

Arbeitsgruppe Mathematische Optimierung

Bachelorarbeit

Feinskalige Strukturen in einer Verallgemeinerung von „urban planning“-Netzwerken

Anna Seppelt

Matr. 418772

Betreuer: Prof. Dr. Benedikt Wirth
Zweitgutachter: Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Einführendes Kapitel	3
2.1	Notationen	3
2.2	Das optimale Transportproblem	4
2.3	Irrigation Pattern	8
2.4	Das „urban planning“-Modell	9
2.5	Das zu betrachtende Setting	11
2.6	Die optimale Energieskalierung	12
3	Obere Schranke mittels verzweigter Konstruktion	19
3.1	Operationen mit Pattern	19
3.2	Elementarzellen	22
3.3	Obere Schranke für die optimale „urban planning“-Energie $\mathcal{E}^{\varepsilon, a, A}$	25
3.3.1	Obere Schranke in 2D	30
3.3.2	Obere Schranke in 3D	33
3.3.3	Obere Schranke in nD für $n > 3$	42
4	Eine Verallgemeinerung von „urban planning“-Netzwerken	51
4.1	Konstruktion der Kostenfunktion	51
4.2	Lagrangesche Formulierung des verallgemeinerten „urban planning“-Modells	52
4.3	Die optimale Energie	53
4.4	Konstruktionen der Netzwerke	54
4.5	Obere Schranke für die optimale Energie $\mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A}$	56
4.6	Obere Schranke in 2D	58
5	Fazit und Ausblick	63
	Literaturverzeichnis	65
	Abbildungsverzeichnis	67

KAPITEL 1

Einleitung

Schon seit mehreren Jahrhunderten, mit dem Aufkommen des Militär- und Handelswesens, spielt das Transportproblem eine zentrale Rolle in militärischen und betriebswirtschaftlichen Planungsprozessen. Im Allgemeinen behandelt ein Transportproblem die Frage, wie einheitliche Objekte von verschiedenen Angebots- zu mehreren Nachfrageorten optimal, d.h. kostenminimierend, transportiert werden können.

Mathematisch wurde das Problem des optimalen Massetransports als erstes von Gaspard Monge im Jahre 1781 betrachtet. Seitdem ist es zu einem wichtigen Gegenstand in der aktuellen Forschung geworden, welcher diverse Anwendungen in vielen Wissenschaftsbereichen, unter anderem der statistischen Physik, Strömungsdynamik, Biologie, Wirtschaftswissenschaft und Bildverarbeitung, findet.

In dieser Arbeit wollen wir uns mit einem speziellen Transportmodell beschäftigen, dem sogenannten „urban planning“-Modell, dessen Motivation in der Optimierung von städtischen Transportnetzwerken liegt. Es befasst sich mit dem Finden eines optimalen Transportnetzwerkes im Hinblick auf die Transportkosten und die Unterhaltungskosten des Netzwerkes.

Die Optimierung solcher Transportnetzwerke ist eine nichttriviale Aufgabe. Die zugehörigen Kostenfunktionale sind nicht konvex und deren Minimierer, die optimalen Transportnetzwerke, weisen oft eine komplizierte, stark verzweigte Struktur auf. Im Allgemeinen ist es unmöglich, die optimale Netzwerkstruktur zu finden.

Eine analytische Möglichkeit, um ein besseres Verständnis von dem „urban planning“-Modell zu erhalten, ist zu untersuchen, wie sich die optimalen Netzwerkstrukturen in einer bestimmten Geometrie für Netzwerkunterhaltungskosten $\varepsilon \rightarrow 0$ verhalten. Dies beinhaltet das Zeigen einer oberen und unteren Schranke für die Energie als eine Funktion in ε , wobei sich beide Grenzen höchstens um eine multiplikative Konstante unterscheiden. Das bedeutet, dass jede Netzwerkstruktur, welche der oberen Schranke genügt, bis auf einen konstanten Faktor optimale Energie hat und lässt somit erkennen, wie fast-optimale Netzwerke aussehen.

Solche Energieskalierungsgesetze wurden schon für verschiedenste Systeme hergeleitet, wie z.B. Martensit-Austenit-Transformationen [KM92; KM94; KKO13; CC15; BG15]. Sie können nicht nur verwendet werden, um beobachtete physikalische Strukturen zu erklären, sondern können auch auf Konstruktionsprobleme angewendet werden, um beispielsweise optimale feinskalige Strukturen von zusammengesetzten elastischen Materialien zu finden [KW14; KW15]. In den folgenden Ausführungen wollen wir uns im Rahmen von „urban planning“-Netzwerken mit letzterem Fall beschäftigen.

Ziel dieser Arbeit ist es, feinskalige Strukturen in einer Verallgemeinerung von „urban planning“-Netzwerken zu untersuchen. Dazu leiten wir auch für diese eine obere Schranke im Zweidimensionalen her. Die Verallgemeinerung besteht darin, dass wir anstelle des „ur-

ban planning“-Kostenfunktional eine stückweise affine Kostenfunktion betrachten. Dabei werden wir uns hier auf drei Teilintervalle beschränken.

Es stellt sich die Frage, ob das „urban planning“-Modell und die hier betrachtete Verallgemeinerung mehr oder weniger das gleiche Verhalten aufweisen und somit phänomenologisch äquivalent sind. Wir werden sehen, dass das ursprüngliche Modell und unsere Verallgemeinerung im Zweidimensionalen viele Gemeinsamkeiten haben.

Die vorliegende Arbeit basiert auf dem Artikel „Optimal micropatterns in transport networks“ von Dr. Alessio Brancolini und Prof. Dr. Benedikt Wirth aus dem Jahre 2015 [BW15b] und ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 2 werden wir kurz in die Theorie des optimalen Transports einführen und das „urban planning“-Modell vorstellen, sowie die zugehörigen Energieskalierungsgesetze angeben. Diese werden wir anschließend in Kapitel 3 beweisen, wobei wir uns in dieser Ausarbeitung auf den Beweis der oberen Schranke beschränken. In Kapitel 4 betrachten wir eine Verallgemeinerung von „urban planning“-Netzwerken und beweisen für das Minimum dieser Energie, ähnlich wie in Kapitel 3, eine obere Schranke im Zweidimensionalen. Zum Schluss fassen wir in Kapitel 5 unsere Resultate in einem Fazit zusammen und geben einen Ausblick auf mögliche weiterführende Arbeiten.

KAPITEL 2

Einführendes Kapitel

In diesem Kapitel werden wir das „urban planning“-Modell vorstellen und eine Lagrangesche Formulierung dieses Transportmodells angeben, welche sich als nützlich erweist, um Energieskalierungsgesetze herzuleiten. Als Vorbereitung dafür werden wir hier zunächst einige Notationen auflisten und eine kurze Einführung in die Theorie des optimalen Transports geben.

2.1 Notationen

- **Lebesguemaß.** \mathcal{L}^n bezeichnet das n-dimensionale Lebesguemaß.
- **Hausdorffmaß.** \mathcal{H}^n bezeichnet das n-dimensionale Hausdorffmaß.
- **Diracmaß.** Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist das im Punkt x konzentrierte Diracmaß auf A definiert durch

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- **Nicht-negatives endliches Borelmaß.** $fbm(X)$ bezeichnet die Menge der nicht-negativen endlichen Borelmaße auf einer Borelmenge $X \subset \mathbb{R}^n$.
- **Beschränkung eines Maßes auf eine Menge.** Sei (X, \mathcal{M}, μ) ein Maßraum und $Y \subset \mathcal{M}$. Das Maß $\mu \llcorner Y$ ist ein Maß definiert durch

$$\mu \llcorner Y(A) = \mu(A \cap Y).$$

- **Pushforward eines Maßes.** Für einen gegebenen Maßraum (X, \mathcal{M}, μ) , einen Messraum (Y, \mathcal{N}) und eine messbare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ ist der Pushforward von μ unter T das Maß $T_{\#}\mu$ auf (Y, \mathcal{N}) definiert durch

$$T_{\#}\mu(B) = \mu(T^{-1}(B)) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{N}.$$

- **Atomloses Maß.** Ein Maß μ heißt atomlos, wenn es für jede messbare Menge A mit $\mu(A) > 0$ eine messbare Teilmenge $B \subset A$ gibt, sodass gilt $\mu(A) > \mu(B) > 0$.
- **Absolut stetige Funktion.** $AC(I)$ bezeichnet die Menge aller absolut stetigen Funktionen auf dem Intervall I .
- Wir schreiben $A \lesssim B$ bzw. $A \gtrsim B$, falls es eine Konstante C gibt, sodass $A \leq CB$ bzw. $B \leq CA$ ist. Wir schreiben $A \sim B$, falls $A \lesssim B$ und $A \gtrsim B$ ist.

- $I = [0, 1]$: Das Einheitsintervall.
- $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_\Gamma)$: Referenzraum aller Partikel (siehe Definition 2.3.1).
- χ : Irrigation Pattern aller Partikel (siehe Definition 2.3.3).
- μ_+^χ, μ_-^χ : Irrigating und Irrigated Maß (siehe Definition 2.3.4).
- $m_\chi(x)$: Masse aller Partikel, die durch einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ fließen (siehe Definition 2.3.5).
- μ_0, μ_1 : Start- und Zielverteilung.

2.2 Das optimale Transportproblem

Im Allgemeinen behandelt ein Transportproblem die Frage, wie eine Masse unter den kleinstmöglichen Kosten von einer gegebenen Ursprungsverteilung zu einer gewünschten Zielverteilung transportiert werden kann. Dabei führen unterschiedliche Kostenfunktionale zu unterschiedlichen Optimierungsproblemen.

Das Problem des optimalen Massetransports wurde als erstes von Gaspard Monge im Jahre 1781 in seiner Arbeit "Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais"[Mon81] behandelt. Seitdem ist es zu einem klassischen Gegenstand der Wahrscheinlichkeitstheorie, der Wirtschaftswissenschaft und der Optimierung geworden.

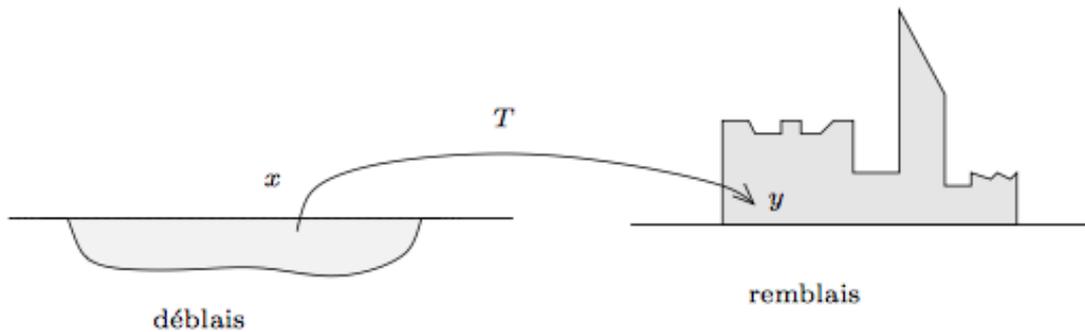


Abbildung 2.1: Das Transportproblem von Monge (entnommen aus [Vil09])

Das Problem hinter Monges Formulierung lässt sich wie folgt veranschaulichen: Für eine gegebene Verteilung von Eisenminen f im ganzen Land und einer Verteilung von Fabriken g , welche Eisenerz benötigen, ist herauszufinden, welche Minen welche Fabriken mit Erz beliefern sollen, sodass die gesamten Transportkosten minimiert werden. Dabei sind die Kosten, um eine Masseinheit Eisenerz von $x \in \mathbb{R}^n$ nach $y \in \mathbb{R}^n$ zu transportieren, gegeben durch eine Funktion $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$. Das Problem wird dabei unter der Annahme behandelt, dass die insgesamt gewonnene Masse an Eisenerz mit dem Konsum in den Fabriken übereinstimmt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy.$$

Die Aufgabe besteht nun darin, eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu finden, sodass die gesamten Transportkosten minimiert werden. Dabei beschreibt T die Bewegung und $T(x)$ den

Zielpunkt eines Partikels, welcher sich ursprünglich bei x befand (siehe Abb. 2.1). Die hier genannten Kosten müssen nicht notwendigerweise finanzieller Natur sein, sondern können sich auch ganz allgemein auf einen Aufwand bzw. eine Entfernung beziehen. Zusammengefasst lässt sich das Problem also wie folgt definieren:

Definition 2.2.1 (Monge-Problem). *Gesucht wird eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\int_A f(x)dx = \int_{T(A)} g(y)dy$, welche für alle $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar ist, sodass*

$$C(T) = \int_{\mathbb{R}^n} c(x, T(x))f(x)dx$$

minimal ist.

Eine Transportabbildung T , welche das Monge-Problem löst, wird optimal (im Hinblick auf das Kostenfunktional $C(T)$) genannt.

Im Allgemeinen ist das Problem von Monge inkorrekt gestellt. Es kann weder die Existenz einer Lösung noch die Eindeutigkeit erwartet werden. Angenommen $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ seien disjunkt und setze $\mu_0 = \delta_x$ und $\mu_1 = \frac{1}{2}(\delta_{y_1} + \delta_{y_2})$. Dann existiert keine Abbildung T , welche die Masse von μ_0 nach μ_1 transportiert. Insbesondere lässt die Formulierung nach Monge also auch kein Massensplitting zu. Für die hier beschriebene Situation bedeutet dies, dass jede Eisenmine nur eine Fabrik beliefern kann.

Erst mit der Arbeit von Kantorovich (1942, siehe [Kan42]) war es möglich, diese Schwierigkeiten zu umgehen. Die Hauptidee hinter Kantorovichs relaxierter Version des Monge-Problems ist, die Bewegung der einzelnen Partikel nicht mit Hilfe einer Transportabbildung zu beschreiben, sondern stattdessen durch einen Transportplan, einem Produktmaß auf einem kompakten metrischen Raum Ω .

Anstelle also für jedes x den Zielort $T(x)$ eines Partikels anzugeben, welcher ursprünglich bei x positioniert war, geben wir für jedes Paar (x, y) die Anzahl der Partikel an, die von x nach y transportiert werden. Es ist offensichtlich, dass diese Beschreibung allgemeinere Bewegungen zulässt, da die Partikel in einem Punkt x zu verschiedenen Zielorten y transportiert werden können (siehe Abb. 2.2).

In der Definition der Menge der Transportpläne werden wir mit $proj_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ die Projektionen auf die i -te Koordinate bezeichnen, d.h. $proj_1(x, y) = x$, $proj_2(x, y) = y$. Dabei werden durch $(proj_1)_\# \gamma$ und $(proj_2)_\# \gamma$ die Marginale eines auf $\Omega \times \Omega$ gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaßes γ definiert.

