen wir nun an, dass $|\nabla u|$ klein ist. So können wir auf den Term $\sqrt{1+y}$ Taylorentwicklung im Punkt $y_0 = 0$ anwenden. Dann folgt nach Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung

$$\sqrt{1+y} \approx \sqrt{1+0} + \frac{1}{2\sqrt{1+0}}(y-0) = 1 + \frac{1}{2}y.$$

Setzen wir dann $y = |\nabla u|^2$ und betrachten den gesamten Term (2.5) nach der Taylorentwicklung, so folgt für die potentielle Energie

$$\int_{\Omega} \left[\lambda \left(1 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - 1 \right) - fu \right] dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} |\nabla u|^2 - fu \right) dx.$$

Da in der Natur Zustände minimaler potentieller Energie vorkommen, haben wir das Minimierungsproblem

$$\min \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} |\nabla u|^2 - fu \right) dx \mid u \in V \right\} \quad (2.6)$$

mit $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = u_0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ gegeben.

Bis hier haben wir das Hindernis außen vor gelassen. In unserem physikalischen Modell ist die Bewegung der Membran aber nach unten durch ein Hindernis, die Platte, eingeschränkt. Das Hindernis kann durch die Funktion $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben werden. An dieser Stelle ist zu bemerken, dass bei der physikalischen Betrachtung für das Hindernis $\psi = 0$ gilt. Dies können wir in Abbildung 1 erkennen, da die Platte sich in der Nullebene befindet. Den Fall, dass $\psi = 0$ gilt, werden wir in einem späteren Abschnitt dieser Arbeit noch betrachten. An dieser Stelle möchten wir das Hindernisproblem noch etwas allgemeiner betrachten. Daher muss für das Hindernis nicht $\psi = 0$ gelten, wie es in Abbildung 2 dargestellt ist. Dazu geben wir nun fünf verschiedene Formulierungen an.

Minimierungsproblem

Für unser Minimierungsproblem (2.6) ergibt sich somit, da die Membran immer oberhalb des Hindernisses liegen muss, die zusätzliche Bedingung $u \geq \psi$. Damit folgt

$$\min \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} |\nabla u|^2 - fu \right) dx \mid u \in V \text{ und } u \geq \psi \right\}. \quad (2.7)$$

Dabei sei $\psi \in L^2(\Omega)$ vorausgesetzt. Die zulässigen Funktionen sind in der Menge

$$K = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = u_0 \text{ auf } \partial\Omega \text{ und } v \geq \psi \right\}$$

enthalten, wobei durch $u_0 \in H^1(\Omega)$ die Randwerte definiert werden und $u_0 \geq \psi$ vorausgesetzt sei.

Bemerkung 2.9. Die Menge K ist konvex und abgeschlossen.

Da wir diese Eigenschaften gleich benötigen werden, möchten wir sie beweisen.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Konvexität und anschließend die Abgeschlossenheit der Menge K .

Konvexität: Seien $u, v \in K$, so gilt $u, v \geq \psi$. Damit folgt auch $\lambda v + (1 - \lambda)u \geq \psi$ für alle $\lambda \in [0, 1]$ und $\lambda v + (1 - \lambda)u = u_0$ auf $\partial\Omega$ ist klar.

Abgeschlossenheit: Sei $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K mit $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$ bezüglich der $H^1(\Omega)$ -Norm. Nach Korollar 2.17 auf Seite 30 aus [AF03] gibt es dann eine Teilfolge v_n , die fast überall punktweise gegen $v \in H^1(\Omega)$ konvergiert. Sei A_n die Nullmenge, auf der $v_n \geq \psi$ nicht gilt und A die Nullmenge, auf der v_n nicht punktweise gegen v konvergiert, dann gilt $v_n \geq \psi$ auf $\Omega \setminus N$ mit $N := A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Also gilt auch $v \geq \psi$ auf $\Omega \setminus N$. Insgesamt folgt dann, da N als abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine solche ist, dass K abgeschlossen ist. \square

Variationsungleichung

Wir haben im Weiteren das Energiefunktional

$$E(v) := \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} |\nabla v|^2 - f v \right) dx$$

gegeben. Sei $u \in K$ ein absolutes Minimum von diesem Energiefunktional auf K , so gilt also

$$E(u) = \min_{v \in K} E(v).$$

Nach Bemerkung 2.9 ist K konvex. Daher folgt nach Definition von konvexen Mengen, dass für alle $u, v \in K$ und $\epsilon \in [0, 1]$ gilt, dass $\epsilon v + (1 - \epsilon)u = \epsilon v + u - \epsilon u = u + \epsilon(v - u) \in K$. Da $u \in K$ ein absolutes Minimum von E auf K ist, gilt $E(u + \epsilon(v - u)) \geq E(u)$, das heißt für $\epsilon = 0$ gilt Gleichheit und somit für alle $v \in K$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{d}{d\epsilon} E(u + \epsilon(v - u)) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} |\nabla(u + \epsilon(v - u))|^2 - f(u + \epsilon(v - u)) \right) dx \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} |\nabla u + \nabla \epsilon(v - u)|^2 - f(u + \epsilon(v - u)) \right) dx \Big|_{\epsilon=0} \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} 2(\nabla u + \nabla \epsilon(v - u)) \cdot \nabla(v - u) - f(v - u) \right) dx \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{\Omega} (\lambda \nabla u \cdot \nabla(v - u) + \lambda \nabla \epsilon(v - u) \cdot \nabla(v - u) \\ &\quad - f(v - u)) dx \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{\Omega} (\lambda \nabla u \cdot \nabla(v - u) - f(v - u)) dx. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ist diese Ungleichung (2.8) für alle $v \in K$ erfüllt, so nennen wir $u \in K$ Lösung der *Variationsungleichung*.

Lemma 2.10. Es sei $\lambda \geq 0$. Dann sind die absoluten Minima von E auf K genau die Lösung der Variationsungleichung (2.8) von E auf K .

Beweis. Wir haben gerade eben schon gezeigt, dass, wenn ein absolutes Minimum $u \in K$ existiert, sodass $E(u) = \min_{v \in K} E(v)$, dann ist u eine Lösung der Variationsungleichung (2.8).

Ist nun umgekehrt $u \in K$ Lösung der Variationsungleichung, dann gilt für alle $v \in K$

$$\begin{aligned}
E(v) &= \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} |\nabla v|^2 - f v \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} |\nabla u|^2 - f u + \lambda \nabla u \nabla v - \lambda |\nabla u|^2 - f v + f u + \frac{\lambda}{2} |\nabla v|^2 - \lambda \nabla v \nabla u \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda}{2} |\nabla u|^2 \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} |\nabla u|^2 - f u + \lambda \nabla u \cdot \nabla(v - u) - f(v - u) + \frac{\lambda}{2} |\nabla(v - u)|^2 \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} |\nabla u|^2 - f u \right) dx + \int_{\Omega} (\lambda \nabla u \cdot \nabla(v - u) - f(v - u)) dx + \int_{\Omega} \frac{\lambda}{2} |\nabla(v - u)|^2 dx \\
&= E(u) + \int_{\Omega} (\lambda \nabla u \cdot \nabla(v - u) - f(v - u)) dx + \int_{\Omega} \frac{\lambda}{2} |\nabla(v - u)|^2 dx \\
&\geq E(u) + \int_{\Omega} \frac{\lambda}{2} |\nabla(v - u)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Da $\lambda \geq 0$ ist, ist $\int_{\Omega} \frac{\lambda}{2} |\nabla(v - u)|^2 dx \geq 0$, also folgt insgesamt $E(v) \geq E(u)$ für alle $v \in K$. \square

Komplementaritätsproblem

Seien λ_0 und λ_1 Konstanten für die $0 < \lambda_0 \leq \lambda(x) < \lambda_1 < \infty$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Diese Bedingung und die Existenz der beiden Konstanten setzen wir im Folgenden voraus. Wenn die Lösungen u der Variationsungleichung (2.8) in $H^2(\Omega)$ liegen, erhalten wir aus der Variationsungleichung mit partieller Integration und aufgrund derselben Randbedingungen von u und v

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega} (\lambda \nabla u \cdot \nabla(v - u) - f(v - u)) dx = \int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla(v - u) dx - \int_{\Omega} f(v - u) dx \\
&\stackrel{\text{p.I.}}{=} \int_{\partial\Omega} \underbrace{\lambda \nabla u \cdot (v - u)}_{=0 \text{ auf } \partial\Omega} dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\lambda \nabla u)(v - u) dx \\
&\quad - \int_{\Omega} f(v - u) dx \\
&= \int_{\Omega} -[\nabla \cdot (\lambda \nabla u) + f](v - u) dx \\
&\Rightarrow 0 \leq \int_{\Omega} -[\nabla \cdot (\lambda \nabla u) + f](v - u) dx \\
&\Leftrightarrow 0 \geq \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\lambda \nabla u) + f](v - u) dx \quad \text{für alle } v \in K.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Damit die Lösungen u von (2.8) tatsächlich in $H^2(\Omega)$ liegen, müssen λ , f , ψ , u_0 und $\partial\Omega$ geeignet glatt sein. Für $v = u + \zeta \in K$ in (2.9) mit $\zeta \in C_0^\infty$ und $\zeta \geq 0$ beliebig, erhalten wir

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (\lambda \nabla u) + f](u + \zeta - u) dx = \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\lambda \nabla u) + f] \cdot \zeta dx \leq 0 \quad \text{für alle } \zeta \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \zeta \geq 0$$

und damit

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla u) + f \leq 0 \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Nehmen wir nun an, dass ζ einen Träger hat, der ganz in der Menge

$$N := \{x \in \Omega \mid u(x) > \psi(x)\}$$

liegt, also $\zeta \in C_0^\infty(N)$. Die Menge N ist offen, falls u und ψ stetig sind, das heißt $\psi, u \in C^1(\Omega)$. Dann liegen die Funktionen $v = u \pm \epsilon \zeta$ unter der Voraussetzung, dass ϵ klein genug ist, in K . Also können wir diese v wieder in (2.9) einsetzen und erhalten

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (\lambda \nabla u) + f](u \pm \epsilon \zeta - u) \, dx = \pm \epsilon \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\lambda \nabla u) + f] \cdot \zeta \, dx \leq 0 \quad \text{für alle } \zeta \in C_0^\infty(N)$$

und somit, da $\zeta \in C_0^\infty(N)$ beliebig gewählt werden kann,

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla u) + f = 0 \quad \text{in } N.$$

Damit erfüllt also eine Lösung $u \in H^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ von der Variationsungleichung (2.8) auch

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (\lambda \nabla u) + f &\leq 0 \\ u &\geq \psi \\ (\nabla \cdot (\lambda u) + f)(u - \psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ in } \Omega \quad (2.10)$$

$$u = u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Für geeignet glatte f, u_0, ψ liegen die Lösungen der Variationsungleichung in $C^1(\Omega)$. Dann folgt $u = \psi$ und $\nabla u = \nabla \psi$ auf der Menge

$$A := \Omega \setminus N = \{x \in \Omega \mid u(x) = \psi(x)\}.$$

Besitzt

$$\Gamma := \partial N \cap \partial A$$

eine Normale n , so folgt weiter

$$u = \psi, \quad \lambda \nabla u \cdot n = \lambda \nabla \psi \cdot n \quad \text{auf } \Gamma. \quad (2.11)$$

Insgesamt können wir also mit (2.10) und (2.11) das Hindernisproblem als *Komplementaritätsformulierung*

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (\lambda \nabla u) + f &\leq 0 \\ u &\geq \psi \\ (\nabla \cdot (\lambda u) + f)(u - \psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{in } \Omega,$$

$$u = u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$u = \psi \quad \text{auf } \Gamma,$$

$$\lambda \nabla u \cdot n = \lambda \nabla \psi \cdot n \quad \text{auf } \Gamma$$

schreiben. Unsere oben definierte Menge $A := \Omega \setminus N$ wird, wie schon in Kapitel 2.3 angedeutet, *Kontaktmenge*, *Koinzidenzmenge* oder auch *aktive Menge* genannt. Die letzte Bezeichnung ergibt sich aus der Aktivität des Hindernisses in der Menge A . Folglich nennen

wir die Menge N *inaktive*, das heißt „*nicht aktive*“ Menge. Wir bezeichnen den gemeinsamen Rand $\Gamma = \partial N \cap \partial A$ von N und A als *freien Rand*, da Γ a priori unbekannt ist.

mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren

Mit Hilfe eines sogenannten *Lagrange-Multiplikator* $\mu \in L^2(\Omega)$ kann das Hindernisproblem auf eine weitere Art dargestellt werden. Dieser ist definiert durch

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in N, \\ -\nabla \cdot (\lambda(x)\nabla u(x)) - f(x) & \text{falls } x \in A. \end{cases}$$

Unter Verwendung des Lagrange-Multiplikators lassen sich die ersten drei Bedingungen in der Komplementaritätsformulierung umformulieren:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (\lambda \nabla u) + f + \mu &= 0 \\ u &\geq \psi \\ \mu &\geq 0 \\ \mu(u - \psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ in } \Omega.$$

Problem mit freiem Rand

Zudem lässt sich das Hindernisproblem auch als *Problem mit freiem Rand* für den Operator $\nabla \cdot (\lambda \nabla u)$ formulieren. Solch ein Problem mit freiem Rand erhalten wir, wenn ein Gebiet und damit dessen Rand a priori unbekannt sind. In diesem Fall suchen wir also ein Gebiet $N \subset \Omega$, einen freien Rand $\Gamma = \partial N \cap \Omega$ und eine Funktion $u : N \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\lambda \nabla u) + f &= 0 && \text{in } N, \\ u &= u_0 && \text{auf } \partial \Omega \cap \bar{N}, \\ u = \psi, \lambda \nabla u \cdot n &= \lambda \nabla \psi \cdot n && \text{auf } \Gamma, \\ u &\geq \psi && \text{in } N, \\ \nabla \cdot (\lambda \nabla \psi) + f &\leq 0 && \text{in } \Omega \setminus N. \end{aligned}$$

Wir haben jetzt fünf mathematische Formulierungen des Hindernisproblems kennengelernt. Um diese mathematischen Formulierungen und Definitionen besser zu verstehen, erstellen wir ein Beispiel für ein Hindernisproblem. Wir betrachten dazu ein Minimierungsproblem für $\Omega = (-1, 1)$.

Beispiel 2.11. Sei also das Minimierungsproblem

$$\inf \left\{ \int_{-1}^1 ((u')^2 + 2u) \, dx \mid u \in H^1(-1, 1), u \geq 0, u(-1) = a, u(1) = b \right\} \quad (2.12)$$

gegeben. Für das Hindernis gilt $\psi = 0$, sodass die Bedingung $u \geq 0$ gegeben ist. Dieses Minimierungsproblem hängt von a und b ab, sodass wir die aktive und die inaktive Menge sowie den freien Rand in Abhängigkeit von a und b bestimmen müssen. Dies können wir mit Hilfe einer Fallunterscheidung machen.

1. Fall: Für unseren 1. Fall soll $u > \psi = 0$ in ganz $\Omega = (-1, 1)$ gelten. Das bedeutet,

dass die aktive Menge leer sein wird und die inaktive Menge den gesamten Definitionsbereich umfasst. Beginnen wir nun mit der Bestimmung der Lösung des Minimierungsproblems für unseren 1. Fall. Wir bilden dazu die Euler-Lagrange Gleichung von (2.12):

$$\frac{d}{dx}2u'(x) = 2 \Leftrightarrow 2u''(x) = 2 \Leftrightarrow u''(x) = 1 \Rightarrow u'(x) = x + c \Rightarrow u(x) = \frac{1}{2}x^2 + cx + d.$$

Um jetzt die Konstanten c und d herauszufinden, nutzen wir die Randbedingungen $u(-1) = a$ und $u(1) = b$:

$$\begin{aligned} u(-1) = a &\Leftrightarrow u(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = a \Leftrightarrow \frac{1}{2} - c + d = a \\ &\Leftrightarrow d = a + c - \frac{1}{2} \\ u(1) = b &\Leftrightarrow u(1) = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 + c \cdot (1) + a + c - \frac{1}{2} = b \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 2c + a - \frac{1}{2} = b \Leftrightarrow 2c = b - a \\ &\Leftrightarrow c = \frac{b - a}{2} \\ &\Rightarrow d = a + \frac{b - a}{2} - \frac{1}{2} = \frac{a + b}{2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Setzen wir $c = \frac{b - a}{2}$ und $d = \frac{a + b}{2} - \frac{1}{2}$ in $u(x)$ ein, so folgt

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{b - a}{2}x + \frac{a + b}{2} - \frac{1}{2}.$$

Da wir $u > 0$ als Voraussetzung dieses Falls annehmen, müssen wir uns überlegen, für welche Werte von a und b die Funktion $u(x)$ keine Nullstellen besitzt, sodass keine aktive Menge zustande kommt. Berechnen wir zunächst die Nullstellen der Funktion mit Hilfe der pq-Formel oder quadratischer Ergänzung, so erhalten wir die zwei Nullstellen

$$x_{1/2} = -\frac{b - a}{2} \pm \sqrt{\frac{(b - a)^2}{4} - a - b + 1}.$$

Wir erkennen schnell, dass es keine Nullstellen gibt, wenn der Term unter der Wurzel negativ ist. Es soll also

$$\underbrace{\frac{(b - a)^2}{4}}_{\geq 0} - a - b + 1 < 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{(b - a)^2}{4} + 1}_{\geq 1} < a + b$$

gelten. Hieraus folgt, dass es nur dann keine Nullstellen und somit keine aktive Menge geben kann, wenn $a + b > 1$ gilt. Für unseren 1. Fall gilt dann unter der Voraussetzung, dass $a + b > 1$:

$$A = \emptyset, \quad N = (-1, 1) = \Omega, \quad \Gamma = \partial A \cap \partial N = \partial \emptyset \cap \partial(-1, 1) = \emptyset.$$

Da $A = \emptyset$ gilt, ist der Lagrange-Multiplikator gegeben durch

$$\mu(x) = 0 \quad \text{für } x \in (-1, 1).$$

Um den 1. Fall zu verdeutlichen, ist in Abbildung 3 auf der folgenden Seite ein mögliches Beispiel eines Graphen dargestellt.

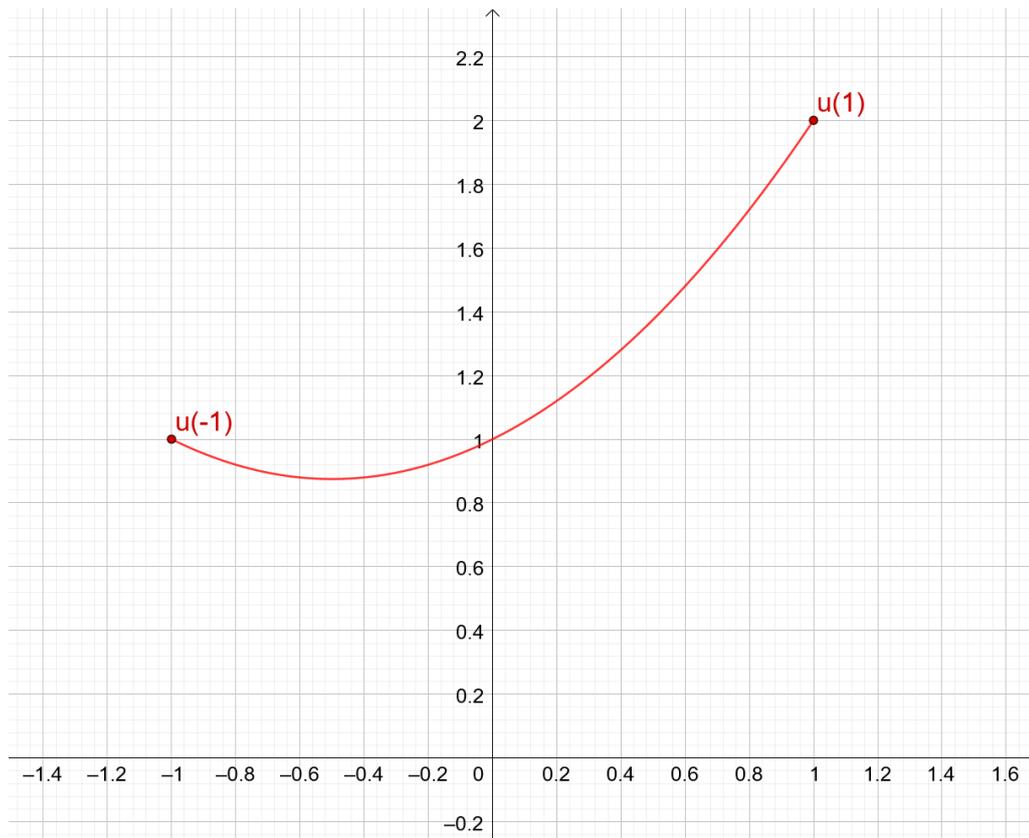


Abbildung 3 Lösung des Minimierungsproblems für den 1. Fall mit $a = 1$ und $b = 2$.

2. Fall: Für den 2. Fall soll $u \geq \psi = 0$ gelten. Wir möchten in diesem Fall eine aktive und inaktive Menge angeben können. Die Euler-Lagrange Gleichung von (2.12) ist dieselbe wie im 1. Fall. Anders als im 1. Fall müssen wir jetzt unsere Lösung in Teilen bestimmen. Das heißt, dass wir zunächst die Lösung links und danach rechts von der aktiven Menge bestimmen.

1. Teil: Für den 1. Teil haben wir dann als Randbedingungen $u(-1) = a$ und $u(x_1) = 0$ gegeben, wobei $x_1 \in (-1, 1)$ eine Nullstelle von u ist. Da wir im 1. Fall die Rechnungen genauer angegeben haben, verzichten wir in diesem Fall darauf, da sie analog sind. Wir erhalten dann

$$u(-1) = a \Leftrightarrow d = a + c - \frac{1}{2}, \quad u(x_1) = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{x_1^2 + 2a - 1}{2(x_1 + 1)}.$$

Um x_1 herauszubekommen, nutzen wir aus, dass $u \in C^1(\Omega)$ für geeignet glatte f , u_0 und ψ , sodass $u'(x_1) = 0$ gilt. Damit folgt

$$u'(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 + c = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 + 1 - 2a = 0 \stackrel{\text{pq-Formel}}{\Leftrightarrow} \text{o. quadr. Erg.} \quad x_1 = -1 \pm \sqrt{2a}.$$

Da $-1 - \sqrt{2a} \leq -1$, aber $x_1 \in (-1, 1)$, kann $x_1 = -1 - \sqrt{2a}$ nicht in Frage kommen. Also bleibt nur noch $x_1 = -1 + \sqrt{2a} \geq -1$ als Lösung. Damit hier $x_1 \in (-1, 1)$ gilt, muss

$0 < a < 2$ gelten. Insgesamt erhalten wir für c , d und somit für die Lösung u

$$c = -\frac{(\sqrt{2a}-1)^2 - 1 + 2a}{2(\sqrt{2a}-1+1)} = 1 - \sqrt{2a}, \quad d = a + 1 - \sqrt{2a} - \frac{1}{2} = a - \sqrt{2a} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{2}x^2 + (1 - \sqrt{2a})x + a - \sqrt{2a} + \frac{1}{2}.$$

2. Teil: Im 2. Teil betrachten wir die Lösung rechts von der aktiven Menge. Wir gehen dazu wie im 1. Fall vor. Wir haben in diesem Teil als Randbedingungen $u(1) = b$ und $u(x_2) = 0$ gegeben. $x_2 \in (-1, 1)$ ist wieder eine Nullstelle von u , für die zusätzlich $x_1 < x_2$ gelten soll. Durch Einsetzen der Randbedingungen erhalten wir

$$u(1) = b \Leftrightarrow d = b - c - \frac{1}{2}, \quad u(x_2) = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{x_2^2 + 2b - 1}{2(x_2 - 1)}.$$