Definition 2.2.2 (Menge der Transportpläne). *Sei Ω ein kompakter metrischer Raum und $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}(\Omega)$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße. Wir definieren*

$$\Pi(\mu_0, \mu_1) = \{\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega) \mid (proj_i)_\# \gamma = \mu_i, i = 0, 1\}$$

als die Menge der Transportpläne.

Der Wert $\gamma(x, y)$ gibt dabei die Menge der Masse an, die von x nach y transportiert wird. Bemerke, dass die Bedingungen $(proj_1)_\# \gamma = \mu_0$ und $(proj_2)_\# \gamma = \mu_1$ sicherstellen, dass unser Transportplan $\gamma \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$ tatsächlich die Anzahl an Partikeln von einer Menge

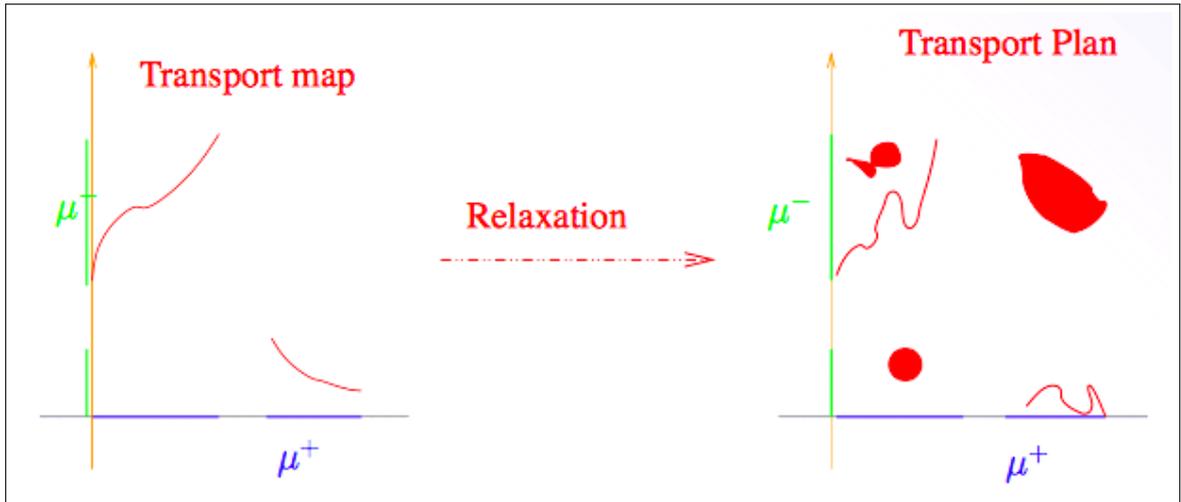


Abbildung 2.2: Unterschied zwischen Monge- und Kantorovich-Formulierung: Während wir im Monge-Problem die Bewegung der Partikel durch eine Transportabbildung (links) beschreiben, verwenden wir in Kantorovichs abgeschwächter Version stattdessen einen Transportplan (rechts). Dabei sind hier die Anfangs- und Zielverteilungen jeweils gegeben durch μ^+ und μ^- (entnommen aus [Xia08]).

A wegtransportiert, die gemäß unserer Anfangsverteilung $\mu_0(A)$ gegeben ist, und dass die Masse, die zu einer Menge B transportiert wird, mit $\mu_1(B)$ übereinstimmt.

Nachdem wir nun den Begriff des Transportplans eingeführt haben, lässt sich das Kantorovich-Problem wie folgt definieren:

Definition 2.2.3 (Kantorovich-Problem). *Gesucht ist ein Transportplan $\gamma \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$, welcher das Funktional*

$$C(\mu_0, \mu_1) = \int_{\Omega \times \Omega} c(x, y) d\gamma(x, y)$$

minimiert.

Die Minimierer dieses Problems werden optimale Transportpläne zwischen μ_0 und μ_1 genannt.

Wegen der hier vorliegenden Linearität des Funktionals $C(\mu_0, \mu_1)$ und der Kompaktheit des Raumes aller Transportpläne $\Pi(\mu_0, \mu_1)$, lässt sich im Gegensatz zum Monge-Problem für das Kantorovich-Problem mit Hilfe der direkten Methode der Variationsrechnung leicht die Existenz einer Lösung zeigen.

Falls wir nun also μ_0 als Angebotsverteilung (Minen) und μ_1 als Nachfrageverteilung (Fabriken) auffassen, ist es möglich, mit der Formulierung von Kantorovich die Art und Weise, wie die Fabriken beliefert werden sollen, zu modellieren, falls ein Straßennetz bereits existiert.

Bei der Monge- und Kantorovich-Formulierung besteht die Struktur, auf der die Masse transportiert wird, aus Geodäten zwischen den Start- und Zielpunkten. Unter einer Geodäte verstehen wir die lokal kürzeste Verbindungskurve zweier Punkte, in unserem Fall eine Gerade (siehe Abb. 2.3, links). Dabei haben die Strukturen keinen Einfluss auf das Kosten-

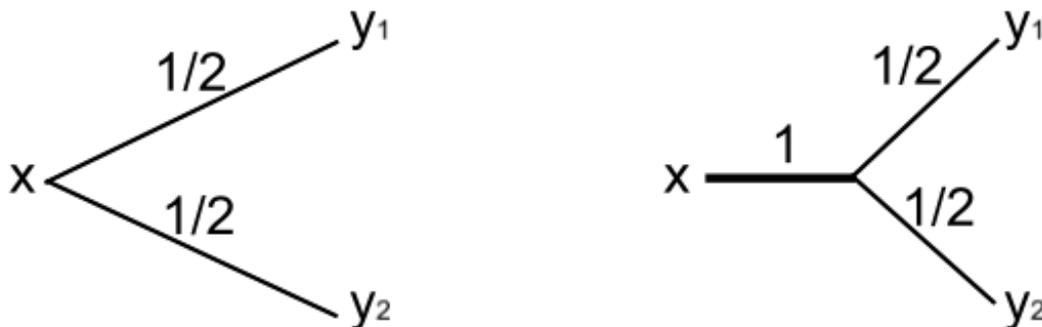


Abbildung 2.3: Netzwerkstrukturen in verschiedenen Transportmodellen (entnommen aus [Ber05]). Links: Transport entlang von Geodäten im Kantorovich-Problem. Rechts: Transportmodell bei dem es vorteilhaft ist, Masse gesammelt zu transportieren.

funktional, da sie hier nur abhängig sind von der optimalen Transportabbildung bzw. dem optimalen Transportplan.

Dies ist der Grund, warum wir das Kostenfunktional anpassen müssen. Tatsächlich kann es bei Angebot-Nachfrage Problemen, bei denen die Netzwerkstrukturen noch gebildet werden müssen, wünschenswert sein, die Konstruktionskosten des Netzwerkes in die Gesamtkosten mit einfließen zu lassen, um somit einen Kompromiss zu finden zwischen den Konstruktionskosten und der Effizienz des Netzwerkes.

Eine weitere Situation, in der die Netzwerkstruktur von Bedeutung ist, liegt dann vor, wenn es vorteilhaft ist, Masse zunächst zu bündeln und anschließend gesammelt zu transportieren (siehe Abb. 2.3, rechts). Im Folgenden werden wir uns mit einem Transportmodell, dem „urban planning“-Modell, beschäftigen, welches eine solche Präferenz aufweist.

An dieser Stelle wollen wir noch kurz die Wassersteindistanz einführen, auf welche wir im Verlauf der Arbeit noch mehrfach Bezug nehmen werden. Diese wird ausführlich in [[Vil03], Kap. 1] behandelt.

Definition 2.2.4 (Wassersteindistanz). Seien $\mu_+, \mu_- \in f_{bm}(\mathbb{R}^n)$ mit gleicher Masse $\|\mu_+\|_{f_{bm}} = \|\mu_-\|_{f_{bm}}$. Für $p \geq 1$ ist die p -te Wassersteindistanz zwischen μ_+ und μ_- gegeben durch

$$W_p(\mu_+, \mu_-) = \left(\inf_{\mu \in \Pi(\mu_+, \mu_-)} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x - y|^p d\mu(x, y) \right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei $\Pi(\mu_+, \mu_-)$ die Menge aller Transportpläne bezeichnet.

Die Wassersteindistanz ist also eine Abstandsfunktion zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen, welche gegeben ist durch die p -te Wurzel der minimalen Transportkosten $C(\mu_0, \mu_1)$ für die Kostenfunktion $c(x, y) = |x - y|^p$ (siehe Definition 2.2.3).

Wir benötigen außerdem folgendes Theorem, welches die Äquivalenz zwischen dem optimalen Transportproblem und dessen dualer Formulierung, d.h. einer Formulierung im Sinne von stetigen Funktionen, zeigt (siehe [Vil03, Thm. 1.14]).

Theorem 2.2.5 (Kantorovich-Rubinstein Dualität). *Seien $\mu_+, \mu_- \in \text{fbm}(\mathbb{R}^n)$ mit gleicher Masse. Dann gilt*

$$W_1(\mu_+, \mu_-) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d(\mu_+ - \mu_-) \mid \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lipschitz-stetig mit Konstante } 1 \right\}.$$

2.3 Irrigation Pattern

Für den Beweis der Existenz einer oberen Schranke für das „urban planning“-Energiefunktional werden wir eine Lagrangesche Formulierung des Problems betrachten. Diese basiert auf Irrigation Pattern χ , welche die Position jedes Partikels p zur Zeit t durch $\chi(p, t)$ beschreiben. Wir werden Irrigation Pattern nur auf einem Referenzraum betrachten.

Definition 2.3.1 (Referenzraum). *Betrachte einen vollständigen separablen überabzählbaren metrischen Raum Γ ausgestattet mit der Borel-Algebra auf Γ , $\mathcal{B}(\Gamma)$, und einem positiven endlichen atomlosen Borelmaß P_Γ . Wir bezeichnen $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_\Gamma)$ als den Referenzraum.*

Der Referenzraum kann interpretiert werden als der Raum aller Partikel, welche von einer Verteilung μ_+ zu einer Verteilung μ_- transportiert werden.

Bemerkung 2.3.2. *Es kann gezeigt werden, dass jeder Referenzraum isomorph ist zum Standardraum $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), m\mathcal{L}^1[0, 1])$ mit $m = P_\Gamma(\Gamma)$ (siehe [Roy88, Prop. 12 oder Thm. 16 in Kap. 15 Abschn. 5] oder [Vil09, Kap. 1] für einen Beweis).*

Demzufolge sind die folgenden Definitionen und Resultate unabhängig von der speziellen Wahl eines Referenzraumes und wir werden im Folgenden den Standardraum betrachten, sofern nicht anders angegeben.

Definition 2.3.3 (Irrigation Pattern). *Sei $I = [0, 1]$ und $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_\Gamma)$ unser Referenzraum. Ein Irrigation Pattern ist eine messbare Funktion $\chi : \Gamma \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass für fast alle $p \in \Gamma$ gilt $\chi_p \in AC(I)$.*

Dabei entspricht $\chi(p, t)$ der Position eines Partikels $p \in \Gamma$ zum Zeitpunkt t und χ_p kann als Pfad des Partikels p interpretiert werden. Sein Bild $\chi_p(I)$ wird Faser genannt und häufig mit dem Partikel identifiziert.

Der Anfangs- und Endpunkt einer Faser $\chi_p(I)$ ist gegeben durch $i_0^\chi(p) = \chi(p, 0)$ und $i_1^\chi(p) = \chi(p, 1)$. Bei der Vorstellung des Kantorovich-Problems haben wir bereits die Menge der Transportpläne kennengelernt. Diese ist definiert als Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße γ auf $\Gamma \times \Gamma$, für die gilt, dass

$$\begin{aligned} \mu_0(A) &= \gamma(A \times \Gamma) = \text{proj}_{1\#} \gamma(A) \quad \text{und} \\ \mu_1(B) &= \gamma(\Gamma \times B) = \text{proj}_{2\#} \gamma(B). \end{aligned}$$

Genauso erhalten wir das Irrigating und Irrigated Maß für ein Irrigation Pattern χ .

Definition 2.3.4 (Irrigating und Irrigated Maß). Sei χ ein Irrigation Pattern. Seien $i_0^X, i_1^X : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $i_0^X(p) = \chi(p, 0)$ und $i_1^X(p) = \chi(p, 1)$. Das Irrigating Maß und das Irrigated Maß sind definiert als Pushforward von P_Γ unter i_0^X und i_1^X , i.e. $\mu_+^X = (i_0^X)_\# P_\Gamma$, $\mu_-^X = (i_1^X)_\# P_\Gamma$.

Da wir in unseren Kostenfunktionalen die Masse berücksichtigen werden, welche durch einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ fließt, wollen wir an dieser Stelle noch den Begriff der Solidaritätsklasse einführen.

Definition 2.3.5 (Solidaritätsklasse). Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ wird die Menge aller Partikel, welche durch x fließen, bezeichnet mit

$$[x]_\chi = \{q \in \Gamma \mid x \in \chi_q(I)\}$$

und deren Masse durch

$$m_\chi(x) = P_\Gamma([x]_\chi).$$

2.4 Das „urban planning“-Modell

In dieser Arbeit betrachten wir das sogenannte „urban planning“-Modell, welches in [BB05] eingeführt wurde. Seine ursprüngliche Motivation ist, das öffentliche Verkehrsnetzwerk für die tägliche Pendelstrecke der Arbeiter von ihrem Zuhause zu ihren Arbeitsplätzen innerhalb eines Stadtgebiets zu optimieren. Dabei werden die Ursprungsorte, die Wohngegenden, durch eine räumliche Verteilung $\mu_0 \in fbm(\mathbb{R}^n)$, und die Zielorte, die Bürogebäude, durch eine räumliche Verteilung $\mu_1 \in fbm(\mathbb{R}^n)$ beschrieben.

Das öffentliche Transportnetzwerk wird repräsentiert durch eine rektifizierbare Menge $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ mit endlichem eindimensionalen Hausdorffmaß $\mathcal{H}^1(\Sigma)$. Dabei können wir $\mathcal{H}^1(\Sigma)$ als die Länge unseres Transportnetzwerkes auffassen. Jeder Pendler kann für feste Kosten b pro Reisedistanz auf dem Netzwerk reisen oder seine eigenen Transportmittel benutzen, für die er pro Reisedistanz etwas höhere Kosten $a > b$ zahlen muss. Die Kosten dafür, dass eine Person auf einem Pfad $\theta \subset \mathbb{R}^n$ reist, sind also gegeben durch

$$a\mathcal{H}^1(\theta \setminus \Sigma) + b\mathcal{H}^1(\theta \cap \Sigma),$$

wobei a die Kosten pro Reisedistanz außerhalb des Netzwerkes bezeichnet und $b < a$ die Kosten pro Reisedistanz innerhalb des Netzwerkes.