Nun können wir, wie im 1. Teil x_2 bestimmen:

$$u'(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \pm \sqrt{2b}.$$

Hier können wir dieses Mal aufgrund der Voraussetzung $x_2 \in (-1, 1)$, $1 + \sqrt{2b} \geq 1$ als Lösung für x_2 ausschließen. Als Lösung bleibt dann $x_2 = 1 - \sqrt{2b}$ für $0 < b < 2$. Schlussendlich ergeben c , d und u dann eingesetzt mit x_2

$$c = \sqrt{2b} - 1, \quad d = b - \sqrt{2b} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{2}x^2 + (\sqrt{2b} - 1)x + b - \sqrt{2b} + \frac{1}{2}.$$

Für unseren 2. Fall folgt für feste a und b mit $0 < a, b < 2$

$$A = \left\{ x \in \left[-1 + \sqrt{2a}, 1 - \sqrt{2b} \right] \mid -1 + \sqrt{2a} \leq 1 - \sqrt{2b} \right\},$$

$$N = \left\{ -1 < x \leq -1 + \sqrt{2a} \vee 1 - \sqrt{2b} \leq x < 1 \mid -1 + \sqrt{2a} \leq 1 - \sqrt{2b} \right\},$$

$$\Gamma = \left\{ -1 + \sqrt{2a}, 1 - \sqrt{2b} \right\},$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in N, \\ -\nabla \cdot (2\nabla u(x)) + 2 & \text{falls } x \in A. \end{cases}$$

Um den 2. Fall anschaulicher zu gestalten, wählen wir $a = 0,18$ und $b = 0,32$. Dazu erstellen wir einen Graphen. Dieser ist in Abbildung 4 auf der folgenden Seite dargestellt. Die aktive, die inaktive Menge und der freie Rand sind dann

$$A = [-0,4, 0,2], \quad N = \{-1 < x < -0,4 \vee 0,2 < x < 1\}, \quad \Gamma = \{-0,4, 0,2\}.$$

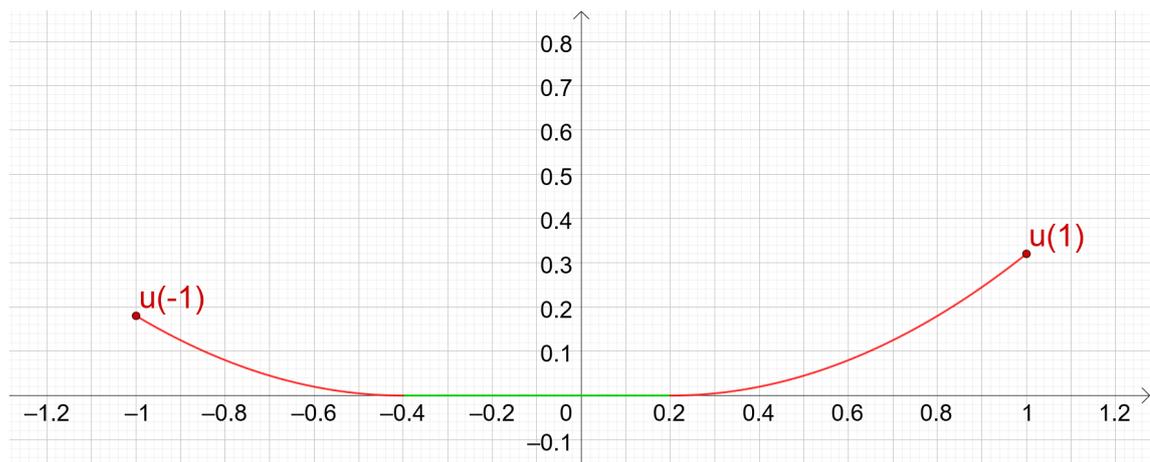


Abbildung 4 Lösung des Minimierungsproblems für den 2. Fall mit $a = 0,18$ und $b = 0,32$. Die aktive Menge ist grün und die inaktive Menge rot gekennzeichnet.

3 Hauptteil

3.1 Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

Eindeutigkeit

Wir beginnen mit dem Beweis der Eindeutigkeit einer Lösung des Hindernisproblems. Dafür gebrauchen wir die Variationsungleichung (2.8).

Theorem 3.1. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dann besitzt die Variationsungleichung

$$u \in K : 0 \leq \int_{\Omega} (\lambda \nabla u \cdot \nabla(v - u) - f(v - u)) \, dx \quad \forall v \in K$$

eine eindeutige Lösung.

Beweis. Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen. Setze $v = u_2$ in die Variationsungleichung (2.8) mit Lösung u_1 :

$$0 \leq \int_{\Omega} (\lambda \nabla u_1 \cdot \nabla(u_2 - u_1) - f(u_2 - u_1)) \, dx$$

und umgekehrt $v = u_1$ in die Variationsungleichung mit Lösung u_2 ein:

$$0 \leq \int_{\Omega} (\lambda \nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2) - f(u_1 - u_2)) \, dx.$$

Insgesamt erhalten wir durch Addition der beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} (\lambda \nabla u_1 \cdot \nabla(u_2 - u_1) + \lambda \nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2) - f(u_2 - u_1) - f(u_1 - u_2)) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (\lambda \nabla u_1 \cdot \nabla(u_2 - u_1) + \lambda \nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2) - \underbrace{f(u_2) + f(u_1) - f(u_1) + f(u_2)}_{=0}) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (\lambda \nabla u_1 \cdot \nabla(u_2 - u_1) + \lambda \nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2)) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (\lambda \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 - \lambda |\nabla u_1|^2 + \lambda \nabla u_2 \cdot \nabla u_1 - \lambda |\nabla u_2|^2) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \lambda (-|\nabla u_1|^2 + 2 \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 - |\nabla u_2|^2) \, dx \\ &\stackrel{2. \text{ bin. Formel}}{=} - \int_{\Omega} \lambda |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Da $\lambda(x) \geq \lambda_0(x) > 0$ und $|\nabla(u_1 - u_2)|^2 \geq 0$, muss $\nabla(u_1 - u_2) = 0$ sein, also $\nabla u_1 = \nabla u_2$ in Ω , damit die Ungleichung erfüllt ist. Da wir aber auch wissen, dass u_1 und u_2 auf dem Rand von Ω dieselben Werte annehmen, folgt schon $u_1 = u_2$. Damit ist die Eindeutigkeit einer Lösung gezeigt. \square

Existenz

Um die Existenz von Lösungen des Hindernisproblems zu zeigen, nutzen wir die direkte Methode der Variationsrechnung. Der Beweis der Existenz ist im Gegensatz zu dem der Eindeutigkeit umfangreicher. Grundlage dafür ist das Kapitel 2 des Buches [KS80] von David Kinderlehrer und Guido Stampacchia und die auf dem Buch basierende Seminararbeit [R12]. Wir werden zunächst die Existenz von Lösungen für Variationsungleichungen

allgemein zeigen. Danach lässt sich dann unser Hindernisproblem direkt auf den allgemeinen Fall anwenden und die Existenz von Lösungen folgt direkt. Zunächst müssen wir dazu Bilinearformen in einem reellen Hilbertraum H betrachten, das heißt wir schreiben $a(u, v - u) := \int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx$, wobei $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ und $\langle f, v - u \rangle := \int_{\Omega} f(v - u) dx$. Wir betrachten das Problem

Problem 3.2. Sei $K \subset H$ abgeschlossen und konvex und sei $f \in H'$, wobei H' der (topologische) Dualraum von H ist. Finde

$$u \in K : a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K.$$

Um die Existenz einer Lösung von Problem 3.2 zu zeigen, müssen wir die Bilinearform $a(u, v)$, die wir als koerziv voraussetzen, in einen symmetrischen und antisymmetrischen Teil aufteilen. Haben wir dann eine Lösung des symmetrischen Teils gefunden, so können wir eine Lösung für unser Problem mit der Bilinearform a erzeugen. Sei also

$$a_0(u, v) = \frac{1}{2}(a(u, v) + a(v, u))$$

der symmetrische Teil, da $a_0(u, v) = a_0(v, u)$ gilt und

$$b(u, v) = \frac{1}{2}(a(u, v) - a(v, u))$$

der antisymmetrische Teil von a , wobei $b(u, v) = -b(v, u)$ gilt. Wir definieren dann die Bilinearform

$$a_t(u, v) = a_0(u, v) + tb(u, v) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1. \quad (3.1)$$

Diese ist koerziv mit der selben Konstante $\alpha > 0$ wie a .

Beweis.

$$\begin{aligned} a_t(u, u) &= a_0(u, u) + tb(u, u) \\ &= \frac{1}{2}(a(u, u) + a(u, u)) + t\frac{1}{2}(a(u, u) - a(u, u)) \\ &= \frac{1}{2}2a(u, u) + t\frac{1}{2}0 \\ &= a(u, u) \\ &\stackrel{a \text{ koerziv}}{\geq} \alpha \|u\|^2 \quad \text{für } u \in H. \end{aligned}$$

Hieraus sehen wir also, dass a_t koerziv ist mit der selben Konstante $\alpha > 0$ wie a . \square

Lemma 3.3. Sei H ein Hilbertraum, $K \subset H$ abgeschlossen und konvex und sei H' der Dualraum von H . Zudem sei $a(u, v)$ eine koerzive Bilinearform und $f \in H'$. Wenn eine Lösung des Problems 3.2 existiert, dann ist die Abbildung $Q : H' \rightarrow K$, $f \mapsto u$, die einem gegebenen $f \in H'$ die Lösung des zugehörigen Hindernisproblems zuweist, Lipschitz-stetig. Das heißt wenn u_1 und u_2 Lösungen des Problems 3.2 zu den entsprechenden Funktionen f_1 und f_2 sind, dann gilt

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\|_{H'} \quad \text{mit } \alpha > 0. \quad (3.2)$$

Beweis. Der Beweis von (3.2) beinhaltet den Beweis der Eindeutigkeit von Lösungen, also von Theorem 3.1, mit Bilinearformen. Seien also $u_1, u_2 \in H$ zwei Lösungen, sodass

$$\begin{aligned} a(u_1, v - u_1) &\geq \langle f_1, v - u_1 \rangle \quad \text{für alle } v \in K \\ a(u_2, v - u_2) &\geq \langle f_2, v - u_2 \rangle \quad \text{für alle } v \in K \end{aligned}$$

gelten. Dann setzen wir wieder $v = u_2$ in die Variationsungleichung mit Lösung u_1 und $v = u_1$ in die mit Lösung u_2 und addieren die Ungleichungen dann wieder:

$$\begin{aligned} a(u_1, u_2 - u_1) &\geq \langle f_1, u_2 - u_1 \rangle \Leftrightarrow a(u_1, u_1 - u_2) \leq \langle f_1, u_1 - u_2 \rangle \\ a(u_2, u_1 - u_2) &\geq \langle f_2, u_1 - u_2 \rangle \Leftrightarrow -a(u_2, u_1 - u_2) \leq -\langle f_2, u_1 - u_2 \rangle \\ \xrightarrow{\text{Addition}} & \\ a(\cdot, \cdot), \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ linear} & a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle. \end{aligned}$$

Nutzen wir nun noch die Koerzivität von a aus, so folgt

$$\begin{aligned} \alpha \|u_1 - u_2\|^2 &\leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \\ &\leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz Ungl.}}{\leq} \|f_1 - f_2\|_{H'} \cdot \|u_1 - u_2\| \\ \Rightarrow \|u_1 - u_2\| &\leq \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\|_{H'}. \end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung (3.2) bewiesen. \square

Lemma 3.4. Sei $a_t(u, v)$ eine koerzive Bilinearform mit Koerzivitätskonstante $\alpha > 0$. Zudem sei $K \subset H$ abgeschlossen und konvex. Ist das Problem 3.2 für $a_\tau(u, v)$ und für alle $f \in H'$ lösbar, so ist es auch lösbar für $a_t(u, v)$ und alle $f \in H'$, wobei $\tau \leq t \leq \tau + t_0$, $t_0 \leq \frac{\alpha}{M}$, und

$$M = \sup \frac{|b(u, v)|}{\|u\| \cdot \|v\|} < +\infty.$$

Beweis. Da $b(u, v)$ eine Bilinearform ist, gibt es eine Konstante $C > 0$, sodass $|b(u, v)| \leq C\|u\| \cdot \|v\|$. Dann gilt $M \leq \sup \frac{C\|u\| \cdot \|v\|}{\|u\| \cdot \|v\|} = C < +\infty$.