Die minimalen Kosten, um von $x \in \mathbb{R}^n$ nach $y \in \mathbb{R}^n$ zu reisen, sind somit gegeben durch

$$d_\Sigma(x, y) = \inf\{a\mathcal{H}^1(\theta \setminus \Sigma) + b\mathcal{H}^1(\theta \cap \Sigma) \mid \theta \in C_{x,y}\}$$

für $C_{x,y} = \{\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \theta \text{ ist Lipschitz-stetig mit } \theta(0) = x, \theta(1) = y\}$. Dabei bezeichnet $C_{x,y}$ also die Menge aller Lipschitz-stetigen Kurven, welche x und y verbinden.

Die Wasserstein-Typ Distanz, welche durch diese Metrik induziert wird, beschreibt die minimalen Kosten, um die Wohngegenden μ_0 und die Bürogebäude μ_1 zu verbinden, und ist gegeben durch

$$W_{d_\Sigma}(\mu_0, \mu_1) = \inf_{\mu \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d_\Sigma(x, y) d\mu(x, y),$$

wobei $\Pi(\mu_0, \mu_1)$ die Menge der Transportpläne beschreibt.

Das „urban planning“-Problem befasst sich mit dem Finden eines optimalen Transportnetzwerkes Σ im Hinblick auf die Transportkosten $W_{d_\Sigma}(\mu_0, \mu_1)$ und einen zusätzlichen Parameter $\varepsilon \mathcal{H}^1(\Sigma)$, den Unterhaltungskosten des Netzwerks.

Damit ist das Energiefunktional, welches die Kosteneffizienz des Netzwerks Σ beschreibt, von der Form.

$$\mathcal{E}_W^{\varepsilon, a, b, \mu_0, \mu_1}[\Sigma] = W_{d_\Sigma}(\mu_0, \mu_1) + \varepsilon \mathcal{H}^1(\Sigma).$$

Die gesamten Transportkosten $W_{d_\Sigma}(\mu_0, \mu_1)$ sind also proportional zu der zu transportierenden Masse, die Unterhaltungskosten des Netzwerks $\varepsilon \mathcal{H}^1(\Sigma)$ sind dagegen proportional zu dessen Gesamtlänge mit Proportionalitätsfaktor ε . Aus diesem Grund werden hierarchisch verzweigte Netzwerke präferiert.

Wegen

$$\mathcal{E}_W^{\varepsilon, a, b, \mu_0, \mu_1} = b \mathcal{E}_W^{\frac{\varepsilon}{b}, \frac{a}{b}, 1, \mu_0, \mu_1}$$

genügt es, den Fall $b = 1$ zu untersuchen.

In [BW15a] wird gezeigt, dass diese Darstellungsform des „urban planning“-Modells äquivalent zu einer Formulierung des Problems mit Hilfe von Irrigation Pattern χ ist. Dabei kann das optimale Transportnetzwerk Σ^* durch

$$\Sigma^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid m_\chi^*(x) > \frac{\varepsilon}{a-1} \right\}$$

dem optimalen Irrigation Pattern χ^* entnommen werden.

Wir führen an dieser Stelle die Lagrangesche bzw. Pattern-basierte Formulierung ein, da sie für den Beweis der Energieskalierungsgesetze von Vorteil ist. Dabei definieren wir unsere Kostenfunktion als Integral über die Menge aller Irrigation Pattern auf $\Gamma \times [0, 1]$.

Definition 2.4.1 („urban planning“-Problem, Pattern-basierte Formulierung). *Sei $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_\Gamma)$ der Referenzraum und $\chi : \Gamma \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Irrigation Pattern. Für $\varepsilon > 0$ und $a > 1$ betrachte die Kostendichte*

$$r_{\varepsilon, a}^\chi(x) = \begin{cases} \min\left\{1 + \frac{\varepsilon}{m_\chi(x)}, a\right\} & \text{falls } m_\chi(x) > 0, \\ a & \text{falls } m_\chi(x) = 0. \end{cases}$$

Die „urban planning“-Kostenfunktion $E_P^{\varepsilon, a}$ ist definiert durch

$$E_P^{\varepsilon, a}(\chi) = \int_{\Gamma \times I} r_{\varepsilon, a}^\chi(\chi_p(t)) |\dot{\chi}_p(t)| dP_\Gamma(p) dt.$$

Für $\mu_0, \mu_1 \in \text{fbm}(\mathbb{R}^n)$ ist das „urban planning“-Problem

$$\min \mathcal{E}^{\varepsilon, a, \mu_0, \mu_1}[\chi],$$

wobei

$$\mathcal{E}^{\varepsilon, a, \mu_0, \mu_1}[\chi] = \begin{cases} E_P^{\varepsilon, a}(\chi) & \text{falls } \mu_+^\chi = \mu_0 \text{ und } \mu_-^\chi = \mu_1, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Existenz von minimierenden Pattern, genauso wie die Äquivalenz der Optimierungsprobleme

$$\min_{\chi} \mathcal{E}^{\varepsilon, a, \mu_0, \mu_1}[\chi] = \min_{\Sigma} \mathcal{E}^{\varepsilon, a, 1, \mu_0, \mu_1}$$

wird in [BW15a] gezeigt.

Bemerke, dass ε die Netzwerkunterhaltungskosten bestimmt. Folglich führt ein großes ε zu groben Netzwerken, während ein kleines ε dazu führt, dass das Netzwerk sehr fein wird. Unser Energieskalierungsgesetz wird sich mit letzterem Fall beschäftigen.

Später werden wir das folgende Reparametrisierungsergebnis aus [BW15a] benötigen, welches zeigt, dass in Definition 2.3.3 anstelle von $\chi_p \in AC(I)$ äquivalent $\chi_p \in Lip(I)$ gefordert werden kann.

Proposition 2.4.2 (Konstante Geschwindigkeitsreparametrisierung von Pattern). *Irrigation Pattern mit endlichen Kosten können so reparametrisiert werden, dass $\chi_p : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig ist und $|\dot{\chi}_p|$ konstant ist für fast alle $p \in \Gamma$, ohne dass sich die Kosten $E_P^{\varepsilon, a}$ verändern.*

2.5 Das zu betrachtende Setting

Um ein besseres Verständnis vom Modellverhalten zu bekommen, wollen wir in dieser Arbeit ein Energieskalierungsgesetz für die Netzwerkkosten für folgende einfache Geometrie (siehe Abb. 2.4) herleiten.

Im zweidimensionalen euklidischen Raum betrachten wir als Quell- und Senkverteilung die folgenden beiden Maße, welche auf zwei Linien konzentriert sind,

$$\mu_0 = \mathcal{L}^1 \llcorner [0, l] \times \{0\}, \quad \mu_1 = \mathcal{L}^1 \llcorner [0, l] \times \{L\},$$

wobei $l > 0$ ist.

Im Allgemeinen betrachten wir zwei Maße $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}^n$ der gleichen Masse, welche auf Hyperquadraten der Kodimension 1 leben und auf denen die Masse uniform verteilt ist. Diese sind gegeben durch

$$\mu_0 = m \mathcal{H}^{n-1} \llcorner (A \times \{0\}), \quad \mu_1 = m \mathcal{H}^{n-1} \llcorner (A \times \{L\}),$$

wobei $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Hyperquadrat und $m > 0$ ist.

Dabei repräsentiert μ_0 die Ursprungs- und μ_1 die Zielverteilung. Wir suchen nun ein optimales, lokal-eindimensionales Transportnetzwerk, welches die Masse von μ_0 nach μ_1 transportiert. Dabei ist Optimalität bezogen auf eine bestimmte Energie, in unserem Fall die „urban planning“-Energie, bei der der gebündelte Transport von mehreren Partikeln günstiger ist als der separate Transport jedes Partikels. Somit werden wie in Abb. 2.4 verzweigte Netzwerkstrukturen favorisiert, welche die Präferenz des gesammelten Transports berücksichtigen und die Bedingung, dass die Partikel gleichmäßig auf μ_0 eingesammelt und gleichmäßig auf μ_1 verteilt werden sollen, erfüllen.

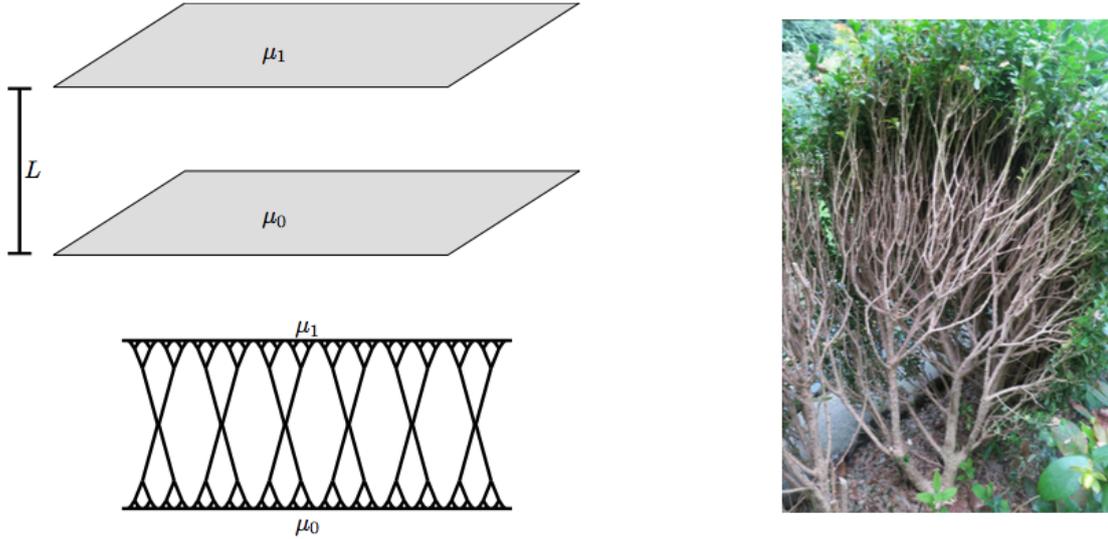


Abbildung 2.4: Das betrachtete Setting (entnommen aus [BW15b]). Oben links: Skizze der betrachteten Geometrie, zwei Maße μ_0 und μ_1 , welche auf Hyperquadraten der Kodimension 1 mit Abstand L leben. Unten links: Exemplarisches Transportnetzwerk im Zweidimensionalen, auf dem Masse von μ_0 nach μ_1 transportiert wird. Rechts: Foto eines Buchsbaums, welcher eine verzweigte Netzwerkstruktur und ein vergleichsweise dünnes Blätterdach aufweist, welches man sich fast als eine niedrig-dimensionale Mannigfaltigkeit vorstellen kann.

Die beschriebene Situation kann beispielsweise als eine starke Vereinfachung des Wassertransports innerhalb einer einzigen Pflanze oder innerhalb eines Waldes gesehen werden. Ein einzelnes Blatt oder das Blätterdach eines Baumes kann oft als zweidimensionale Mannigfaltigkeit abstrahiert werden, welche in einem dreidimensionalen Raum eingebettet ist. Dabei repräsentiert μ_0 den Grundwasserspeicher und μ_1 den Wasserverbrauch im Blätterdach eines Baumes (siehe Abb. 2.4).

2.6 Die optimale Energieskalierung

Für ein gegebenes Anfangs- und Endmaß μ_0 und μ_1 suchen wir ein optimales Irrigation Pattern, d.h. den Minimierer von

$$\mathcal{E}^{\varepsilon, a, \mu_0, \mu_1}[\chi] = \begin{cases} E_P^{\varepsilon, a}(\chi) & \text{falls } \mu_+^\chi = \mu_0 \text{ und } \mu_-^\chi = \mu_1, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zur Herleitung von Einergieskalierungsgesetzen betrachten wir das oben eingeführte Setting mit Quelle und Senke

$$\mu_0 = m\mathcal{H}^{n-1} \llcorner (A \times \{0\}), \quad \mu_1 = m\mathcal{H}^{n-1} \llcorner (A \times \{L\}).$$

Deswegen können wir

$$\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A,m,L} = \mathcal{E}^{\varepsilon,a,\mu_0,\mu_1}$$

setzen.

Durch Umskalierung der Geometrie und des Masseflusses erhält man leicht folgende Entdimensionalisierung:

$$\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A,m,L}[\chi] = L^n m \mathcal{E}^{\frac{\varepsilon}{L^{n-1}m}, a, \frac{1}{L}A, 1, 1}[\frac{1}{L}\chi],$$

sodass wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit beschränken können auf

$$\mu_0 = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner (A \times \{0\}), \quad \mu_1 = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner (A \times \{1\}) \quad \text{und} \quad \mathcal{E}^{\varepsilon,a,A} := \mathcal{E}^{\varepsilon,a,A,1,1}.$$

Wir bezeichnen die Mindestenergie für $\varepsilon = 0$ mit

$$\mathcal{E}^{*,a,A} = \inf_{\chi} \mathcal{E}^{0,a,A}[\chi].$$

Folgendes Lemma zeigt die Gleichheit zwischen der Mindestenergie des Transportmodells für $\varepsilon = 0$ und dem $(n-1)$ -dimensionalen Hausdorffmaß des Hyperquadrates A . Diese Gleichheit werden wir in Kapitel 3 dieser Arbeit häufig ausnutzen.

Lemma 2.6.1. *Für die Wassersteindistanz*

$$W_1(\mu_0, \mu_1) = \inf_{\mu \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x - y| d\mu(x, y).$$

gilt

$$\mathcal{E}^{*,a,A} = W_1(\mu_0, \mu_1) = \mathcal{H}^{n-1}(A).$$

Beweis. Der Beweis dieses Lemmas wird in zwei Schritten durchgeführt.

Schritt 1: Es ist zu zeigen: $W_1(\mu_0, \mu_1) = \mathcal{H}^{n-1}(A)$.

⊆ Sei $\mu \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$ mit $\mu\left(\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = 0$, falls $x \neq y$.

Dann ist $\text{supp}(\mu) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right) \mid x \in A \right\}$.

Somit ist $\mu = \left(x \mapsto \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right)_{\#} (\mathcal{H}^{n-1} \llcorner A)$.

Es gilt also

$$\begin{aligned}
W_1(\mu_0, \mu_1) &= \inf_{\tilde{\mu} \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x - y| d\tilde{\mu}(x, y) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \left| \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right| d(\mathcal{H}^{n-1} \llcorner A) \\
&= \int_A \sqrt{0^2 + (-1)^2} d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \int_A 1 d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \mathcal{H}^{n-1}(A)
\end{aligned}$$

□ Nach Theorem 2.2.5 gilt

$$W_1(\mu_0, \mu_1) = \sup_{\substack{\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi \text{ Lipschitz-stetig,} \\ L=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d(\mu_0 - \mu_1).$$

Betrachte $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\right) = z$. Dann ist ϕ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1, denn für $x, u \in A$ und $y, v \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
\left| \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) - \phi\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \right| &= |y - v| = \sqrt{(y - v)^2} \leq \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} \\
&= \left| \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right|.
\end{aligned}$$

Da W_1 eine Metrik ist, gilt wegen der Symmetrie von W_1

$$\begin{aligned}
W_1(\mu_0, \mu_1) &= W_1(\mu_1, \mu_0) \\
&= \sup_{\substack{\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi \text{ Lipschitz-stetig,} \\ L=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d(\mu_1 - \mu_0) \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n} \phi d(\mu_1 - \mu_0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} z d\mu_1\left(\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\right) - \int_{\mathbb{R}^n} z d\mu_0\left(\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} 1 d\mu_1\left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right) - 0 \\
&= \mathcal{H}^{n-1}(A).
\end{aligned}$$

Schritt 2: Es ist zu zeigen $\mathcal{E}^{*,a,A} = W_1(\mu_0, \mu_1)$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{*,a,A} &= \inf_{\chi} \mathcal{E}^{0,a,A}[\chi] \\
&= \mathcal{E}^{0,a,\mu_0,\mu_1}[\Sigma^*] \\
&= W_{d_{\Sigma^*}}(\mu_0, \mu_1) \\
&= \inf_{\mu \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \inf_{\Theta \in \mathcal{C}_{x,y}} \{a\mathcal{H}^1(\Theta \setminus \Sigma^*) + \mathcal{H}^1(\Theta \cap \Sigma^*)\} d\mu(x, y) \\
&= \inf_{\mu \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x - y| d\mu(x, y) \\
&= W_1(\mu_0, \mu_1).
\end{aligned}$$

□

Zum jetzigen Zeitpunkt können wir uns einfach vorstellen, dass das Infimum für $\varepsilon = 0$ durch ein Netzwerk mit unendlich vielen vertikalen Röhren der Länge 1 angenähert wird.

Für $\varepsilon > 0$ weicht die mindestens erreichbare Energie jeweils von $\mathcal{E}^{*,a,A}$ ab. Wir nennen die Abweichung Überschussenergie und kürzen sie ab mit

$$\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon,a,A} = \min_{\chi} \mathcal{E}^{\varepsilon,a,A}[\chi] - \mathcal{E}^{*,a,A}.$$

Unser Ziel ist es nun zu zeigen, wie sich die Abweichung bzgl. des Parameters ε verhält. Der Beweis, dass das betrachtete Transportmodell dem folgenden Energieskalierungsgesetz genügt, wird in Kapitel 3 gegeben. Dabei werden wir in dieser Arbeit nur den Beweis der oberen Schranke führen. Ein vollständiger Beweis ist in [BW15b] gegeben.

Theorem 2.6.2 (Energieskalierung für das „urban planning“-Modell). *Es existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$ unabhängig von ε, a und A , sodass für $\varepsilon < \min\{1, \mathcal{H}^{n-1}(A)^{\frac{n+1}{n-1}}\}$ und $a > 1$ gilt*

$$C_1 \mathcal{H}^{n-1}(A) \min\{a - 1, f(\varepsilon, a)\} \leq \Delta \mathcal{E}^{\varepsilon,a,A} \leq C_2 \mathcal{H}^{n-1}(A) \min\{a - 1, f(\varepsilon, a)\},$$

wobei die Funktion f gegeben ist durch

$$f(\varepsilon, a) = \begin{cases} \varepsilon^{\frac{2}{3}} & \text{falls } n = 2, \\ (\sqrt{a} + |\log \frac{a-1}{\sqrt{\varepsilon}}|) \sqrt{\varepsilon} & \text{falls } n = 3, \\ \sqrt{a} (\sqrt{a-1})^{\frac{n-3}{n-1}} \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} & \text{falls } n > 3. \end{cases}$$

Es ist auffällig, dass die Abschätzung stark vom Parameter a , den Kosten für einen Transport außerhalb des Netzwerks, abhängig ist. Dies ist umso mehr von Bedeutung, wenn a groß oder nahe 1 ist.

In Kapitel 3 werden wir sehen, dass die drei unterschiedlichen Skalierungsgesetze für verschiedene Dimensionen auf drei verschiedene Systeme hinweisen:

- In 2D stammt der Hauptbeitrag der Überschussenergie aus dem Gebiet zwischen den beiden Maßen, wobei sie von μ_0 und μ_1 weg beschränkt ist.
- In 3D tritt der Hauptbeitrag der Überschussenergie auch zwischen den beiden Maßen auf, aber diesmal gleichmäßiger, bis an die Grenze verteilt.
- In höheren Dimensionen ist die Energieskalierung bestimmt durch Energiebeiträge, welche bei μ_0 und μ_1 konzentriert sind.

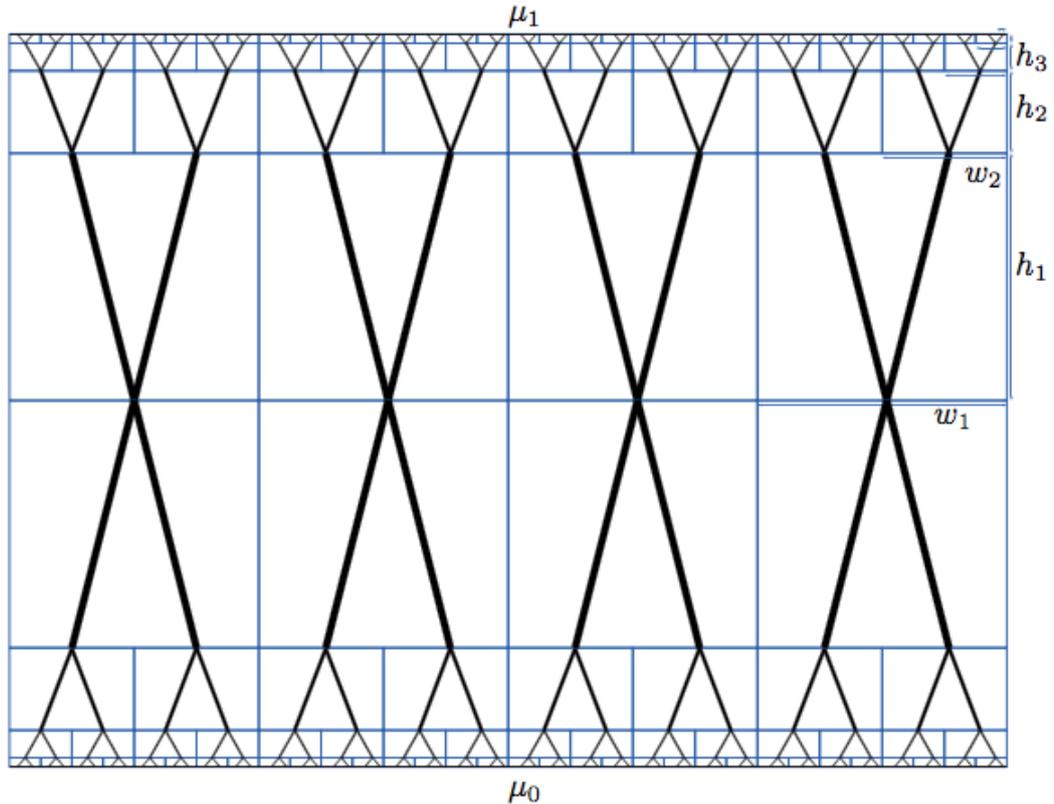


Abbildung 2.5: Konstruktion eines Netzwerkes mit Einheitszellen mit Zellbreite w_k und Höhe h_k , dessen Grenzen durch die dünnen blauen Linien gekennzeichnet sind. Hier ist die Einheitszelle eine V-geformte Struktur (in Anlehnung an [BW15b]).

Alle Energieskalierungen werden durch das Verfolgen von Abwandlungen eines generellen Schemas erhalten, welches ursprünglich von Kohn und Müller in 1992 [KM92] eingeführt wurde, um Martensit-Austenit-Übergänge zu modellieren:

Die obere Schranke basiert auf einer Konstruktion mit Einheitszellen, welche in hierarchischen Schichten angeordnet sind (siehe Abb. 2.5). Die Einheitszellen, welche der Gebietsgrenze am nächsten sind, sind die kleinsten und von Schicht zu Schicht verdoppelt sich die Zellbreite und führt somit zu einer Vergrößerung im Zentrum des Gebiets. Jede einzelne Einheitszelle enthält eine verzweigte Struktur, welche kompatibel mit der Verdopplung der Zellbreite ist

Die freien Gestaltungsparameter sind die Breiten der Einheitszellen auf dem größten und feinsten Level sowie die Streckung der Einheitszellen auf jedem Level.

Wegen $\varepsilon > 0$, kann die Überschussenergie für jede einzelne Einheitszelle als Funktion der Gestaltungsparameter berechnet werden und die Summe der Überschussenergie aller Einheitszellen liefert die gesamte Überschussenergie. Durch Minimierung über die Gestaltungsparameter erhält man die optimale Konstruktion und Energieskalierung. Das detaillierte Verfahren wird in Kapitel 3 beschrieben.

KAPITEL 3

Obere Schranke mittels verzweigter Konstruktion

In diesem Kapitel werden wir Konstruktionen von Transportnetzwerken mit erforderlicher Energieskalierung bilden. Diese Konstruktionen werden aus Elementarzellen bestehen, welche in hierarchischen Schichten angeordnet sind. Die einzelnen Elementarzellen werden wir jeweils durch ein Irrigation Pattern beschreiben. Aus diesem Grund werden zunächst in Kapitel 3.1 einige Operationen definiert, mit deren Hilfe mehrere Irrigation Pattern zu einem Einigen zusammengesetzt werden können. Anschließend werden wir in Kapitel 3.2 die einzelnen Elementarzellen und in Kapitel 3.3 die optimale Konstruktion für das „urban planning“-Problem definieren und analysieren.

3.1 Operationen mit Pattern

Unsere Konstruktionen werden Kombinationen von Irrigation Pattern benötigen. Diese Operationen werden in Definition 3.1.1 und 3.1.2 eingeführt.

Definition 3.1.1 (Vereinigung von Pattern). *Sei $\chi_i : \Gamma_i \times I \rightarrow \mathbb{R}^n, i \in N \subset \mathbb{N}$, eine Folge von Irrigation Pattern mit Referenzräumen $(\Gamma_i, \mathcal{B}(\Gamma_i)P_{\Gamma_i})$. Nehme an, dass $\sum_i P_{\Gamma_i}(\Gamma_i) < +\infty$. Sei Γ die disjunkte Vereinigung der Γ_i ,*

$$\Gamma = \coprod_{i \in N} \Gamma_i,$$

ausgestattet mit der Produkttopologie und der zugehörigen Borel-Algebra. Zusätzlich betrachte das Maß P_Γ definiert durch

$$P_\Gamma(A) = \sum_{i \in N} P_{\Gamma_i}(A \cap \Gamma_i).$$

Das Irrigation Pattern $\chi : \Gamma \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\chi(p, t) = \chi_i(p, t), \text{ falls } p \in \Gamma_i,$$

wird Vereinigung der Pattern χ_i genannt und mit $\chi = \coprod_i \chi_i$ bezeichnet.

Als Nächstes schließen wir zwei Pattern in Serie aneinander. Hier reist jeder Partikel p zunächst entlang eines Pfades definiert durch χ_1 und anschließend weiter auf einem Pfad definiert durch χ_2 .

Definition 3.1.2 (Serie von Pattern). *Seien $\chi_i : \Gamma_i \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ für $i = 1, 2$ zwei Irrigation Pattern und $T : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ ein Isomorphismus zwischen Maßräumen, sodass*

$$\chi_1(p, 1) = \chi_2(T(p), 0) \text{ für } P_\Gamma\text{-fast alle } p \in \Gamma_1.$$

Definiere nun das Irrigation Pattern $\tilde{\chi} : \Gamma_1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{\chi}(p, t) = \begin{cases} \chi_1(p, 2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \chi_2(T(p), 2t - 1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Zusätzlich sei für $p \in \Gamma_1$ $r_p : I \rightarrow I$ eine Reparametrisierung, sodass $\chi(p, t) = \tilde{\chi}(p, r_p(t))$ eine konstante Geschwindigkeit $|\dot{\chi}_p|$ für fast alle $p \in \Gamma_1$ hat. Das Irrigation Pattern χ wird T -relative Reihe von Pattern χ_1 und χ_2 genannt und wird mit $\chi_1 \circ_T \chi_2$ bezeichnet.

Mit Hilfe der eingeführten Operationen werden wir später ein Transportnetzwerk konstruieren. Zur Abschätzung der Energie dieses Netzwerkes verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma 3.1.3 (Elementare Eigenschaften). *Die „urban planning“-Energie $E_P^{\varepsilon, a}$ erfüllt folgende elementare Eigenschaften:*

- (i) $E_P^{\varepsilon, a}(\chi_1 \amalg \chi_2) \leq E_P^{\varepsilon, a}(\chi_1) + E_P^{\varepsilon, a}(\chi_2)$,
- (ii) $E_P^{\varepsilon, a}(\chi_1 \circ_T \chi_2) \leq E_P^{\varepsilon, a}(\chi_1) + E_P^{\varepsilon, a}(\chi_2)$,
- (iii) $\mu_+^{\chi_1} \amalg \chi_2 = \mu_+^{\chi_1} + \mu_+^{\chi_2}$, $\mu_-^{\chi_1} \amalg \chi_2 = \mu_-^{\chi_1} + \mu_-^{\chi_2}$,
- (iv) $\mu_+^{\chi_1 \circ_T \chi_2} = \mu_+^{\chi_1}$, $\mu_-^{\chi_1 \circ_T \chi_2} = \mu_-^{\chi_2}$,

wobei Gleichheit genau dann gilt, falls sich die Pattern nicht überschneiden.

Beweis.