Definiere nun die Abbildung

$$\begin{aligned} T : H &\rightarrow K, \\ u &= Tw. \end{aligned}$$

Löse $u \in K$ das Problem 3.2 für a_τ und F_t , sodass

$$a_\tau(u, v - u) \geq \langle F_t, v - u \rangle \quad \text{für alle } v \in K, \quad (3.3)$$

wobei

$$\langle F_t, v \rangle = \langle f, v \rangle - (t - \tau)b(w, v) \quad \text{und } \tau \leq t \leq \tau + t_0. \quad (3.4)$$

Damit folgt, dass (3.3) und damit auch T wohldefiniert sind. Da wir mit vorherigem Lemma 3.3 wissen, dass $F_t \mapsto u$ Lipschitz-stetig ist, folgt mit gegebenen $u_1 = Tw_1$ und $u_2 = Tw_2$, $u_1 \neq u_2$, in (3.2)

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\| &\leq \frac{1}{\alpha} \|F_t(w_1) - F_t(w_2)\|_{H'} \\ &= \frac{1}{\alpha} (t - \tau) \sup_{v \in H} \frac{\|b(w_2, v) - b(w_1, v)\|}{\|v\|} \\ &= \frac{1}{\alpha} (t - \tau) \sup_{v \in H} \frac{\|b(w_2 - w_1, v)\|}{\|v\|} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} (t - \tau) \sup_{v \in H} \frac{\|b(w_2 - w_1, v)\|}{\|w_2 - w_1\| \cdot \|v\|} \|w_2 - w_1\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha}(t - \tau)M\|w_1 - w_2\| \\
&\leq \frac{1}{\alpha}t_0M\|w_1 - w_2\|.
\end{aligned}$$

Mit $\frac{t_0M}{\alpha} < 1$ folgt $\|u_1 - u_2\| < 1 \cdot \|w_1 - w_2\|$, also ist die Abbildung T eine Kontraktion. Zudem ist K nach Voraussetzung abgeschlossen. Nun können wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Mit diesem folgt, dass T einen eindeutig bestimmten Fixpunkt besitzt. Für diesen Fixpunkt $u = w$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\langle F_t, v - u \rangle &\stackrel{(3.4)}{=} \langle f, v - u \rangle - (t - \tau)b(u, v - u) \\
&= \langle f, v - u \rangle - (t - \tau)(b(u, v) - \underbrace{b(u, u)}_{=0}) \\
&= \langle f, v - u \rangle - (t - \tau)b(u, v).
\end{aligned}$$

Setzen wir dieses nun in (3.3) für $\langle F_t, v - u \rangle$, so folgt

$$\begin{aligned}
a_\tau(u, v - u) &\geq \langle f, v - u \rangle - (t - \tau)b(u, v) \\
\Leftrightarrow a_0(u, v - u) + \tau b(u, v - u) &\geq \langle f, v - u \rangle - tb(u, v) + \tau b(u, v) \\
\Leftrightarrow a_0(u, v - u) + \tau b(u, v) - \underbrace{\tau b(u, u)}_{=0} + tb(u, v) - \tau b(u, v) &\geq \langle f, v - u \rangle \\
\Leftrightarrow a_0(u, v - u) + tb(u, v) &\geq \langle f, v - u \rangle.
\end{aligned}$$

Mit Definition von $a_t(u, v - u)$ gilt damit insgesamt für jedes t mit $\tau \leq t \leq \tau + t_0$

$$u \in K : a_t(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \text{für } v \in K.$$

□

Mit Hilfe dieser Lemmata können wir nun die Existenz einer Lösung des Problems 3.2 in zwei Fällen zeigen.

Theorem 3.5. Sei $a(u, v)$ eine koerzive Bilinearform auf $H \times H$, $K \subset H$ abgeschlossen und konvex und sei $f \in H'$, dann existiert eine eindeutige Lösung des Problems 3.2.

Beweis. Wie schon erwähnt betrachten wir zwei Fälle: den, bei dem a symmetrisch ist und den allgemeinen Fall.

1. Fall: Wir nehmen zunächst an, dass $a(u, v)$ symmetrisch ist und definieren für $u \in H$ das Funktional

$$E(u) = a(u, u) - 2\langle f, u \rangle.$$

Um die Existenz einer Lösung zu zeigen, können wir nach den drei Schritte der direkten Methode von Kapitel 2.2 vorgehen.

Schritt 1: Kompaktheit

Sei $d = \inf_{u \in K} E(u)$, dann können wir $E(u)$ mit Hilfe der Koerzivität von a und der Youngsche

Ungleichung mit $b = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\|f\|_{H'}$, $c = \sqrt{\alpha}\|u\|_H$ mit $\alpha > 0$ und $p, q = 2$ abschätzen durch

$$\begin{aligned}
 E(u) &\stackrel{\text{Koerzivität}}{\geq} \alpha\|u\|^2 - 2\|f\|_{H'} \cdot \|u\|_H \\
 &= \alpha\|u\|^2 - 2\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\|f\|_{H'} \cdot \sqrt{\alpha}\|u\|_H \\
 &\stackrel{\text{Youngsche Ungl.}}{\geq} \alpha\|u\|^2 - \frac{1}{\alpha}\|f\|_{H'}^2 - \alpha\|u\|^2 \\
 &= -\frac{1}{\alpha}\|f\|_{H'}^2 \quad \text{mit } \alpha > 0.
 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$d = \inf_{u \in K} E(u) \geq -\frac{1}{\alpha}\|f\|_{H'}^2 > -\infty.$$

Sei nun (u_n) eine minimierende Folge in K , sodass

$$d \leq E(u_n) \leq d + \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir nutzen im Folgenden abermals die Koerzivität und zusätzlich die Bilinearität von a aus:

$$\begin{aligned}
 \alpha\|u_n - u_m\|^2 &\stackrel{\text{Koerzivitat}}{\leq} a(u_n - u_m, u_n - u_m) \\
 &= a(u_n, u_n) - a(u_n, u_m) - a(u_m, u_n) + a(u_m, u_m) \\
 &= 2a(u_n, u_n) - a(u_n, u_m) - a(u_n, u_m) - a(u_m, u_n) + 2a(u_m, u_m) \\
 &\quad - a(u_m, u_m) \\
 &= 2a(u_n, u_n) + 2a(u_m, u_m) - a(u_n, u_n + u_m) - a(u_m, u_n + u_m) \\
 &= 2a(u_n, u_n) + 2a(u_m, u_m) - a(u_n + u_m, u_n + u_m) \\
 &= 2a(u_n, u_n) + 2a(u_m, u_m) - 4a\left(\frac{1}{2}(u_n + u_m), \frac{1}{2}(u_n + u_m)\right) \\
 &= 2a(u_n, u_n) + 2a(u_m, u_m) - 4a\left(\frac{1}{2}(u_n + u_m), \frac{1}{2}(u_n + u_m)\right) \\
 &\quad \underbrace{-4\langle f, u_n \rangle - 4\langle f, u_m \rangle + 8\langle f, \frac{1}{2}(u_n + u_m) \rangle}_{=0, \text{ da } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ linear}} \\
 &= 2E(u_n) + 2E(u_m) - 4E\left(\frac{1}{2}(u_n + u_m)\right) \\
 &\leq 2d + \frac{2}{n} + 2d + \frac{2}{m} - 4d \\
 &= 2\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right].
 \end{aligned}$$

Also ist die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Da K abgeschlossen ist, gibt es ein Element $u \in K$, sodass

$$u_n \rightarrow u \text{ in } H \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Schritt 2: Schwache Unterhalbstetigkeit

Als Nächstes beweisen wir die schwache Unterhalbstetigkeit von E . Dazu müssen wir zeigen, dass $E(u_n) - E(u) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, wobei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die minimierende Folge in K aus Schritt 1 und $u \in K$ ist. Dafür nutzen wir, dass mit Schritt 1 $u_n \rightarrow u$ in H für $n \rightarrow \infty$

gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} E(u_n) - E(u) &= a(u_n, u_n) - 2\langle f, u_n \rangle - a(u, u) + 2\langle f, u \rangle \\ &= a(\underbrace{u_n}_{\rightarrow u}, \underbrace{u_n}_{\rightarrow u}) - 2\langle f, \underbrace{u_n}_{\rightarrow u} \rangle + 2\langle f, u \rangle \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass $E(u_n) \rightarrow E(u)$ für $n \rightarrow \infty$ und damit die schwache Unterhalbstetigkeit von E bewiesen.

Schritt 3: Folgerung der Existenz

Wir können jetzt die ersten beiden Schritte zusammenfügen. Dann wissen wir, dass

$$u_n \rightarrow u \text{ in } H \text{ und } E(u_n) \rightarrow E(u) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Somit ist $E(u) = d$. Jetzt ziehen wir die Konvexität von K zur Hand. Dann gilt mit der Definition von Konvexität $u + \epsilon(v - u) \in K$ für $v \in K$ beliebig und $\epsilon \in [0, 1]$. Da u minimierend ist, gilt weiter $E(u + \epsilon(v - u)) \geq E(u)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{d}{d\epsilon} E(u + \epsilon(v - u)) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} (a(u + \epsilon(v - u), u + \epsilon(v - u)) - 2\langle f, u + \epsilon(v - u) \rangle) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} (a(u, u) + a(u, \epsilon(v - u)) + a(\epsilon(v - u), u) \\ &\quad + a(\epsilon(v - u), \epsilon(v - u)) - 2\langle f, u \rangle - 2\langle f, \epsilon(v - u) \rangle) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} (a(u, u) + \underbrace{\epsilon a(u, v - u) + \epsilon a(v - u, u)}_{=2\epsilon a(u, v - u), \text{ da } a \text{ symmetrisch}} + \epsilon^2 a(v - u, v - u) \\ &\quad - 2\langle f, u \rangle - 2\epsilon \langle f, v - u \rangle) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= 2a(u, v - u) + 2\epsilon a(v - u, v - u) - 2\langle f, v - u \rangle \Big|_{\epsilon=0} \\ &= 2a(u, v - u) - 2\langle f, v - u \rangle. \end{aligned}$$

Nach Division durch 2 und anschließendem Umstellen folgt

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle.$$

Damit existiert also eine Lösung $u \in K$ unseres Problems 3.4.

2. Fall: Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Dieser kann als Störung des symmetrischen Falls angesehen werden. Dafür betrachten wir die koerzive Bilinearform (3.1) $a_t(u, v) = a_0(u, v) + tb(u, v)$ von Seite 20. Da a_0 symmetrisch ist, ist das Problem 3.2 für $t = 0$ nach dem 1. Fall lösbar, da somit auch a_t symmetrisch ist. Weiter haben wir aus Lemma 3.4

$$0 < M = \sup \frac{|b(u, v)|}{\|u\| \cdot \|v\|} < +\infty.$$

Hiermit können wir ein $0 < t_0 < \frac{\alpha}{M}$ wählen. Dann wird das Problem 3.2 mit Lemma 3.4 für alle $0 \leq t \leq t_0$ gelöst. Das Lemma 3.4 lässt sich nun auch für $\tau = t_0$ anwenden. Wir wenden jetzt das Lemma 3.4 endlich oft an. So sehen wir, dass das Problem 3.2 auch für $t = 1$ eine eindeutige Lösung besitzt, sodass mit $a_1(u, v) = a(u, v)$ der Satz für den allgemeinen Fall bewiesen ist. \square

Nun haben wir den Beweis der Existenz einer eindeutigen Lösung für Variationsungleichungen ganz allgemein gezeigt. Um die Existenz für das Hindernisproblem zu zeigen, müssen wir zunächst ein paar Annahmen für unser Hindernisproblem machen. Wir haben wieder unser zusammenhängendes und beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$. Seien nun zusätzlich die $a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$ *gleichmäßig elliptisch*, das heißt es existiert ein $\Lambda \geq 1$, sodass

$$\frac{1}{\Lambda} \xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda \xi^2 \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und fast alle } x \in \Omega. \quad (3.5)$$

Sei die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_j}(x) v_{x_i}(x) \, dx \quad \text{für } u, v \in H^1(\Omega)$$

gegeben. Außerdem definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} L : H^1(\Omega) &\rightarrow H^{-1}(\Omega) \\ \langle Lu, v \rangle &= a(u, v) \quad \text{für } u, v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Dabei ist H^{-1} der Dualraum vom Hilbertraum H^1 . Wir setzen wieder unsere Hindernisfunktion $\psi \in H^1(\Omega)$ und die abgeschlossene und konvexe Menge K voraus. Unser Problem lautet dann:

Problem 3.6. Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$ gegeben. Finde

$$u \in K : \quad a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \text{für alle } v \in K.$$

Theorem 3.7. Es existiert eine eindeutige Lösung des Problems 3.6.

Beweis. Wir müssen lediglich die Koerzivität von $a(u, v)$ zeigen und können dann Theorem 3.5 anwenden. Mit (3.5) wissen wir, dass

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) v_{x_j}(x) v_{x_i}(x) \, dx \stackrel{(3.5)}{\geq} \frac{1}{\Lambda} \|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{\Lambda} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{für } v \in H^1(\Omega).$$

Hieraus folgt die Koerzivität von $a(u, v)$. Wir können nun Theorem 3.5 anwenden, woraus folgt, dass für unser Problem 3.6 eine eindeutige Lösung existiert. \square

Nachdem wir in diesem Kapitel die Eindeutigkeit und Existenz von Lösungen bewiesen haben, beschäftigen wir uns im nächsten Kapitel mit dem nächsten großen Abschnitt dieser Arbeit, der Regularität des freien Randes.

3.2 Regularität

In diesem Kapitel möchten wir einige Eigenschaften des freien Randes herausfinden. Der Aufbau dieses Kapitels und des Kapitels 3.3 lehnt sich an den Artikel [\[F18b\]](#) von Alessio Figalli an. Einige Beweise und Aussagen des Artikels sind zum Teil gleich oder auch in ähnlicher Weise in anderen Quellen des Literaturverzeichnisses dieser Arbeit zu finden, sodass dieses und das Kapitel 3.3 inhaltlich zum Beispiel auch [\[C98\]](#) und [\[M00\]](#) widerspiegeln. Bevor wir in diesem Kapitel mit einem Lemma zum quadratischem Wachstum der Lösung u einsteigen, vereinfachen wir unser Hindernisproblem. Zunächst vereinfachen wir das Hindernis ψ , indem wir in diesem und im kommenden Kapitel 3.3 $\psi = 0$ annehmen. Wir

definieren die Funktion u im Einheitsball von \mathbb{R}^n . Die Funktion erfüllt dann folgende Eigenschaften

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{auf } \{u > 0\} \cap \Omega \\ u \geq 0 & \text{auf } \Omega \\ u \in C^{1,1}(\bar{\Omega}) \end{cases}. \quad (3.6)$$

Die Koinzidenzfläche ist dann durch $\{u = 0\}$ und der freie Rand durch $\partial\{u > 0\}$ gegeben. Unter geeigneten Glattheitsvoraussetzungen gelten die folgenden Aussagen in diesem und in Kapitel 3.3 auch für unser nicht vereinfachtes Hindernisproblem, bei dem nicht $\psi = 0$ gelten muss. In diesem Fall würden wir dann nicht nur u , sondern $u - \psi$ betrachten. Wir möchten hier dennoch das Hindernisproblem (3.6) voraussetzen. Kommen wir jetzt zum ersten Lemma dieses Kapitels.

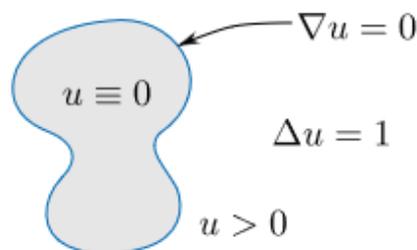


Abbildung 5 Das Hindernisproblem (3.6). (aus [F18b])

Lemma 3.8. Sei u eine Lösung von (3.6) und $x_0 \in \partial\{u > 0\}$. Außerdem sei $\Omega' \subset\subset \Omega$, das heißt $\bar{\Omega}' \subseteq \Omega^\circ$, wobei $\bar{\Omega}'$ kompakt ist, und $B_r(x_0) \subset \Omega'$. Dann gilt für eine Konstante $C = C(\Omega')$

$$\sup_{B_r(x_0)} u \leq Cr^2.$$

Beweis. Sei $x \in B_r(x_0)$ gegeben. Wir wenden nun die Taylorformel auf $u(x)$ an der Stelle x_0 an und bekommen somit

$$u(x) = u(x_0) + \nabla u(x_0) \cdot (x - x_0) + \int_0^1 (1-t) D^2 u(x_0 + t(x - x_0)) [x - x_0, x - x_0] dt. \quad (3.7)$$

Wir wissen aber, dass für das Problem (3.6) $u(x_0) = 0$ und $\nabla u(x_0) = 0$ gelten. Also bleibt nur der Integralteil in (3.7). Setzen wir dann $C := \|D^2 u\|_{L^\infty(\Omega')}$, so folgt

$$0 \leq u(x) \leq \frac{C}{2} |x - x_0|^2 \leq \frac{C}{2} r^2.$$

Damit ist das Lemma gezeigt. \square

Mit diesem Lemma haben wir gezeigt, dass u höchstens quadratisch vom freien Rand weg wächst. Allein reicht dieses Lemma aber nicht aus, sodass wir optimaler Weise das kommende Lemma 3.9 hinzuziehen. Mit diesem Lemma wollen wir die Nicht-Degeneration von Lösungen u zeigen und so mit Lemma 3.8 verdeutlichen, dass die Lösungen in der Nähe freier Randpunkte nicht schneller als quadratisch zerfallen.

Lemma 3.9. Sei u wieder eine Lösung von (3.6) und $x_0 \in \partial\{u > 0\}$. Zudem nehmen wir an, dass $B_r(x_0) \subset \Omega$. Dann gilt die Ungleichung

$$\sup_{B_r(x_0)} u \geq cr^2$$

für eine Konstante $c = c(n) > 0$.

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in zwei Fälle.

1. Fall: Zunächst sei $x_0 \in \{u > 0\}$. Wir definieren uns

$$h_{x_0}(x) := u(x) - \frac{|x - x_0|^2}{2n}.$$

Dann ist h_{x_0} in $B_r(x_0) \cap \{u > 0\}$ harmonisch, also gilt

$$\Delta h_{x_0} = \Delta u - 1 = 0 \quad \text{in } B_r(x_0) \cap \{u > 0\}.$$

Zudem gilt auch $h_{x_0}(x_0) = u(x_0) > 0$. Demnach ist h_{x_0} bei x_0 positiv. Wir sind jetzt in der Lage das Maximumprinzip für harmonische Funktionen anzuwenden. Damit folgt dann

$$0 < h_{x_0}(x_0) \leq \sup_{B_r(x_0) \cap \{u > 0\}} h_{x_0} = \max_{\partial(B_r(x_0) \cap \{u > 0\})} h_{x_0}. \quad (3.8)$$

h_{x_0} sollte also ein positives Maximum auf $\partial(B_r(x_0) \cap \{u > 0\})$ annehmen.

Da aber $\partial(B_r(x_0) \cap \{u > 0\}) = (\partial B_r(x_0) \cap \{u > 0\}) \cup (B_r(x_0) \cap \partial\{u > 0\})$ und

$$h_{x_0} \leq u = 0 \quad \text{auf } B_r(x_0) \cap \partial\{u > 0\},$$

ist h_{x_0} auf $B_r(x_0) \cap \partial\{u > 0\}$ negativ und das Maximum in (3.8) wird auf der anderen Teilmenge angenommen:

$$0 < \max_{\partial B_r(x_0) \cap \{u > 0\}} h_{x_0}.$$

Zudem gilt

$$h_{x_0} = u - \frac{r^2}{2n} \quad \text{auf } \partial B_r(x_0) \cap \{u > 0\}.$$

Dies wiederum führt zu

$$\frac{r^2}{2n} < \max_{\partial B_r(x_0) \cap \{u > 0\}} u \leq \sup_{B_r(x_0)} u.$$

Damit haben wir das Lemma für den ersten Fall bewiesen.

2. Fall: Für diesen Fall sei $x_0 \in \partial\{u > 0\}$. Wir wählen zunächst eine Folge $(x_k)_{k \geq 1} \in \{u > 0\}$ so, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$. Setzen wir nun noch $r_k := r - |x_k - x_0|$ und nutzen $B_{r_k}(x_k) \subset B_r(x_0) \subset \Omega$, so erhalten wir

$$\sup_{B_{r_k}(x_k)} u \geq \frac{r_k^2}{2n}.$$

Betrachten wir dann noch den Limes für $k \rightarrow \infty$, so folgt das Lemma auch für $x_0 \in \partial\{u > 0\}$. \square

Wenn wir nun beide Lemmata zusammenfügen, so gilt

$$0 < cr^2 \leq \sup_{B_r(x_0)} u \leq Cr^2 \Leftrightarrow \sup_{B_r(x_0)} u \simeq r^2$$

für einen freien Randpunkt $x_0 \in \partial\{u > 0\}$ mit $B_r(x_0) \subset \Omega$. Betrachten wir also einen Ball B_r um einen freien Randpunkt x_0 , so wissen wir, dass $u(x_0) = 0$ gilt, aber für $u > 0$ um x_0 sieht u innerhalb des Balls B_r wie eine Parabel aus, da das Supremum von u wie r^2 steigt (siehe Abbildung 6 auf der kommenden Seite).

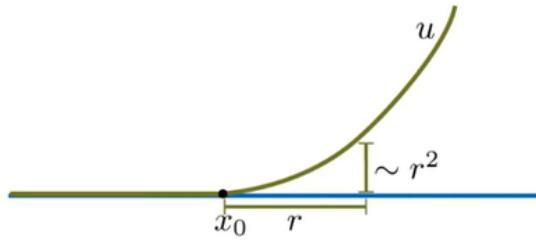


Abbildung 6 Wachstum der Lösung u (grün) weg vom freien Randpunkt x_0 . Der freie Rand ist in Blau dargestellt. (aus [F18a])

Eine weitere Eigenschaft des freien Randes ist, dass er endliches Hausdorff-Maß besitzt. Dies möchten wir im nächsten Korollar zeigen.