- (i) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt die Vereinigung zweier Pattern χ_1 und χ_2

$$m_{\chi_1 \amalg \chi_2}(x) \geq m_{\chi_1}(x) \quad \text{und} \quad m_{\chi_1 \amalg \chi_2}(x) \geq m_{\chi_2}(x).$$

Somit ist

$$r_{\varepsilon, a}^{\chi_1} \amalg \chi_2(x) \leq r_{\varepsilon, a}^{\chi_1}(x) \quad \text{und} \quad r_{\varepsilon, a}^{\chi_1} \amalg \chi_2(x) \leq r_{\varepsilon, a}^{\chi_2}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn sich die Pattern nicht überschneiden.

Damit folgt mit der Definition von $E_P^{\varepsilon, a}$

$$\begin{aligned} E_P^{\varepsilon, a}(\chi_1 \amalg \chi_2) &= \int_{\Gamma} \int_I r_{\varepsilon, a}^{\chi_1} \amalg \chi_2((\chi_1 \amalg \chi_2)_p(t)) \left| \frac{d}{dt}((\chi_1 \amalg \chi_2)_p(t)) \right| dt dP_{\Gamma}(p) \\ &= \int_{\Gamma_1} \int_I r_{\varepsilon, a}^{\chi_1} \amalg \chi_2((\chi_1 \amalg \chi_2)_p(t)) \left| \frac{d}{dt}((\chi_1 \amalg \chi_2)_p(t)) \right| dt dP_{\Gamma_1}(p) \\ &\quad + \int_{\Gamma_2} \int_I r_{\varepsilon, a}^{\chi_1} \amalg \chi_2((\chi_1 \amalg \chi_2)_p(t)) \left| \frac{d}{dt}((\chi_1 \amalg \chi_2)_p(t)) \right| dt dP_{\Gamma_2}(p) \\ &\leq \int_{\Gamma_1} \int_I r_{\varepsilon, a}^{\chi_1}((\chi_1 \amalg \chi_2)_p(t)) \left| \frac{d}{dt}((\chi_1 \amalg \chi_2)_p(t)) \right| dt dP_{\Gamma_1}(p) \\ &\quad + \int_{\Gamma_2} \int_I r_{\varepsilon, a}^{\chi_2}((\chi_1 \amalg \chi_2)_p(t)) \left| \frac{d}{dt}((\chi_1 \amalg \chi_2)_p(t)) \right| dt dP_{\Gamma_2}(p) \\ &= \int_{\Gamma_1} \int_I r_{\varepsilon, a}^{\chi_1}(\chi_{1p}(t)) |\dot{\chi}_{1p}(t)| dt dP_{\Gamma_1}(p) \\ &\quad + \int_{\Gamma_2} \int_I r_{\varepsilon, a}^{\chi_2}(\chi_{2p}(t)) |\dot{\chi}_{2p}(t)| dt dP_{\Gamma_2}(p) \\ &= E_P^{\varepsilon, a}(\chi_1) + E_P^{\varepsilon, a}(\chi_2). \end{aligned}$$

(ii) Sei $\chi = \chi_1 \circ_T \chi_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
E_P^{\varepsilon,a}(\chi) &= \int_{\Gamma_1} \int_I r_{\varepsilon,a}^{\chi}(\chi_p(t)) |\dot{\chi}_p(t)| dt dP_{\Gamma_1}(p) \\
&= \int_{\Gamma_1} \int_I r_{\varepsilon,a}^{\tilde{\chi}}(\tilde{\chi}_p(r_p(t))) |\dot{\tilde{\chi}}_p(r_p(t))| dt dP_{\Gamma_1}(p) \\
&= \int_{\Gamma_1} \int_I r_{\varepsilon,a}^{\tilde{\chi}}(\tilde{\chi}_p(t)) |\dot{\tilde{\chi}}_p(t)| dt dP_{\Gamma_1}(p) \\
&= \int_{\Gamma_1} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} r_{\varepsilon,a}^{\tilde{\chi}}(\tilde{\chi}_p(t)) |\dot{\tilde{\chi}}_p(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 r_{\varepsilon,a}^{\tilde{\chi}}(\tilde{\chi}_p(t)) |\dot{\tilde{\chi}}_p(t)| dt \right] dP_{\Gamma_1}(p) \\
&\leq \int_{\Gamma_1} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} r_{\varepsilon,a}^{\chi_1}(\tilde{\chi}_p(t)) |\dot{\tilde{\chi}}_p(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 r_{\varepsilon,a}^{\chi_2}(\tilde{\chi}_p(t)) |\dot{\tilde{\chi}}_p(t)| dt \right] dP_{\Gamma_1}(p) \\
&= \int_{\Gamma_1} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} r_{\varepsilon,a}^{\chi_1}(\chi_{1_p}(2t)) |\dot{\chi}_{1_p}(2t)| dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 r_{\varepsilon,a}^{\chi_2}(\chi_{2_{T(p)}}(2t-1)) |\dot{\chi}_{2_{T(p)}}(2t-1)| dt \right] dP_{\Gamma_1}(p) \\
&= \int_{\Gamma_1} \int_0^1 r_{\varepsilon,a}^{\chi_1}(\chi_{1_p}(t)) |\dot{\chi}_{1_p}(t)| dt dP_{\Gamma_1}(p) + \int_{\Gamma_1} \int_0^1 r_{\varepsilon,a}^{\chi_2}(\chi_{2_{T(p)}}(t)) |\dot{\chi}_{2_{T(p)}}(t)| dt dP_{\Gamma_1}(p) \\
&= \int_{\Gamma_1} \int_0^1 r_{\varepsilon,a}^{\chi_1}(\chi_{1_p}(t)) |\dot{\chi}_{1_p}(t)| dt dP_{\Gamma_1}(p) + \int_{\Gamma_2} \int_0^1 r_{\varepsilon,a}^{\chi_2}(\chi_{2_p}(t)) |\dot{\chi}_{2_p}(t)| dt dP_{\Gamma_2}(p) \\
&= E_P^{\varepsilon,a}(\chi_1) + E_P^{\varepsilon,a}(\chi_2),
\end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt Proposition 2.4.2 verwendet und im vorletzten Schritt benutzt haben, dass ein Isomorphismus zwischen Maßräumen maßerhaltend ist.

(iii) Für alle $A \subset \Gamma$ gilt

$$\begin{aligned}
\mu_+^{\chi_1 \amalg \chi_2}(A) &= (i_0^{\chi_1 \amalg \chi_2})_{\#} P_{\Gamma}(A) \\
&= P_{\Gamma}((i_0^{\chi_1 \amalg \chi_2})^{-1}(A)) \\
&= P_{\Gamma_1}((i_0^{\chi_1 \amalg \chi_2})^{-1}(A)) + P_{\Gamma_2}((i_0^{\chi_1 \amalg \chi_2})^{-1}(A)) \\
&= P_{\Gamma_1}((i_0^{\chi_1})^{-1}(A)) + P_{\Gamma_2}((i_0^{\chi_2})^{-1}(A)) \\
&= \mu_+^{\chi_1}(A) + \mu_+^{\chi_2}(A).
\end{aligned}$$

Analog folgt $\mu_-^{\chi_1 \amalg \chi_2}(A) = \mu_-^{\chi_1} + \mu_-^{\chi_2}(A)$.

(iv) Für alle $A \subset \Gamma$ gilt

$$\begin{aligned}
\mu_+^{\chi_1 \circ_T \chi_2}(A) &= (i_0^{\chi_1 \circ_T \chi_2})_{\#} P_{\Gamma_1}(A) \\
&= P_{\Gamma_1}((i_0^{\chi_1 \circ_T \chi_2})^{-1}(A)) \\
&= P_{\Gamma_1}((i_0^{\chi_1})^{-1}(A)) \\
&= \mu_+^{\chi_1}(A)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mu_-^{\chi_1^{\circ T} \chi_2}(A) &= (i_1^{\chi_1^{\circ T} \chi_2})_{\#} P_{\Gamma_1}(A) \\
&= P_{\Gamma_1}((i_1^{\chi_1^{\circ T} \chi_2})^{-1}(A)) \\
&= P_{\Gamma_1}((i_1^{\chi_2})^{-1}(A)) \\
&= \mu_-^{\chi_2}(A).
\end{aligned}$$

□

3.2 Elementarzellen

Unsere Konstruktion des Transportnetzwerkes wird aus zwei verschiedenen Typen von Zellen bestehen (siehe Abb. 3.1). An dieser Stelle führen wir zunächst diese beiden elementaren Irrigation Pattern ein und werden anschließend deren „urban planning“-Kosten berechnen bzw. abschätzen.

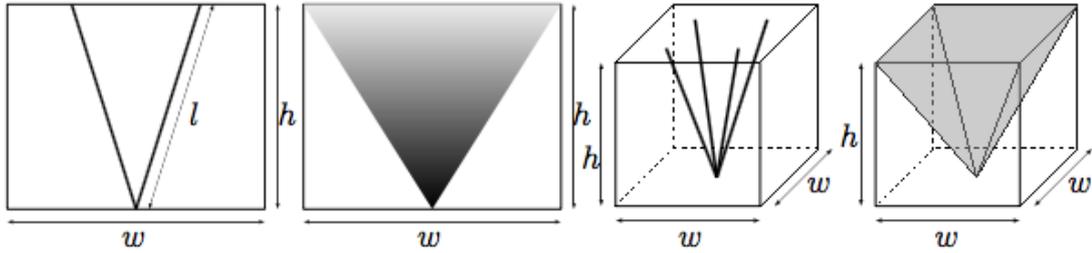


Abbildung 3.1: Elementar- und Wassersteinzellen in 2D und 3D (entnommen aus [BW15b])

Als Erstes wollen wir die Elementarzelle vorstellen. Diese werden wir später verwenden, um die inneren Schichten unseres Netzwerkes aufzubauen.

Definition 3.2.1 (Elementarzelle in nD). Sei $\Gamma_{-1} = [-1, 0]$, $\Gamma_{+1} = (0, 1]$ und definiere für einen Multiindex $j \in \{-1, 1\}^{n-1}$ das Einheitsquadrat

$$\Gamma_j = \bigotimes_{i=1}^{n-1} \Gamma_{j_i}$$

im Orthant definiert durch j . Sein Mittelpunkt wird mit $m_j = \frac{1}{2}j \in \mathbb{R}^{n-1}$ bezeichnet. Die Elementarzelle mit Basispunkt $x = (x', x_n)$, Breite w , Höhe h und Fluss f ist definiert als Tripel $(\Gamma_f, P_{\Gamma_f}, \chi_{x,w,h,f}^E)$ für den Referenzraum $\Gamma_f = [-1, 1]^{n-1} = \cup_{j \in \{-1, 1\}^{n-1}} \Gamma_j$, das Referenzmaß $P_{\Gamma_f} = f \mathcal{L}^{n-1} \llcorner \Gamma_f$ und das Irrigation Pattern $\chi_{x,w,h,f}^E : \Gamma_f \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\chi_{x,w,h,f}^E(p, t) = (x' + t \frac{w}{2} m_j, x_n + th) \quad \text{für } p \in \Gamma_f.$$

Das Ursprungs- und Zielmaß der Elementarzelle sind gegeben durch

$$\mu_+^{\chi_{x,w,h,f}^E} = 2^{n-1} f \delta_x, \quad \mu_-^{\chi_{x,w,h,f}^E} = f \sum_{j \in \{-1, 1\}^{n-1}} \delta_x(x' + \frac{w}{2} m_j, x_n + h).$$

Aus der Definition des Irrigation Patterns $\chi_{x,w,h,f}^E$ ist leicht abzulesen, dass dessen Bild aus 2^{n-1} Zweigen besteht. Die Länge dieser Zweige ist gegeben durch

$$l = \left| \begin{pmatrix} x' + \frac{w}{2}m_j \\ x_n + h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ x_n \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{w}{2} \frac{1}{2}j \\ h \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(n-1)\left(\frac{w}{4}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{n-1}{16}w^2 + h^2}. \quad (3.1)$$

Des Weiteren können wir feststellen, dass das Bild von $\chi_{x,w,h,f}^E$ komplett enthalten ist in

$$E = x + \left(\left[-\frac{w}{2}, \frac{w}{2} \right]^{n-1} \times [0, h] \right)$$

und sich das Ursprungs- bzw. das Zielmaß der Elementarzelle auf die untere bzw. obere Grenze von E konzentriert.

Um später die Energie unseres Netzwerkes abschätzen zu können, müssen wir die „urban planning“-Kosten einer Elementarzelle kennen.

Lemma 3.2.2 (Kosten der Elementarzelle). *Die „urban planning“-Energie einer Elementarzelle erfüllt*

$$E_P^{\varepsilon,a}(\chi_{x,w,h,f}^E) = 2^{n-1} \min\{af, f + \varepsilon\}l$$

für l wie in (3.1).

Beweis. Dies ist eine einfache Rechnung, bei der $\chi_{x,w,h,f}^E$ und P_{Γ_f} in Definition 2.4.1 eingesetzt werden. Zusätzlich wird benutzt, dass die Masse, welche durch jeden Punkt \tilde{x} eines Zweiges fließt, entsprechend der Definition des Ursprungs- und Zielmaßes der Elementarzelle, gegeben ist durch $m_{\chi_{x,w,h,f}^E}(\tilde{x}) = f$.

$$\begin{aligned} E_P^{\varepsilon,a}(\chi_{x,w,h,f}^E) &= \int_{\Gamma_f} \int_0^1 r_{\varepsilon,a}^{\chi_{x,w,h,f}^E}(p,t) \left| \dot{\chi}_{x,w,h,f}^E(p,t) \right| dt dP_{\Gamma_f}(p) \\ &= \int_{\Gamma_f} \int_0^1 \min\left\{a, 1 + \frac{\varepsilon}{m_{\chi_{x,w,h,f}^E}(x)}\right\} \left| \left(\frac{w}{2}m_j, h\right) \right| dt dP_{\Gamma_f}(p) \\ &= \min\left\{a, 1 + \frac{\varepsilon}{f}\right\} \int_{\Gamma_f} \sqrt{\frac{w^2}{4}|m_j|^2 + h^2} df \mathcal{L}^{n-1} \llcorner \Gamma_f(p) \\ &= \min\left\{a, 1 + \frac{\varepsilon}{f}\right\} 2^{n-1} f \sqrt{\frac{w^2}{4} \frac{1}{4}|j|^2 + h^2} \\ &= 2^{n-1} \min\{af, f + \varepsilon\} \sqrt{\left(\frac{w}{4}\right)^2(n-1) + h^2} \\ &= 2^{n-1} \min\{af, f + \varepsilon\}l. \end{aligned}$$

□

Als zweiten Zellentyp wollen wir noch die Wassersteinzellen vorstellen, welche später die Schicht an der oberen und unteren Grenze unserer Konstruktion bilden werden.