Korollar 3.10. Der freie Rand hat lokal endliches $(n - 1)$ -dimensionales Hausdorff-Maß. Genauer gilt, dass eine positive Konstante C existiert, sodass

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\{u > 0\} \cap B_r(x_0)) \leq Cr^{n-1}.$$

Beweis. Um den Beweis führen zu können, nutzen wir die gleichmäßige positive Dichte von $\{u > 0\}$ entlang des freien Randes. Das bedeutet, dass für einen Punkt $x_0 \in \partial\{u > 0\}$

$$\frac{|B_r(x_0) \cap \{u > 0\}|}{|B_r|} \geq \beta > 0 \quad (3.9)$$

für eine allgemeine Konstante β gilt. Zudem sei

$$E_\epsilon = \{|\nabla u| < \epsilon\} \cap \{u > 0\}.$$

Mit $v_i = \partial_{x_i} u$, $i = 1, \dots, n$, folgt

$$1 \leq |\Delta u|^2 \leq c_n \sum_{i=1}^n |\nabla v_i|^2 \quad \text{in } \{u > 0\}.$$

Mit dieser Ungleichung folgt für einen beliebigen Ball B_r mit Radius r

$$|B_r \cap E_\epsilon| \leq c_n \int_{B_r \cap E_\epsilon} \sum_{i=1}^n |\nabla v_i|^2 dx \leq c_n \sum_{i=1}^n \int_{B_r \cap \{|v_i| < \epsilon\} \cap \{u > 0\}} |\nabla v_i|^2 dx.$$

Weiter gilt mit Abschätzung der rechten Seite der vorherigen Ungleichung durch Lemma 2.15 aus [PSU12]

$$\int_{\Omega} \nabla v_i^\pm \nabla \eta dx \leq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

für $0 \leq \eta \in C_0^\infty(\Omega)$. Bei Stetigkeit gilt die Ungleichung für $0 \leq \eta \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Wir setzen jetzt $\eta = \psi_\epsilon(v_i^\pm)\phi$, wobei

$$\psi_\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \epsilon^{-1}t, & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 1, & t \geq \epsilon \end{cases}$$

und $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ eine nicht negative Abschneidefunktion ist, die wir so wählen, dass $\phi = 1$ auf B_r und $\phi = 0$ auf B_{r+t} mit $t > 0$ beliebig klein ist. Dann erhalten wir für $\eta = \psi_\epsilon(v_i^\pm)\phi$ eingesetzt in (3.10)

$$\int_{\Omega} \nabla v_i^\pm \nabla(\psi_\epsilon(v_i^\pm)\phi) \, dx = \int_{0 < v_i^\pm < \epsilon} \epsilon^{-1} |\nabla v_i^\pm|^2 \phi \, dx + \int_{\Omega} \nabla v_i^\pm \psi_\epsilon(v_i^\pm) \nabla \phi \, dx \leq 0.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \epsilon^{-1} \int_{B_r \cap \{|v_i| < \epsilon\} \cap \{u > 0\}} |\nabla v_i|^2 \, dx &\leq \epsilon^{-1} \int_{\{0 < |v_i| < \epsilon\}} |\nabla v_i|^2 \phi \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla v_i| |\nabla \phi| \, dx \\ &\leq c_n M \int_{\Omega} |\nabla \phi| \, dx, \end{aligned}$$

wobei $M = \|D^2 u\|_{L^\infty(\Omega)}$. Summieren wir nun über $i = 1, \dots, n$, so kommen wir auf die Abschätzung

$$|B_r \cap E_\epsilon| \leq C r^{n-1} \epsilon M \quad (3.10)$$

mit einer Konstante C , die die Oberfläche des Balls B_r beschreibt.

Mit Hilfe der Familie $\{B^i\}_{i \in I}$ von Bällen mit Radius ϵ , die auf $\Gamma \cap B_r$ platziert sind, können wir eine endliche überlappende Überdeckung von $\Gamma \cap B_r$ erzeugen. Die Überlappung geschieht jedoch nur für nicht mehr als $N = N_n$ Bälle der Familie. Wir definieren zusätzlich $B_{r+\epsilon}$ als Ball mit Radius $r + \epsilon$ für $\epsilon > 0$ genügend klein. Für diesen Ball soll dann $B^i \subset B_{r+\epsilon}$ gelten. Weiter gilt $|\nabla u| < M\epsilon$ in jeden Ball B^i für $E_{M\epsilon}$. Daraus ergibt sich auch $B^i \cap \{u > 0\} \subset E_{M\epsilon}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} |B^i| &\stackrel{(3.9)}{\leq} \frac{1}{\beta} \sum_{i \in I} |B^i \cap \{u > 0\}| \leq \frac{1}{\beta} \sum_{i \in I} |B^i \cap E_{M\epsilon}| \\ &\leq \frac{N}{\beta} |B_{r+\epsilon} \cap E_{M\epsilon}| \stackrel{(3.10)}{\leq} \frac{C(r+\epsilon)^{n-1} N M^2 \epsilon}{\beta}. \end{aligned}$$

Das führt zur Abschätzung

$$\sum_{i \in I} \text{diam}(B^i)^{n-1} \leq C(r+\epsilon)^{n-1},$$

wobei C hier und in den kommenden zwei Ungleichungen von n , M , B_r und Ω abhängt. So ergibt sich

$$\mathcal{H}_\epsilon^{n-1}(\partial\{u > 0\} \cap B_r) \leq C(r+\epsilon)^{n-1}$$

und schlussendlich für $\epsilon \rightarrow 0$

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\{u > 0\} \cap B_r) \leq C r^{n-1}.$$

□

3.3 Blow-ups

Um die Ergebnisse der Regularität zu beweisen, nutzen wir sogenannte Blow-ups. Dazu betrachten wir wieder das Hindernisproblem (3.6). Sei nun x_0 ein Punkt auf dem freien Rand $\partial\{u > 0\}$. Für ein kleines $r > 0$ definieren wir dann die Folge von Funktionen

$$u_{x_0, r}(x) := \frac{u(x_0 + rx)}{r^2}. \quad (3.11)$$

Da $u \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Hindernisproblems (3.6) ist, gelten $u_{x_0,r}(0) = \nabla u_{x_0,r}(0) = 0$ und $|D^2 u_r| \leq C$ für eine Konstante $C > 0$, unabhängig von r . Für $r \rightarrow 0^+$ bekommen wir dann bis zu einer Teilfolge einen Grenzwert u_0 von (3.11):

$$u_{x_0,r}(x) := \frac{u(x_0 + rx)}{r^2} \longrightarrow u_0 \text{ in } C_{loc}^1(\mathbb{R}^n).$$

Solch ein Grenzwert wird als *Blow-up* bezeichnet. Jeder dieser Blow-ups ist im ganzen \mathbb{R}^n definiert. Wir sind in der Lage die Blow-ups zu klassifizieren, da sie unterschiedliche Verhalten von u nahe x_0 aufweisen. Daher betrachten wir in 3.3.1 die regulären und in 3.3.2 die singulären freien Randpunkte.

3.3.1 Reguläre freie Randpunkte

Wir beschäftigen uns zunächst mit den regulären Punkten. Nehmen wir hierzu an, dass der freie Rand nahe x_0 glatt ist. Auf der einen Seite gilt $u = 0$ und auf der anderen Seite $u > 0$. Wir sehen dann, dass nach der Bildung eines Blow-ups dieser wie eine eindimensionale Halbparabel aussieht. Wir betrachten dazu Abbildung 7 einmal genauer. Im linken Bild sehen wir den rot dargestellten Rand des Balls B_r um x_0 mit der grün dargestellten Koinzidenzfläche. Im mittleren Bild ist die Funktion u dargestellt, die im grünen Bereich Null ist und dann wie eine Parabel wächst. Zoomen wir nun auf den regulären Punkt x_0 , so erkennen wir den Grenzwert, der auf der linken Seite (wieder in grün dargestellt) Null und auf der rechten Seite $\frac{1}{2}[(e \cdot x)_+]^2$ ist. Wir können uns also eine eindimensionale Halbparabel in Richtung e vorstellen.

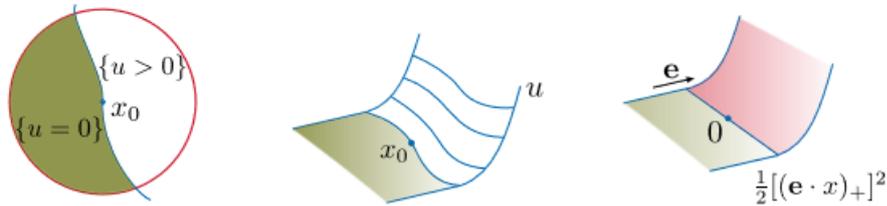


Abbildung 7 Entstehung eines Blow-ups u_0 an einem regulären Punkt x_0 . Der Rand des Balls $B_r(x_0)$ ist in Rot dargestellt, für die grünen Flächen gilt $u = 0$. (aus [F18b])

Definition 3.11. Sei $x_0 \in \partial\{u > 0\}$ ein freier Randpunkt. Dann heißt dieser Randpunkt ein *regulärer Punkt*, wenn bis zu einer Teilfolge von Radien für $r \rightarrow 0^+$ gilt

$$\frac{u(x_0 + rx)}{r^2} \longrightarrow \frac{1}{2}[(e \cdot x)_+]^2,$$

wobei $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ ein Einheitsvektor ist.

Theorem 3.12. Der Blow-up Grenzwert ist für jeden regulären Punkt $x_0 \in \partial\{u > 0\}$ eindeutig.

Der Beweis entfällt an dieser Stelle, da dieser zu umfangreich ist. Dafür werden wir aber im nächsten Kapitel 3.3.2 sehen, dass das Theorem 3.12 auch für singuläre Punkte gilt, für die es einfacher sein wird, das Theorem zu beweisen.

3.3.2 Singuläre freie Randpunkte

Betrachten wir nun die singulären Punkte. Hier ist die Koinzidenzmenge nahe x_0 sehr schmal. Zudem wissen wir, dass außerhalb der Koinzidenzmenge $\Delta u = 0$ gilt. Also erwarten wir nach der Bildung des Blow-ups in dem Grenzwert eine Funktion zu sehen, die fast überall den Laplace-Operator eins hat. So ergibt sich im zweidimensionalen Raum ein Bild, wie in Abbildung 8. Betrachten wir das linke Bild der Abbildung, so sehen wir wieder den in Rot dargestellten Ball $B_r(x_0)$ und die grün gefärbte Koinzidenzfläche, bei der $u = 0$ gilt. Die Funktion u sieht in diesem Fall, wie das mittlere Bild daneben aus. Sie ist Null bei x_0 und steigt an den beiden Seiten wie eine Parabel. Zoomen wir nun wieder an dem singulären Punkt x_0 , so lässt sich der Grenzwert schreiben als $\frac{1}{2}(e \cdot x)^2$.

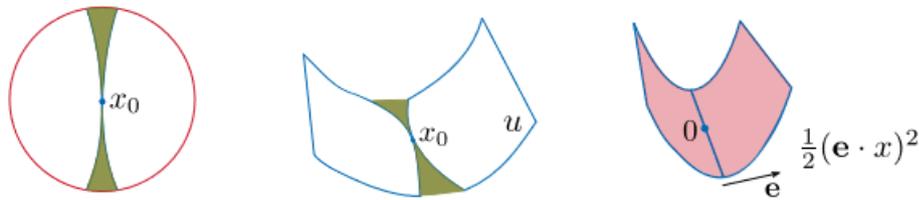


Abbildung 8 Entstehung eines Blow-ups u_0 an einem singulären Punkt x_0 . Der Rand des Balls $B_r(x_0)$ ist in Rot dargestellt, für die grünen Flächen gilt $u = 0$. (aus [F18b])

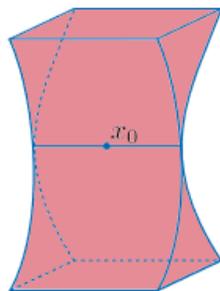
Definition 3.13. Sei $x_0 \in \partial\{u > 0\}$ ein freier Randpunkt. Dann heißt x_0 ein *singulärer Punkt*, wenn bis zu einer Teilfolge von Radien für $r \rightarrow 0^+$ gilt

$$\frac{u(x_0 + rx)}{r^2} \rightarrow p(x) := \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle,$$

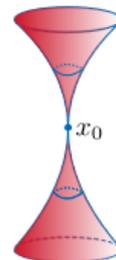
wobei A eine symmetrische $n \times n$ -Matrix mit $\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = 1$ ist.

Bemerkung 3.14. Die Form des nichtnegativen, quadratischen Polynoms p hängt von der Gestalt der Koinzidenzfläche nahe 0 ab.

Betrachten wir dazu zwei Beispiele im \mathbb{R}^3 , die diese Bemerkung verdeutlichen.



(a) Koinzidenzfläche in der Gestalt einer Ebene.



(b) Koinzidenzfläche in der Gestalt einer Gerade.

Abbildung 9 Singuläre Punkte x_0 im \mathbb{R}^3 und die Koinzidenzflächen in unterschiedlichen Gestalten. (aus [F18b])

Beispiel 3.15. Sei $p(x) = \frac{1}{2}(e \cdot x)^2$ für einen Einheitsvektor $e \in \mathbb{S}^2$. Wir sehen dann in Abbildung 9 (a) auf der vorherigen Seite, dass die Koinzidenzfläche die Gestalt der zweidimensionalen Ebene $\{e \cdot x = 0\}$ hat.

Beispiel 3.16. Für dieses Beispiel betrachten wir das Polynom $p(x) = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)$. Wie wir es in Abbildung 9 (b) auf Seite 31 sehen, sieht die Koinzidenzfläche dieses Mal wie eine Gerade aus.