Definition 3.2.3 (Wassersteinzelle in nD). *Die Wassersteinzelle mit Basispunkt $x = (x', x_n)$, Breite w , Höhe h und Fluss f ist definiert als Tripel $(\Gamma_f, P_{\Gamma_f}, \chi_{x,w,h,f}^W)$ für Γ_f und P_{Γ_f} wie in den vorherigen Definitionen und das Irrigation Pattern $\chi_{x,w,h,f}^W : \Gamma_f \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$,*

$$\chi_{x,w,h,f}^W(p, t) = (x' + t\frac{w}{2}p, x_n + th).$$

Das Ursprungs- und Zielmaß der Wassersteinzelle sind gegeben durch

$$\mu_+^{\chi_{x,w,h,f}^W} = 2^{n-1} f \delta_x, \quad \mu_-^{\chi_{x,w,h,f}^W} = f \left(\frac{w}{2}\right)^{1-n} \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \left(x + \left(\left[-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}\right] \times \{h\}\right)\right).$$

Wie bereits die Elementarzelle, ist auch die Wassersteinzelle komplett in E enthalten. Auch die „urban planning“-Kosten dieser Zelle werden später in unserer Energieabschätzung für das gesamte Transportnetzwerk relevant sein.

Lemma 3.2.4 (Wassersteinzelle: „urban planning“-Kosten). *Die „urban planning“-Energie einer Wassersteinzelle erfüllt*

$$E_P^{\varepsilon,a}(\chi_{x,w,h,f}^W) \leq \begin{cases} \min\{af, f + \varepsilon\}w & \text{falls } n = 2 \text{ und } h = 0, \\ 2^{n-1}af\sqrt{\frac{(n-1)}{4}w^2 + h^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Falls $n \neq 2$ oder $h \neq 0$ gilt $m_{\chi_{x,w,h,f}^W}(\tilde{x}) = 0$ für alle $\tilde{x} \neq x$. Somit erhalten wir mit Definition 2.4.1

$$\begin{aligned} E_P^{\varepsilon,a}(\chi_{x,w,h,f}^W) &= \int_{\Gamma_f} \int_0^1 r_{\varepsilon,a}^{\chi}(\chi_{x,w,h,f}^W(p, t)) |\chi_{x,w,h,f}^W(p, t)| dt dP_{\Gamma_f}(p) \\ &= a \int_{\Gamma_f} \int_0^1 \left|\left(\frac{w}{2}p, h\right)\right| dt dP_{\Gamma_f}(p) \\ &= a \int_{\Gamma_f} \sqrt{\frac{w^2}{4}|p|^2 + h^2} d\mathcal{L}^{n-1} \llcorner \Gamma_f(p) \\ &\leq a 2^{n-1} f \sqrt{\frac{\max(|p|^2)}{4} w^2 + h^2} \\ &= 2^{n-1} a f \sqrt{\frac{(n-1)}{4} w^2 + h^2} \end{aligned}$$

Für den Fall $n = 2, h = 0$ ist der Basispunkt der Wassersteinzelle gegeben durch $x = (x', x_2)$ und wir benutzen $m_{\chi_{x,w,h,f}^W}(\tilde{x}) = f(1 - \frac{|\tilde{x}_1 - x'|}{w/2})$ für alle $\tilde{x} \in (x' - \frac{w}{2}, x' + \frac{w}{2}) \times \{x_2\}$. Sei $\tilde{\chi}_{x,w,h,f}^W : \Gamma_f \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\tilde{\chi}_{x,w,h,f}^W(p, t) = \begin{cases} (x' + t\frac{w}{2}, x_2), & p > 0, \\ (x' - t\frac{w}{2}, x_2), & p \leq 0. \end{cases}$$

Dann ist $m_{\tilde{\chi}_{x,w,h,f}}^W(\tilde{x}) = f$ für alle $\tilde{x} \in (x' - \frac{w}{2}, x' + \frac{w}{2}) \times \{x_2\}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} & \int_{x' - \frac{w}{2}}^{x' + \frac{w}{2}} r_{\varepsilon,a}^{\tilde{\chi}}(\tilde{x}) m_{\tilde{\chi}_{x,w,h,f}}^W(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ & \leq \int_{x' - \frac{w}{2}}^{x' + \frac{w}{2}} r_{\varepsilon,a}^{\tilde{\chi}}(\tilde{x}) m_{\tilde{\chi}_{x,w,h,f}}^W(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ & = \int_{x' - \frac{w}{2}}^{x' + \frac{w}{2}} \min\{a, 1 + \frac{\varepsilon}{f}\} f d\tilde{x} \\ & = \min\{af, f + \varepsilon\} w. \end{aligned}$$

□

3.3 Obere Schranke für die optimale „urban planning“-Energie $\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A}$

Um eine obere Schranke für die optimale „urban planning“-Energie herzuleiten, müssen wir uns ein Transportnetzwerk mit der gewünschten Energie konstruieren. Dieses wird durch ein Irrigation Pattern repräsentiert, welches aus vielen Irrigation Pattern zusammengesetzt ist, die jeweils eine Elementar- oder Wassersteinzelle beschreiben (siehe Abb. 3.2).

Da das Pattern symmetrisch ist bzgl. $x_n = \frac{1}{2}$, werden wir im Folgenden nur die obere Hälfte χ_u betrachten. Diese besteht aus K Schichten, wobei die k -te Schicht eine Anordnung von N_k^{n-1} identischen Elementarzellen repräsentiert. An der oberen Grenze wird eine zusätzliche Schicht von Wassersteinzellen hinzugefügt.

Dies wollen wir uns nun genauer im Rahmen unserer speziellen Geometrie (siehe Kap. 2.5 und 2.6) anschauen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass das Hyperquadrat A mit Seitenlänge $l = \sqrt[n-1]{\mathcal{H}^{n-1}(A)}$ gegeben ist durch

$$A = [0, l]^{n-1}.$$

Es bezeichne $x_{k,i}$ den Basispunkt, w_k die Breite, h_k die Höhe und f_k den zur i -ten Elementarzelle zugehörigen Fluss in der k -ten Schicht, wobei $i \in \{1, \dots, N_k\}^{n-1}$ ein Multiindex ist. Dann wählen wir

$$\begin{aligned} w_k &= 2^{1-k} w_1, & N_k &= \frac{l}{w_k}, & f_k &= \left(\frac{w_k}{2}\right)^{n-1}, \\ h_k &= c w_k^\alpha \varepsilon^\beta a^\gamma (a-1)^\delta, & x_{k,i} &= \left(\left(i_1 - \frac{1}{2}\right) w_k, \dots, \left(i_{n-1} - \frac{1}{2}\right) w_k, \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} h_j \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

für die größte Zellbreite w_1 und einige zu bestimmende Konstanten $c, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

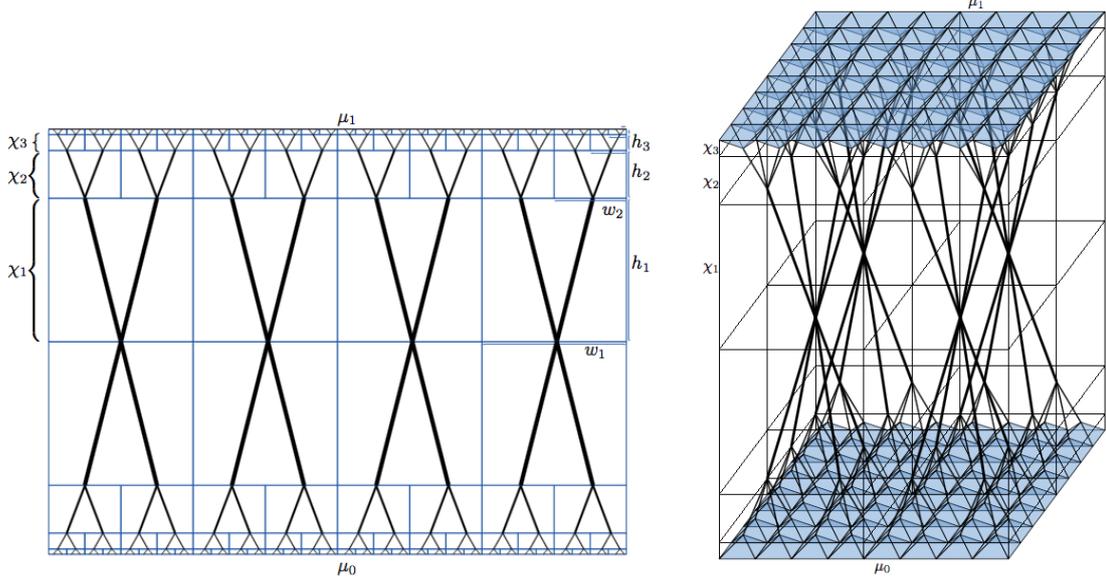


Abbildung 3.2: Skizze der Konstruktionsansätze im Zwei- und Dreidimensionalen. Die dünnen Linien deuten die Grenzen der Elementarzellen an. Zudem repräsentieren in der dreidimensionalen Konstruktion die blau hinterlegten Flächen die Wassersteinzellen (entnommen aus [BW15b]).

Nun definieren wir das Irrigation Pattern, welches die k -te Schicht beschreibt, als Vereinigung der Elementarzellen dieser Schicht, d.h.

$$\chi_k = \coprod_{i \in \{1, \dots, N_k\}^{n-1}} \chi_{x_{k,i}, w_k, h_k, f_k}^E$$

Analog definieren wir die oberste Schicht der Wassersteinzellen als

$$\chi_{K+1} = \coprod_{i \in \{1, \dots, N_k\}^{n-1}} \chi_{x_{K+1,i}, w_{K+1}, H, f_{K+1}}^W$$

für ein $K \in \mathbb{N}, H \in \mathbb{R}$.

Bemerke, dass für $k = 1, \dots, K + 1$ der Referenzraum von χ_k die disjunkte Vereinigung

$$\Gamma_k = \coprod_{i \in \{1, \dots, N_k\}^{n-1}} \Gamma_{f_k}^i$$

ist, wobei $\Gamma_{f_k}^i$ eine Kopie von Γ_{f_k} bezeichnet.

Um nun die Irrigation Pattern der verschiedenen Schichten aneinanderzureihen, benötigen wir noch folgende Proposition. Dabei sei der Punkt $\tilde{x}_{k,i}$ so definiert, dass gilt

$$\left(\tilde{x}_{k,i}, \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} h_j \right) = x_{k,i}.$$

Proposition 3.3.1. Die Funktion $T_k : \Gamma_k \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\Gamma_{f_k}^i \ni p \mapsto \tilde{x}_{k,i} + \frac{w_k}{2}p,$$

ist eine maßerhaltende Abbildung vom ursprünglichen Referenzraum Γ_k nach $(A, \mathcal{B}(A), \mathcal{L}^{n-1} \llcorner A)$.

Beweis. Da die Abbildung T_k stetig ist, ist sie messbar.

Weiter sei $B \subset \mathcal{B}(A)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P_{\Gamma_{f_k}}(T^{-1}(B)) &= f_k \mathcal{L}^{n-1} \llcorner \Gamma_{f_k} \left(-\tilde{x}_{k,i} + \left(\frac{w_k}{2} \right)^{-1} B \right) \\ &= f_k \mathcal{L}^{n-1} \llcorner \left(\tilde{x}_{k,i} + [-1, 1]^{n-1} \right) \left(\left(\frac{w_k}{2} \right)^{-1} B \right) \\ &= \left(\frac{w_k}{2} \right)^{n-1} \left(\left(\frac{w_k}{2} \right)^{-1} \right)^{n-1} \mathcal{L}^{n-1} \llcorner \left(\tilde{x}_{k,i} + \left[-\frac{w_k}{2}, \frac{w_k}{2} \right]^{n-1} \right) (B) \\ &= \mathcal{L}^{n-1} \llcorner A(B). \end{aligned}$$

Somit ist $T_k : \Gamma_k \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ eine maßerhaltende Abbildung.

Da für alle $p \in \Gamma_k$ gilt

$$T_k(p) = \tilde{x}_{k,i} + \frac{w_k}{2}p \in A,$$

folgt die Behauptung. □

Wegen dieser Proposition können wir nun die Partikel in Γ_k durch die Abbildung T_k mit Partikeln in A identifizieren und können $(A, \mathcal{B}(A), \mathcal{L}^{n-1} \llcorner A)$ als Referenzraum von χ_k nehmen. Dies vereinfacht die Komposition unserer Pattern, da nun

$$\chi_k(p, 1) = \chi_{k+1}(p, 0) \text{ für fast alle } p \in A$$

gilt. Die obere Hälfte unseres Irrigation Patterns können wir somit definieren als

$$\chi_u = ((\dots((\chi_1 \circ_{Id} \chi_2) \circ_{Id} \chi_3) \circ_{Id} \dots) \circ_{Id} \chi_{K+1}),$$

indem wir Definition 3.1.2 mit der Identitätsabbildung $Id : A \rightarrow A$ benutzen.

Das Irrigation Pattern der unteren Hälfte χ_l wird analog konstruiert und das gesamte Irrigation Pattern ist definiert als

$$\chi = \chi_l \circ_{Id} \chi_u.$$

Wie in Kapitel 2.6 festgelegt, beschränken wir uns hier auf die Situation, dass die beiden Hyperquadrate, welche durch unser konstruiertes Transportnetzwerk verbunden werden, den Abstand 1 besitzen. Unsere Konstruktion muss also eine Gesamthöhe von 1 haben. Wir werden sehen, dass diese Bedingung bereits die Breite der gröbsten Elementarzelle w_1 festlegt.

Da also die Summe der Höhen aller Schichten 1 sein muss, gilt

$$\begin{aligned}
1 &= 2 \left(\sum_{k=1}^K h_k + H \right) \\
&= 2 \left(\sum_{k=1}^K c w_k^\alpha \varepsilon^\beta a^\gamma (a-1)^\delta + H \right) \\
&= 2 \left(\sum_{k=1}^K c (2^{1-k} w_1)^\alpha \varepsilon^\beta a^\gamma (a-1)^\delta + H \right) \\
&= 2 c w_1^\alpha \varepsilon^\beta a^\gamma (a-1)^\delta \sum_{k=1}^K (2^{1-k})^\alpha + 2H \\
&= 2 c w_1^\alpha \varepsilon^\beta a^\gamma (a-1)^\delta \sum_{k=0}^{K-1} 2^{-\alpha k} + 2H \\
&= 2 c w_1^\alpha \varepsilon^\beta a^\gamma (a-1)^\delta \frac{1 - 2^{-K\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}} + 2H. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Im Folgenden werden wir verwenden, dass die Konstanten α und β ungleich 0 sind. Später werden wir sehen, dass wir in unseren Beweisen die beiden Konstanten tatsächlich immer so wählen werden, dass diese Einschränkung nicht verletzt wird.