Um im Folgenden die Schreibweise zu erleichtern, definieren wir uns zwei Mengen:

$$S := \{\text{singuläre Punkte}\} \subset \partial\{u > 0\},$$

$$P := \left\{ p(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle : A \text{ symmetrische } n \times n - \text{Matrix mit } \text{Spur}(A) = 1 \right\}.$$

Nun können wir Theorem 3.12 für singuläre Punkte formulieren.

Theorem 3.17. Sei u eine Lösung von (3.6) und sei $x_0 \in S$.

a) Dann existiert ein eindeutiges $p_{*,x_0} \in P$ so, dass

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + rx)}{r^2} = p_{*,x_0}(x).$$

b) Die Abbildung

$$x_0 \mapsto p_{*,x_0}$$

ist lokal gleichmäßig stetig für $x_0 \in S$.

Bevor wir das Theorem beweisen können, brauchen wir zunächst zwei andere Theoreme. Das Erste ist die Monotonieformel für das Hindernisproblem von G.S. Weiss. Dieses Theorem benötigen wir für den Beweis des zweiten Theorems von R. Monneau. Beginnen wir mit dem Theorem von G.S. Weiss.

Theorem 3.18. Sei $0 \in \partial\{u > 0\}$ und $B_p(0) \subset \Omega$. Dann gilt für alle $r \in (0, p)$, dass

$$W(r, u) := \frac{1}{r^{n+1}} \int_{B_r} (|\nabla u|^2 + 2u) \, dx - \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} 2u^2 \, dx$$

nicht fallend ist.

Falls $0 \in S$, dann gilt außerdem noch

$$W(0^+, u) = W(r, p) \quad \forall r > 0, p \in P.$$

Beweis. Sei $u_r(x) := r^{-2}u(rx)$, sodass $W(r, u) = W(1, u_r)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} W(1, u_r) &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{1^{n+2}} \int_{B_1} (|\nabla u_r|^2 + 2u_r) - \frac{1}{1^{n+3}} \int_{\partial B_1} 2u_r^2 \right) dx \\ &= \frac{d}{dr} \left(\int_{B_1} (|\nabla u_r|^2 + 2u_r) - 2 \int_{\partial B_1} u_r^2 \right) dx \\ &= \int_{B_1} (2\nabla u_r \cdot \nabla (\partial_r u_r) + 2\partial_r u_r) \, dx - 2 \int_{\partial B_1} 2u_r \partial_r u_r \, dx \\ &= 2 \int_{B_1} (\nabla u_r \cdot \nabla (\partial_r u_r) + \partial_r u_r) \, dx - 4 \int_{\partial B_1} u_r \partial_r u_r \, dx \\ &\stackrel{\text{p.I.}}{=} 2 \int_{\partial B_1} \partial_\nu u_r \partial_r u_r \, dx - 2 \int_{B_1} \Delta u_r \partial_r u_r \, dx + 2 \int_{B_1} \partial_r u_r \, dx - 4 \int_{\partial B_1} u_r \partial_r u_r \, dx \\ &= 2 \int_{B_1} (-\Delta u_r + 1) \partial_r u_r \, dx + 2 \int_{\partial B_1} (\partial_\nu u_r - 2u_r) \partial_r u_r \, dx. \end{aligned}$$

Da in dem Gebiet, in dem $\{u_r > 0\}$, $\Delta u_r = 1$ gilt und außerdem $\partial_r u_r = r^{-1}(x \cdot \nabla u_r - 2u_r)$, folgt, dass entweder $-\Delta u_r + 1$ oder $\partial_r u_r$ verschwindet und dass $\partial_r u_r = r^{-1}(\partial_\nu u_r - 2u_r)$ auf ∂B_1 . Daher folgt dann insgesamt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} W(1, u_r) &= 2 \int_{B_1} \underbrace{(-\Delta u_r + 1) \partial_r u_r}_{\equiv 0} dx + 2 \int_{\partial B_1} (\partial_\nu u_r - 2u_r) r^{-1} (\partial_\nu u_r - 2u_r) dx \\ &= \frac{2}{r} \int_{\partial B_1} (\partial_\nu u_r - 2u_r)^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir bewiesen, dass W nicht fällt.

Wir wollen jetzt den zweiten Teil unseres Theorems zeigen. Dazu sei 0 ein singulärer Punkt und $\bar{p} \in P$ der Grenzwert von u_{r_k} entlang einer Folge $r_k \rightarrow 0$. Aus der Monotonie von $W(r, u)$ aus dem ersten Teil dieses Beweises, können wir folgern, dass $W(r, u)$ einen Grenzwert für $r \rightarrow 0$ besitzt. Dann folgt mit der Stetigkeit von W

$$\lim_{r \rightarrow 0} W(r, u) = \lim_{k \rightarrow \infty} W(r_k, u) = \lim_{k \rightarrow \infty} W(1, u_k) = W(1, \bar{p}).$$

Mit einer direkten Berechnung können wir dann zeigen, dass eine Maßkonstante $c_n > 0$ existiert, sodass $W(r, p) = W(1, p) = c_n$ für alle $r > 0$ und $p \in P$. \square

Bevor wir mit dem Beweis des nächsten Theorems fortfahren können, brauchen wir zunächst eine Bemerkung, die wir in dem Beweis nutzen werden.

Bemerkung 3.19. Sei $p \in P$. Wie wir schon wissen, gilt $\Delta u = \Delta p = 1$ in $\{u > 0\}$. Daher folgt

$$w \Delta w = \begin{cases} 0 & \text{in } \{u > 0\} \\ p \Delta p = p \geq 0 & \text{in } \{u = 0\} \end{cases} \Leftrightarrow w \Delta w = p \chi_{u=0} \geq 0 \quad \forall p \in P. \quad (3.12)$$

Mit Hilfe des bewiesenen Theorems 3.18 und der Bemerkung können wir nun die kommende Monotonieformel für singuläre Punkte von R. Monneau beweisen. Diese werden wir dann wiederum für den Beweis unseres ursprünglichen Theorems 3.17 nutzen.

Theorem 3.20. Sei $p \in P$. Wenn u eine Lösung des Problems (3.6) ist und $0 \in S$, wobei $B_p(0) \subset \Omega$, dann ist

$$M(r, u, p) := \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} (u - p)^2 dx$$

nicht fallend für $r \in (0, p)$.

Beweis. Mit dem zweiten Teil des Theorems 3.18 wissen wir, dass

$$W(r, u) \geq W(0^+, u) = W(r, p) \Leftrightarrow 0 \leq W(r, u) - W(r, p)$$

für alle $r \in (0, p)$ und $\Delta p \equiv 1$. Also ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &\leq W(r, u) - W(r, p) \\ &\stackrel{\text{Thm. 3.15.}}{=} \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} (|\nabla u|^2 + 2u) dx - \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} 2u^2 dx - \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} (|\nabla p|^2 + 2p) dx \\ &\quad + \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} 2p^2 dx \\ &= \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} (|\nabla u|^2 + 2u - |\nabla p|^2 - 2p) dx - \frac{2}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} (u^2 - p^2) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} \left(\underbrace{|\nabla u|^2 - 2\nabla u \cdot \nabla p + |\nabla p|^2}_{\text{2. bin. Formel}} + 2\nabla u \cdot \nabla p - 2|\nabla p|^2 + 2u - 2p \right) dx \\
&\quad - \frac{2}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} \left(\underbrace{u^2 - 2up + p^2}_{\text{2. bin. Formel}} + 2up - 2p^2 \right) dx \\
&= \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} \left(|\nabla u - \nabla p|^2 + 2\nabla(u-p) \cdot \nabla p + 2(u-p) \right) dx \\
&\quad - \frac{2}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} \left((u-p)^2 + 2(u-p)p \right) dx \\
&\stackrel{w=u-p}{=} \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} \left(|\nabla w|^2 + 2\nabla w \cdot \nabla p + 2w \right) dx - \frac{2}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} \left(w^2 - 2wp \right) dx \\
&= \frac{1}{r^{n+2}} \left(|\nabla w|^2 + 2\operatorname{div}(w\nabla p) \right) - \frac{2}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} \left(w^2 - 2wp \right) dx.
\end{aligned}$$

Benutzen wir nun, dass $x = r\nu$ auf ∂B_r und anschließend, dass p homogen ist, also $x \cdot \nabla p = 2p$, dann folgt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} |\nabla w|^2 dx - \frac{2}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 dx \\
&\quad + \frac{2}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} \underbrace{w(x \cdot \nabla p - 2p)}_{=0} dx \\
&= \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} |\nabla w|^2 dx - \frac{2}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 dx \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} |\nabla w|^2 dx \geq \frac{2}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 dx \quad \forall r \in (0, p). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (3.12) der Bemerkung erhalten wir nach einigen Umformungen der Ungleichung (3.13)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} |\nabla w|^2 dx \geq \frac{2}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 dx \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} -w\Delta w dx + \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} wx \cdot \nabla w dx \geq \frac{2}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 dx \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w(x \cdot \nabla w - 2w) dx \geq \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} w\Delta w dx \stackrel{(3.12)}{\geq} 0 \quad \forall r \in (0, p).
\end{aligned}$$

Wir definieren uns $w_r(x) := r^{-2}w(rx)$ und berechnen die partielle Ableitung nach r mit Hilfe der Produktregel $\partial_r w_r(x) = -2r^{-3}w(rx) + r^{-2}\partial_r w(rx) = r^{-1}(x \cdot \nabla w_r - 2w_r)$.

Wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} M(r, u, p) &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} w^2 dx \right) = \frac{d}{dr} \int_{\partial B_1} w_r^2 dx \\
&= \frac{2}{r} \int_{\partial B_1} w_r(x \cdot \nabla w_r - 2w_r) dx \\
&= \frac{2}{r^{n+4}} \int_{\partial B_r} w(x \cdot \nabla w - 2w) dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass M nicht fallend ist. \square

Da wir beide Hilfstheoreme für unser eigentliches Theorem 3.17 bewiesen haben, können wir nun dessen Beweis führen.

Beweis des Theorems 3.17. Wir beginnen mit dem Beweis der Existenz und Eindeutigkeit eines Grenzwertes.

zu a): Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir zunächst $x_0 = 0$ an. Zudem sei $u_r(x) := r^{-2}u(rx)$ und seien p_1 und p_2 zwei verschiedene Grenzwerte, die entlang der Folgen $r_{k,1}$ und $r_{k,2}$, die beide gegen Null konvergieren, erhalten werden. Dann können wir bis zu einer Teilfolge von $r_{k,2}$ und dem Umbenennen der Indizes annehmen, dass $r_{k,2} \leq r_{k,1}$ für alle k gilt. Benutzen wir nun unser Theorem 3.19, so folgt

$$\int_{B_1} (u_{r_{k,1}} - p_1)^2 dx = M(r_{k,1}, u, p_1) \stackrel{r_{k,2} \leq r_{k,1}}{\geq} M(r_{k,2}, u, p_1) = \int_{B_1} (u_{r_{k,2}} - p_1)^2 dx \quad \forall k.$$

Mit $k \rightarrow \infty$ folgt

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_1} (u_{r_{k,1}} - p_1)^2 dx \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_1} (u_{r_{k,2}} - p_1)^2 dx = \int_{B_1} (p_2 - p_1)^2 dx.$$

Somit ist bewiesen, dass ein eindeutiger Blow-up Grenzwert von u_r für $r \rightarrow 0$ existiert. Diesen Grenzwert bezeichnen wir nun mit p_{*,x_0} , wobei x_0 ein gegebener singulärer Punkt ist.

zu b): Wir haben die Abbildung $x_0 \mapsto p_{*,x_0}$. Wir möchten nun die Stetigkeit dieser Abbildung an der Stelle $0 \in S$ zeigen. Sei dazu $\epsilon > 0$ fest und x_k eine Folge in der Menge S der singulären Punkte mit $x_k \rightarrow 0$. Nach Teil a) des Theorems wissen wir, dass $u_r \rightarrow p_{*,x_0}$. Daher existiert ein kleiner Radius $r_\epsilon > 0$, sodass

$$\int_{\partial B_1} \left| \frac{u(r_\epsilon, x)}{r_\epsilon^2} - p_{*,0}(x) \right|^2 dx \leq \epsilon. \quad (3.14)$$