Angenommen, $1 - 2H$ sei immer noch von Ordnung 1, dann erhalten wir $w_1 \sim \varepsilon^{-\frac{\beta}{\alpha}} a^{-\frac{\gamma}{\alpha}} (a-1)^{-\frac{\delta}{\alpha}}$. Basierend auf diesen Heuristiken wählen wir

$$w_1 = \tilde{c} \varepsilon^{-\frac{\beta}{\alpha}} a^{-\frac{\gamma}{\alpha}} (a-1)^{-\frac{\delta}{\alpha}} \text{ für } \tilde{c} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \tag{3.4}$$

Dabei ist \tilde{c} so gewählt, dass die Seitenlänge des Hyperquadrates l ein ganzzahlig Vielfaches von w_1 ist. Insbesondere setzt dies $w_1 \leq l$ voraus. Dadurch erhalten wir für all unsere Konstruktionen folgende Bedingungen an ε :

$$\begin{aligned}
&w_1 \leq l \\
\Rightarrow \quad &\varepsilon^{-\frac{\beta}{\alpha}} a^{-\frac{\gamma}{\alpha}} (a-1)^{-\frac{\delta}{\alpha}} \leq \sqrt[n-1]{\mathcal{H}^{n-1}(A)} \\
\Leftrightarrow \quad &\varepsilon^{-\frac{\beta}{\alpha}} \leq a^{\frac{\gamma}{\alpha}} (a-1)^{\frac{\delta}{\alpha}} \mathcal{H}^{n-1}(A)^{\frac{1}{n-1}} \\
\Leftrightarrow \quad &\varepsilon \leq a^{-\frac{\gamma}{\beta}} (a-1)^{-\frac{\delta}{\beta}} \mathcal{H}^{n-1}(A)^{-\frac{\alpha}{\beta(n-1)}}. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (3.4) in (3.3) können wir nun den Wert für unsere Konstante c erhalten:

$$\begin{aligned}
1 &= 2 c w_1^\alpha \varepsilon^\beta a^\gamma (a-1)^\delta \frac{1 - 2^{-K\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}} + 2H \\
\Leftrightarrow \quad &1 = 2 c \tilde{c}^\alpha \varepsilon^{-\beta} a^{-\gamma} (a-1)^{-\delta} \varepsilon^\beta a^\gamma (a-1)^\delta \frac{1 - 2^{-K\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}} + 2H \\
\Leftrightarrow \quad &1 - 2H = 2 c \tilde{c}^\alpha \frac{1 - 2^{-K\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}} \\
\Leftrightarrow \quad &c = \frac{1 - 2H}{2 \tilde{c}^\alpha} \frac{1 - 2^{-\alpha}}{1 - 2^{-K\alpha}} \quad \text{für } \tilde{c} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

In all unseren Konstruktionen werden zusätzlich die Bedingungen

$$K \geq 1, \quad H \leq \frac{1}{4}, \quad \alpha > 0 \quad (3.7)$$

sichergestellt sein. Somit garantieren wir, dass das konstruierte Netzwerk eine verzweigte Struktur aufweist und die Breite der größten Elementarzelle tatsächlich bereits durch die Gesamthöhe unserer Konstruktion festgesetzt ist.

Mit den Bedingungen aus (3.7) gilt

$$\frac{1-2H}{2\tilde{c}^\alpha} \frac{1-2^{-\alpha}}{1-2^{-K\alpha}} \leq \frac{1}{2(\frac{1}{2})^{\alpha-1}} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^{\alpha-1}} = 2^{\alpha-1}$$

und

$$\frac{1-2H}{2\tilde{c}^\alpha} \frac{1-2^{-\alpha}}{1-2^{-K\alpha}} > \frac{\frac{1}{2}}{2} \frac{1-2^{-\alpha}}{1-2^{-K\alpha}} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \frac{1-2^{-\alpha}}{4}.$$

Also ist

$$c = \frac{1-2H}{2\tilde{c}^\alpha} \frac{1-2^{-\alpha}}{1-2^{-K\alpha}} \in \left[\frac{1-2^{-\alpha}}{4}, 2^{\alpha-1} \right].$$

Nun können wir die Energie unseres Netzwerkes, welches durch das Irrigation Pattern χ repräsentiert wird, abschätzen.

Bevor wir jedoch mit den Beweisen der oberen Schranke der „urban planning“-Energie für die einzelnen Dimensionen beginnen, werden wir an dieser Stelle noch etwas Vorarbeit leisten, da wir für jede Dimension den Beweis der oberen Schranke mit folgender allgemeiner Abschätzung (3.8) einleiten können.

Aufgrund der Symmetrie unserer Konstruktion und Lemma 3.1.3 gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A}[\chi] &= 2E_P^{\varepsilon, a}[\chi_u] \\ &= 2 \left[\sum_{k=1}^K \sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}^{n-1}} E_P^{\varepsilon, a} \chi_{x_k, i, w_k, h_k, f_k}^E + \sum_{i \in \{1, \dots, N_{K+1}\}^{n-1}} E_P^{\varepsilon, a} [\chi_{x_{K+1}, i, w_{K+1}, H, f_{K+1}}^W] \right]. \end{aligned}$$

Mit $2(\sum_{k=1}^K h_k + H) = 1$, der Bedingung, dass die Gesamthöhe unserer Konstruktion 1 ist, $N_k = \frac{l}{w_k}$ und Lemma 2.6.1 können wir die Energie $\mathcal{E}^{*, a, A}$ schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{*, a, A} &= W_1(\mu_0, \mu_1) = \mathcal{H}^{n-1}(A) = l^{n-1} = l^{n-1} 2 \left(\sum_{k=1}^K h_k + H \right) \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^K l^{n-1} h_k + l^{n-1} H \right) = 2 \left(\sum_{k=1}^K N_k^{n-1} w_k^{n-1} h_k + N_{K+1}^{n-1} w_{K+1}^{n-1} H \right). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} &\leq \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A}[\chi] - \mathcal{E}^{*, a, A} \\
&= 2 \left[\sum_{k=1}^K \sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}^{n-1}} E_P^{\varepsilon, a} \left[\chi_{x_k, i, w_k, h_k, f_k}^E \right] + \sum_{i \in \{1, \dots, N_{K+1}\}^{n-1}} E_P^{\varepsilon, a} \left[\chi_{x_{K+1}, i, w_{K+1}, H, f_{K+1}}^W \right] \right. \\
&\quad \left. - N_k^{n-1} w_k^{n-1} h_k + N_{K+1}^{n-1} w_{K+1}^{n-1} H \right] \\
&\leq 2 \left[\sum_{k=1}^K \sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}^{n-1}} \left(E_P^{\varepsilon, a} \left[\chi_{x_k, i, w_k, h_k, f_k}^E \right] - w_k^{n-1} h_k \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i \in \{1, \dots, N_{K+1}\}^{n-1}} \left(E_P^{\varepsilon, a} \left[\chi_{x_{K+1}, i, w_{K+1}, H, f_{K+1}}^W \right] - w_{K+1}^{n-1} H \right) \right]. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

3.3.1 Obere Schranke in 2D

Die ersten Resultate, Theorem 3.3.2 und Korollar 3.3.3, beziehen sich auf den zweidimensionalen Fall.

Theorem 3.3.2 (Partielle obere Schranke von $\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A}$ in 2D). *Unter Verwendung der Notation von Kapitel 2.4 existiert ein $C > 0$, welches unabhängig ist von ε, a, A , sodass für alle $\varepsilon < \min\{1, \mathcal{H}^1(A)^3\}$ gilt*

$$\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} \leq \mathcal{H}^1(A) C \varepsilon^{\frac{2}{3}}.$$

Vor dem Beweis schauen wir uns noch ein Korollar an, welches direkt aus dem Theorem folgt.

Korollar 3.3.3. *Für dasselbe C wie zuvor, für alle $\varepsilon < \min\{1, \mathcal{H}^1(A)^3\}$ gilt*

$$\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} \leq \mathcal{H}^1(A) \min\{a - 1, C \varepsilon^{\frac{2}{3}}\}.$$

Beweis zu Korollar 3.3.3. Für das Irrigation Pattern $\chi : \Gamma \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\chi(p, t) = (p, t)$, mit Referenzraum $\Gamma = A$ und Referenzmaß $P_\Gamma = \mathcal{L}^1 \llcorner A$ gilt $\mathcal{E}^{\varepsilon, a, A}[\chi] = aW_1(\mu_0, \mu_1)$. Somit gilt mit Lemma 2.6.1

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} &= \min_{\chi} \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A}[\chi] - \mathcal{E}^{*, a, A} \\
&= \min_{\chi} \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A}[\chi] - W_1(\mu_0, \mu_1) \\
&\leq (a - 1)W_1(\mu_0, \mu_1) \\
&= \mathcal{H}^1(A)(a - 1).
\end{aligned}$$

Damit und mit Theorem 3.3.2 folgt die Behauptung. \square

Beweis zu Theorem 3.3.2. In der zweidimensionalen Konstruktion setzen wir die Höhe der obersten Schicht aus Wassersteinzellen gleich 0, d.h.

$$H = 0.$$

Durch Einsetzen von Lemma 3.2.2 und 3.2.4 in (3.8) erhalten wir zusammen mit den Definitionen in (3.2)

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} &\leq 2 \left[\sum_{k=1}^K \sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}^{n-1}} \left(E_P^{\varepsilon, a} \left[\chi_{x_k, i, w_k, h_k, f_k}^E \right] - w_k^{n-1} h_k \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i \in \{1, \dots, N_{K+1}\}^{n-1}} \left(E_P^{\varepsilon, a} \left[\chi_{x_{K+1}, i, w_{K+1}, H, f_{K+1}}^W \right] - w_{K+1}^{n-1} H \right) \right] \\
&= 2 \left[\sum_{k=1}^K \sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}} \left(2(f_k + \varepsilon) \sqrt{\frac{1}{16} w_k^2 + h_k^2} - w_k h_k \right) + \sum_{i \in \{1, \dots, N_{K+1}\}} (f_{K+1} + \varepsilon) w_{K+1} \right] \\
&= 2 \left[\sum_{k=1}^K N_k \left(2(f_k + \varepsilon) \sqrt{\frac{w_k^2}{16} + h_k^2} - w_k h_k \right) + N_{K+1} (f_{K+1} + \varepsilon) w_{K+1} \right] \\
&= 2l \left[\sum_{k=1}^K \frac{1}{w_k} \left(2(f_k + \varepsilon) \sqrt{\frac{w_k^2}{16} + h_k^2} - w_k h_k \right) + \frac{1}{w_{K+1}} (f_{K+1} + \varepsilon) w_{K+1} \right] \\
&= 2\mathcal{H}^1(A) \left[\sum_{k=1}^K \frac{1}{w_k} \left(2 \left(\frac{w_k}{2} + \varepsilon \right) \sqrt{\frac{w_k^2}{16} + h_k^2} - w_k h_k \right) + \left(\frac{w_{K+1}}{2} + \varepsilon \right) \right] \\
&= \mathcal{H}^1(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K h_k \left(\left(1 + \frac{2\varepsilon}{w_k} \right) \sqrt{1 + \frac{w_k^2}{16h_k^2}} - 1 \right) + \left(\frac{w_{K+1}}{2} + \varepsilon \right) \right] \\
&\leq \mathcal{H}^1(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K h_k \left(\left(1 + \frac{2\varepsilon}{w_k} \right) \left(1 + \frac{w_k^2}{32h_k^2} \right) - 1 \right) + \left(\frac{w_{K+1}}{2} + \varepsilon \right) \right] \\
&= \mathcal{H}^1(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K \left(h_k + \frac{w_k^2}{32h_k} + 2\varepsilon \frac{h_k}{w_k} + 2\varepsilon \frac{w_k}{32h_k} - h_k \right) + \left(\frac{w_{K+1}}{2} + \varepsilon \right) \right] \\
&= \mathcal{H}^1(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{w_k^2}{32h_k} + \varepsilon \frac{h_k}{w_k} \left(2 + \frac{w_k^2}{16h_k^2} \right) \right) + \left(\frac{w_{K+1}}{2} + \varepsilon \right) \right],
\end{aligned}$$

wobei wir im drittletzten Schritt $\sqrt{1+z} \leq 1 + \frac{z}{2}$ verwendet haben.

Da der Parameter a in dieser Abschätzung nicht explizit vorkommt, erwarten wir, dass

$$\gamma = 0 \quad \text{und} \quad \delta = 0$$

optimal sind.

Nun soll der Massefluss in jeder Elementarzelle eine vertikale Komponente haben, welcher in einer gewissen Relation zu der horizontalen Komponente steht. Deswegen werden wir die Schichtung nur solange fortführen, wie $2cw_k \leq h_k$ ist oder äquivalent, unter Annahme von

$\alpha > 1$, solange wie $2^{2-k}w_1 \geq \varepsilon^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$ ist.
Deswegen setzen wir

$$K = \lfloor 2 + \log_2 \left(w_1 \varepsilon^{\frac{\beta}{\alpha-1}} \right) \rfloor,$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ den ganzzahligen Teil bezeichnet.

Bemerke, dass wir später noch $K \geq 1$ nachweisen müssen (siehe (3.7)).