Wenden wir dieses Mal Theorem 3.19 auf x_k mit $p = p_{*,0}$ an, so folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1} |p_{x_k,*} - p_{*,0}|^2 dx &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B_1} \left| \frac{u(x_k + rx)}{r^2} - p_{*,0}(x) \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\partial B_1} \left| \frac{u(x_k + r_\epsilon x)}{r_\epsilon^2} - p_{*,0}(x) \right|^2 dx^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dann folgt mit $k \rightarrow \infty$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial B_1} |p_{x_k,*} - p_{*,0}|^2 dx \stackrel{(3.15)}{\leq} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial B_1} \left| \frac{u(x_k + r_\epsilon x)}{r_\epsilon^2} - p_{*,0}(x) \right|^2 dx \stackrel{(3.14)}{\leq} \epsilon.$$

Da ϵ beliebig ist, ist die Stetigkeit der Abbildung an der Stelle 0 bewiesen. Um zu schlussfolgern, dass die Abbildung $x_0 \mapsto p_{*,x_0}$ lokal gleichmäßig stetig für $x_0 \in S$ ist, müssen wir zeigen, dass die Menge S abgeschlossen ist. Dieses wollen wir an dieser Stelle annehmen und nicht beweisen. Wir können uns aber verdeutlichen, dass die Menge der regulären Punkte innerhalb des freien Randes offen ist und somit die Menge der singulären Punkte abgeschlossen ist. Da S also insgesamt lokalkompakt ist, folgt die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildung $x_0 \mapsto p_{*,x_0}$. \square

Bevor wir das Kapitel der singulären Punkte abschließen, untersuchen wir noch die Regularität der Menge S . Wie wir in den Beispielen 3.15 und 3.16 bemerkt haben, sehen die singulären Punkte abhängig von der Dimension der Menge $\{p_{*,x_0} = 0\}$ unterschiedlich aus. Daher unterteilen wir unsere Menge S in n Mengen je nach Dimension $k_{x_0} := \dim(\ker D^2 p_{*,x_0}) = \dim(\{p_{*,x_0} = 0\})$, wobei $x_0 \in S$ gegeben ist. Die neue Menge S_m ist dann für gegebenes $m \in \{0, \dots, n-1\}$ definiert als

$$S_m := \{x_0 \in S : k_{x_0} = m\}.$$

In Beispiel 3.15 liegt nach dieser Notation der singuläre Punkt x_0 in S_2 , während der singuläre Punkt in Beispiel 3.16 in S_1 liegt. Beweisen wir nun ein Theorem von Caffarelli [C98], das uns einen Eindruck von der Regularität von S und den Bestandteilen des freien Randes gibt.

Theorem 3.21. Die Menge der singulären Punkte S liegt lokal in einer $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit der Klasse C^1 .

Genauer können wir dieses Theorem mit unserer eben aufgestellten Notation formulieren: S_m ist für jedes $m \in \{0, \dots, n-1\}$ lokal in einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit der Klasse C^1 enthalten.

Beweisidee. Wir wissen, dass an der Koinzidenzfläche $\{u = 0\}$ $u = \nabla u \equiv 0$ gilt. Daher gilt auch

$$u|_{S_m} = \nabla u|_{S_m} \equiv 0.$$

Zudem haben wir durch Theorem 3.14

$$u(x_0 + y) = p_{*,x_0}(y) + o(|y|^2).$$

Wenn wir uns die letzte Gleichung anschauen, dann bemerken wir, dass p_{*,x_0} dem Term der zweiten Ordnung in der Taylorentwicklung von u entspricht, also $p_{*,x_0}(y) = \frac{1}{2} D^2 u(x_0)[y, y]$. Wir sind jetzt in der Lage Whitneys Fortsetzungstheorem anzuwenden, da wir schon mit Theorem 3.14 b) gezeigt haben, dass die Abbildung $x_0 \mapsto p_{*,x_0}$ für $x_0 \in S$ stetig ist. Mit Whitneys Fortsetzungstheorem finden wir eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Klasse C^1 , sodass

$$F(x_0) = \nabla u(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla F(x_0) = D^2 p_{*,x_0} \quad \forall x_0 \in S_m.$$

Mit $\nabla F(x_0) = D^2 p_{*,x_0}$ folgt $\dim(\ker \nabla F(x_0)) = \dim(\ker D^2 p_{*,x_0}) = m$ auf S_m . Mit dem impliziten Funktionentheorem folgt, dass

$$S_m = \{F = 0\} \cap S_m$$

lokal in einer m -dimensionalen C^1 Mannigfaltigkeit enthalten ist, was zu beweisen war. \square

Bemerkung 3.22. Mit dem Beweis des Theorems haben wir gezeigt, dass

$$\|u(x_0 + \cdot) - p_{*,x_0}\|_{L^\infty(B_r)} = o(r^2) \quad \Rightarrow \quad S_m \in C^1$$

für eine Schranke $o(r^2)$ unabhängig von x_0 .

Das Theorem beweist, dass die Menge S in einer $n-1$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit der Klasse C^1 liegt. Zudem zeigt uns das Theorem, dass der freie Rand aus verschiedenen-dimensionalen Teilen besteht. Diese Teile liegen alle jeweils in einer glatten Mannigfaltigkeit. Damit schließen wir das Kapitel der Blow-ups und damit einhergehend auch die Regularitätsuntersuchungen des freien Randes ab, sodass wir auch zum Ende des Hauptteils gekommen sind.

4 Zusammenfassung

Zum Abschluss dieser Arbeit über das Hindernisproblem möchten wir die Arbeit zusammenfassen. Zunächst sind wir auf die physikalische Betrachtung eingegangen. Wir konnten uns das Problem mit Hilfe einer elastischen, am Rand fest fixierten Membran, dessen Auslenkung durch ein Hindernis begrenzt wird, vorstellen. Nachdem wir dann das Problem mathematisch betrachtet hatten, haben wir die Eindeutigkeit und Existenz einer Lösung bewiesen. Ein weiteres Ziel dieser Arbeit war es, den entstandenen freien Rand der Koinzidenzfläche zu untersuchen. Wir legten dabei unseren Fokus auf die Regularität. Dabei fanden wir heraus, dass für einen freien Randpunkt x_0 gilt: $0 < cr^2 \leq \sup_{B_r(x_0)} u \leq Cr^2$. Die Lösung u wächst also höchstens quadratisch vom freien Rand weg. Wir konnten daraufhin zeigen, dass der freie Rand lokal ein endliches Hausdorff-Maß besitzt. Nachdem wir uns die Blow-up Grenzwerte angeschaut hatten, bewiesen wir eine Monotonieformel von Weiss und eine Weitere von Monneau. Damit waren wir dann in der Lage den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit eines Blow-up Grenzwertes zu zeigen. Am Ende konnten wir mit Hilfe dieses Beweises und mit Hilfe der Monotonieformeln zeigen, dass die Menge der singulären Punkte in einer $(n - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit der Klasse C^1 liegt. Zudem kamen wir zu der Erkenntnis, dass der freie Rand aus verschiedenen-dimensionalen Teilen besteht, die alle jeweils in einer glatten Mannigfaltigkeit liegen. Mittlerweile ist die Forschung so weit vorangeschritten, dass wir schon mehr als Theorem 3.21 wissen könnten. So ist das Theorem 3.21 für den Fall $n=2$ schon auf eine Mannigfaltigkeit der Klasse $C^{1,\alpha}$ für $\alpha > 0$ verbessert worden. Dieses und andere weiterführenden Ergebnisse lassen sich zum Beispiel in Kapitel 10 von [\[F18b\]](#) finden.

Literaturverzeichnis

- [AF03] Robert Adams und John Fournier. *Sobolev Spaces*. S. 30. Academic Press, 2. Aufl. 2003.
- [C98] Luis Angel Caffarelli. The Obstacle Problem Revisited. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 4(4):383-402, Januar 1998.
- [D04] Bernard Dacorogna. *Introduction to the Calculus of Variations*. S. 79-90. Imperial College Press, 2004.
- [D14] Markus Dausch. Schwache Ableitung und Poincaréungleichung. Seminarskript, Universität München, Juni 2014.
<http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~diening/ss14/huette/vortraege/dausch.pdf> (Stand 04.12.2018)
- [EGK17] Christof Eck, Harald Garcke und Peter Knabner. *Mathematische Modellierung*. S. 431-436, 483/484. Springer Spektrum, 3. Aufl. 2017.
- [F18a] Dipartimento di Matematica 'Tullio Levi-Civita'. Alessio Figalli - Regularity of interfaces in phase transition via obstacle problems. März 2018.
<https://www.youtube.com/watch?v=J5u0nwTuPZY> (Stand 05.12.2018)
- [F18b] Alessio Figalli. Free boundary regularity in obstacle problems. *ArXiv e-prints*, 1807.01193v1, Juli 2018.
- [KS80] David Kinderlehrer und Guido Stampacchia. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. S. 24-49. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1980.
- [K07] Henry Kasumba. Uzawa-Type Methods For The Obstacle Problem. S. 5. Masterarbeit, Universität Linz, Juli 2007.
https://www.numa.uni-linz.ac.at/Teaching/Diplom/Finished/kasumba_dipl.pdf (Stand 21.11.2018)
- [M00] Regis Monneau. A Brief Overview on the Obstacle Problem. November 2000.
- [N11] Patrizio Neff. Variationsrechnung und Sobolevräume. Vorlesungsskript, Universität Duisburg-Essen, 2011.
https://www.uni-due.de/imperia/md/content/mathematik/neff_variationsrechnung11.pdf (Stand 23.11.2018)
- [PSU12] Arshak Petrosyan, Henrik Shahgholian und Nina Nikolaevna Ural'ceva. *Regularity of Free Boundaries in Obstacle-Type Problems*. S. 8, 61-65. American Math. Soc., 2012.
- [R06] Filip Rindler. Elliptische Variationsungleichungen. S. 15. Hausarbeit, Technische Universität Berlin, Dezember 2016.
<https://www.math.uni-bielefeld.de/~emmrch/studenten/EVIs.pdf> (Stand 12.11.2018)
- [R12] Stefan Rosenberger. Einführung in die Variationsrechnung. S. 11-14. Seminararbeit, Universität Graz, Januar 2012.
<https://mathematik.oehunigraz.at/files/2012/07/Wissenschaftliches-Seminar-Rosenberger.pdf> (Stand 20.11.2018)

- [R17] Xavier Ros-Oton. Obstacle problems and free boundaries: an overview. *ArXiv e-prints*, 1707.00992v1, Juli 2017.
- [W17] Benedikt Wirth. Numerik Partieller Differentialgleichungen I. Folien 33, 45/46, 52/53. Vorlesungsnotizen, Universität Münster, WS 2017/18.
https://www.uni-muenster.de/AMM/num/Vorlesungen/NumPDGL_WS17/notes.pdf (Stand 20.11.2018)
- [W18] Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Schwache Ableitung. April 2018.
https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Schwache_Ableitung&oldid=175728796 (Stand 06.12.2018)

Abbildungsverzeichnis

1	Elastische Membran über einer Platte als Hindernis. (aus [K07])	9
2	Eine elastische Membran auf ein Hindernis ψ . (aus [PSU12])	9
3	Lösung des Minimierungsproblems für den 1. Fall mit $a = 1$ und $b = 2$	16
4	Lösung des Minimierungsproblems für den 2. Fall mit $a = 0,18$ und $b = 0,32$	18
5	Das Hindernisproblem (3.6). (aus [F18b])	27
6	Wachstum der Lösung u . (aus [F18a])	29
7	Entstehung eines Blow-ups u_0 an einem regulären Punkt x_0 . (aus [F18b])	31
8	Entstehung eines Blow-ups u_0 an einem singulären Punkt x_0 . (aus [F18b])	32
9	Singuläre Punkte x_0 im \mathbb{R}^3 und die Koinzidenzflächen in unterschiedlichen Gestalten. (aus [F18b])	32

Plagiatserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit mit dem Titel *Das Hindernisproblem - Existenz und Regularität* selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

L. Unland

(19. Dezember 2018, Lisa Unland)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in einer Datenbank einverstanden.

L. Unland

(19. Dezember 2018, Lisa Unland)