Somit gilt für alle $k \leq K$

$$2cw_k \leq h_k \quad \Leftrightarrow \quad 4 \frac{w_k^2}{h_k^2} \leq \frac{1}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{w_k^2}{16h_k^2} \leq \frac{1}{64c^2}$$

und

$$w_{K+1} = 2^{1-K-1}w_1 = 2^{-\lfloor 2 + \log_2 \left(w_1 \varepsilon^{\frac{\beta}{\alpha-1}} \right) \rfloor} w_1 < 2^{-\left(2 + \log_2 \left(w_1 \varepsilon^{\frac{\beta}{\alpha-1}} \right) - 1 \right)} w_1 = \frac{1}{2} \varepsilon^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \frac{w_1}{w_1} < \varepsilon^{\frac{\beta}{1-\alpha}}.$$

Damit kann die Überschussenergie abgeschätzt werden als

$$\begin{aligned} & \Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} \\ & \leq \mathcal{H}^1(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{w_k^2}{32h_k} + \varepsilon \frac{h_k}{w_k} \left(2 + \frac{w_k^2}{16h_k^2} \right) \right) + \left(\frac{w_{K+1}}{2} + \varepsilon \right) \right] \\ & \leq \mathcal{H}^1(A) \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{w_k^2}{16h_k} + \varepsilon \frac{h_k}{w_k} \left(4 + \frac{1}{32c^2} \right) \right) + \left(\varepsilon^{\frac{\beta}{1-\alpha}} + 2\varepsilon \right) \right] \\ & = \mathcal{H}^1(A) \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{16c} w_k^{2-\alpha} \varepsilon^{-\beta} + \varepsilon \frac{c w_k^\alpha \varepsilon^\beta}{w_k} \left(4 + \frac{1}{32c^2} \right) \right) + \left(\varepsilon^{\frac{\beta}{1-\alpha}} + 2\varepsilon \right) \right] \\ & = \mathcal{H}^1(A) \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{16c} \left(2^{1-k} w_1 \right)^{2-\alpha} \varepsilon^{-\beta} + \left(4c + \frac{1}{32c} \right) \left(2^{1-k} w_1 \right)^{2-\alpha} \varepsilon^{1+\beta} \right) + \left(\varepsilon^{\frac{\beta}{1-\alpha}} + 2\varepsilon \right) \right]. \end{aligned}$$

Um die Summanden zu minimieren, wählen wir nun die optimalen Exponenten

$$\alpha = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \beta = -\frac{1}{2}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} & \Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} \\ & \leq \mathcal{H}^1(A) \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{16c} \sqrt{2} 2^{-\frac{k}{2}} w_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \left(4c + \frac{1}{32c} \right) \sqrt{2} 2^{-\frac{k}{2}} w_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right) + (\varepsilon + 2\varepsilon) \right] \\ & = \mathcal{H}^1(A) \left[\sqrt{2} \left(\frac{3}{32c} + 4c \right) w_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^K 2^{-\frac{k}{2}} + 3\varepsilon \right] \\ & = \mathcal{H}^1(A) \left[\left(\frac{3}{32c} + 4c \right) w_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{K-1} 2^{-\frac{k}{2}} + 3\varepsilon \right] \\ & \leq \mathcal{H}^1(A) \left[\frac{2}{2 - \sqrt{2}} \left(\frac{3}{32c} + 4c \right) w_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + 3\varepsilon \right], \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Beschränktheit der geometrischen Summe ausgenutzt haben.

Durch Einsetzen der zuvor gewählten optimalen Exponenten in (3.4) erhalten wir für die grösste Zellbreite w_1 den Wert

$$w_1 = \tilde{c}\varepsilon^{-\frac{\beta}{\alpha}} a^{-\frac{\gamma}{\alpha}} (a-1)^{-\frac{\delta}{\alpha}} = \tilde{c}\varepsilon^{\frac{1}{3}}.$$

Damit können wir nun zeigen, dass unser gewähltes K tatsächlich die Bedingung $K \geq 1$ erfüllt:

$$\begin{aligned} K &= \lfloor 2 + \log_2 \left(w_1 \varepsilon^{\frac{\beta}{\alpha-1}} \right) \rfloor = \lfloor 2 + \log_2 \left(\tilde{c}\varepsilon^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{-1} \right) \rfloor = \lfloor 2 + \log_2 \left(\tilde{c}\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \right) \rfloor \\ &\geq 2 + \lfloor \log_2(\tilde{c}) \rfloor \geq 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Somit sind die Umsetzbarkeitskriterien (3.7) sichergestellt, während Bedingung (3.5) zu $\varepsilon \leq \mathcal{H}^1(A)^3$ wird.

Damit erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} &\leq \mathcal{H}^1(A) \left[\frac{2}{2 - \sqrt{2}} \left(\frac{3}{32c} + 4c \right) \tilde{c}^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{6}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + 3\varepsilon \right] \\ &\leq C \mathcal{H}^1(A) \varepsilon^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

für ein $C > 0$ das gewünschte Resultat. \square

3.3.2 Obere Schranke in 3D

Da die obere Schranke im Dreidimensionalen stark von dem Parameter a abhängig ist, werden wir hier die beiden Fälle „ a nahe 1“ und „ a groß“ getrennt voneinander, in Theorem 3.3.4 und Theorem 3.3.5, betrachten.

Theorem 3.3.4 (Obere Schranke für $\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A}$ in 3D für kleine a). *Unter Verwendung der Notation aus Kapitel 2.4 existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $a \leq 2$ und $\varepsilon \leq \min\{\frac{a^2(a-1)^2}{64}, \mathcal{H}^2(A)^2\}$ gilt*

$$\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} \leq \mathcal{H}^2(A) \sqrt{\varepsilon} C \left[\left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a(a-1)} \right) \right| + a(a-1) + 1 \right].$$

Theorem 3.3.5 (Obere Schranke für $\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A}$ in 3D für große a). *Es existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $\varepsilon \leq \min\{1, \mathcal{H}^2(A)^2\}$ gilt*

$$\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} \leq \mathcal{H}^2(A) \sqrt{\varepsilon} C \left[|\log_2(\sqrt{\varepsilon})| + \sqrt{a} + 1 \right].$$

Die beiden Theoreme, Theorem 3.3.4 und 3.3.5, können wir in folgendem Korollar zusammenfassen:

Korollar 3.3.6 (Obere Schranke für $\Delta\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A}$ in 3D). *Es existiert ein von a, ε, A unabhängiges $C > 0$, sodass für alle $\varepsilon \leq \min\{1, \mathcal{H}^2(A)^2\}$ gilt*

$$\Delta\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A} \leq \mathcal{H}^2(A) \min \left\{ a - 1, C\sqrt{\varepsilon} \left(\left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a-1} \right) \right| + \sqrt{a} \right) \right\}.$$

Beweis zu Korollar 3.3.6. Wir untergliedern den Beweis in drei Schritte:

Schritt 1: Als Erstes wollen wir

$$\Delta\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A} \leq \mathcal{H}^2(A)(a-1)$$

zeigen.

Dazu verwenden wir analog wie in Korollar 3.3.3, dass für das Irrigation Pattern $\chi : \Gamma \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\chi(p, t) = (p, t)$, mit Referenzraum $\Gamma = A$ und Referenzmaß $P_\Gamma = \mathcal{L}^1 \llcorner A$ gilt, dass $\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A}[\chi] = aW_1(\mu_0, \mu_1)$ ist. Damit folgt mit Lemma 2.6.1

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A} &= \min_{\chi} \mathcal{E}^{\varepsilon,a,A}[\chi] - \mathcal{E}^{*,a,A} \\ &= \min_{\chi} \mathcal{E}^{\varepsilon,a,A}[\chi] - W_1(\mu_0, \mu_1) \\ &\leq (a-1)W_1(\mu_0, \mu_1) \\ &= \mathcal{H}^2(A)(a-1). \end{aligned}$$

Schritt 2: Sei $\varepsilon \leq \min\{1, \mathcal{H}^2(A)^2\}$. Es ist zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} &\Delta\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A} \\ &\leq \mathcal{H}^2(A) \min \left\{ a - 1, C\sqrt{\varepsilon} \left[\left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a(a-1)} \right) \right| + a(a-1) + 1 \right], C\sqrt{\varepsilon} \left[\left| \log_2(\sqrt{\varepsilon}) \right| + \sqrt{a} + 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

ist.

Wir wollen in diesem Schritt also nachweisen, dass diese Ungleichung nicht nur unter den Bedingungen an a und ε aus Theorem 3.3.4 gilt, sondern auch allgemeiner für unsere jetzigen Voraussetzungen.

Dazu nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass die Konstante C in Theorem 3.3.4 und 3.3.5 die gleiche und größer als 2 ist. Zusätzlich führen wir zur Vereinfachung der Notation die folgenden Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} T_1 &:= \sqrt{\varepsilon} \left[\left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a(a-1)} \right) \right| + a(a-1) + 1 \right], \\ T_2 &:= \sqrt{\varepsilon} \left[\left| \log_2(\sqrt{\varepsilon}) \right| + \sqrt{a} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Für $a > 2$ gilt nun $CT_1 > CT_2$, denn

$$\begin{aligned}
& CT_1 > CT_2 \\
\Leftrightarrow & C\sqrt{\varepsilon} \left[\left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a(a-1)} \right) \right| + a(a-1) + 1 \right] > C\sqrt{\varepsilon} [|\log_2(\sqrt{\varepsilon})| + \sqrt{a} + 1] \\
\Leftrightarrow & |\log_2(\sqrt{\varepsilon}) - \log_2(a(a-1))| + a(a-1) + 1 > |\log_2(\sqrt{\varepsilon})| + \sqrt{a} + 1 \\
\Leftrightarrow & |\log_2(\sqrt{\varepsilon})| + \log_2(a(a-1)) + a(a-1) > |\log_2(\sqrt{\varepsilon})| + \sqrt{a} \\
\Leftrightarrow & \log_2(a(a-1)) + a(a-1) > \sqrt{a}.
\end{aligned}$$

Ebenfalls gilt für $\varepsilon > \frac{a^2(a-1)^2}{64}$, dass $CT_1 > a-1$ ist, denn

$$\begin{aligned}
CT_1 &= C\sqrt{\varepsilon} \left[\left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a(a-1)} \right) \right| + a(a-1) + 1 \right] \\
&> C \frac{a(a-1)}{8} \left[\left| \log_2 \left(\frac{1}{8} \right) \right| + a(a-1) + 1 \right] \\
&> \frac{a(a-1)}{4} [4 + a(a-1)] \\
&= a(a-1) + \left(\frac{a(a-1)}{2} \right)^2 \\
&> a-1.
\end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass

$$\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} \leq \mathcal{H}^2(A) \min\{a-1, CT_1, CT_2\}$$

auch unabhängig von den Bedingungen an a und ε aus Theorem 3.3.4 gilt.

Schritt 3: Im letzten Schritt bleibt nun noch

$$\min\{CT_1, CT_2\} \leq C\sqrt{\varepsilon} \left(\left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a-1} \right) \right| + \sqrt{a} \right)$$

zu zeigen.

Dazu schätzen wir zunächst CT_1 und CT_2 folgendermaßen ab. Es ist

$$\begin{aligned}
CT_1 &= C\sqrt{\varepsilon} \left[\left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a(a-1)} \right) \right| + a(a-1) + 1 \right] \\
&\leq 4C\sqrt{\varepsilon} \frac{1}{4} \left(\left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a(a-1)} \right) \right| + a(a-1) + 1 \right)
\end{aligned}$$

und wegen $a > 1$ gilt

$$CT_2 = C\sqrt{\varepsilon} [|\log_2(\sqrt{\varepsilon})| + \sqrt{a} + 1] \leq 4C\sqrt{\varepsilon} (|\log_2(\sqrt{\varepsilon})| + \sqrt{a}).$$

Es genügt also, folgende Abschätzung zu beweisen:

$$\min \left\{ \frac{1}{4} \left(\left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a(a-1)} \right) \right| + a(a-1) + 1 \right), |\log_2(\sqrt{\varepsilon})| + \sqrt{a} \right\} \leq \left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a-1} \right) \right| + \sqrt{a}.$$

Für $a \geq 2$ gilt

$$\left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a-1} \right) \right| = |\log_2(\sqrt{\varepsilon}) - \log_2(a-1)| = |\log_2(\sqrt{\varepsilon})| + \log_2(a-1) \geq |\log_2(\sqrt{\varepsilon})|$$

und somit

$$|\log_2(\sqrt{\varepsilon})| + \sqrt{a} \leq \left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a-1} \right) \right| + \sqrt{a}.$$

Für $a \in (1, 2)$ gilt

$$\begin{aligned} & \left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a(a-1)} \right) \right| + a(a-1) + 1 \\ &= \left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a-1} \right) - \log_2(a) \right| + a(a-1) + 1 \\ &\leq \left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a-1} \right) \right| + \log_2(a) + a(a-1) + 1 \\ &\leq \left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{a-1} \right) \right| + 4\sqrt{a}. \end{aligned}$$

□

Beweis zu Theorem 3.3.4. Auch hier setzen wir, wie bereits im Zweidimensionalen, Lemma 3.2.2 und Lemma 3.2.4 in (3.8) ein und erhalten

$$\begin{aligned} & \Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} \\ &\leq 2 \left[\sum_{k=1}^K \sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}^2} \left(E_P^{\varepsilon, a} \left[\chi_{x_k, i, w_k, h_k, f_k}^E \right] - w_k^2 h_k \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i \in \{1, \dots, N_{K+1}\}^2} \left(E_P^{\varepsilon, a} \left[\chi_{x_{K+1}, i, w_{K+1}, H, f_{K+1}}^W \right] - w_{K+1}^2 H \right) \right] \\ &\leq 2 \left[\sum_{k=1}^K N_k^2 \left(4(f_k + \varepsilon) \sqrt{\frac{w_k^2}{8} + h_k^2} - w_k^2 h_k \right) + N_{K+1}^2 \left(4a f_{K+1} \sqrt{\frac{w_{K+1}^2}{8} + H^2} - w_{K+1}^2 H \right) \right] \\ &= 2 \left[\sum_{k=1}^K \frac{l^2}{w_k^2} \left(4 \left(\frac{w_k^2}{4} + \varepsilon \right) \sqrt{\frac{w_k^2}{8} + h_k^2} - w_k^2 h_k \right) + \frac{l^2}{w_{K+1}^2} \left(4a \frac{w_{K+1}^2}{4} \sqrt{\frac{w_{K+1}^2}{8} + H^2} - w_{K+1}^2 H \right) \right] \\ &= \mathcal{H}^2(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K h_k \left(\left(1 + \frac{4\varepsilon}{w_k^2} \right) \sqrt{1 + \frac{w_k^2}{8h_k^2}} - 1 \right) + H \left(a \sqrt{1 + \frac{w_{K+1}^2}{8H^2}} - 1 \right) \right] \\ &\leq \mathcal{H}^2(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K h_k \left(\left(1 + \frac{4\varepsilon}{w_k^2} \right) \left(1 + \frac{w_k^2}{16h_k^2} \right) - 1 \right) + H \left(a \left(1 + \frac{w_{K+1}^2}{16H^2} \right) - 1 \right) \right] \\ &= \mathcal{H}^2(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{w_k^2}{16h_k} + \varepsilon \frac{h_k}{w_k^2} \left(4 + \frac{w_k^2}{4h_k^2} \right) \right) + H \left((a-1) + a \frac{w_{K+1}^2}{16H^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Wir wählen nun das Minimierende

$$H = \sqrt{\frac{a}{a-1}} \frac{w_{K+1}}{4},$$

denn

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial H} \left(\mathcal{H}^2(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{w_k^2}{16h_k} + \varepsilon \frac{h_k}{w_k^2} \left(4 + \frac{w_k^2}{4h_k^2} \right) \right) + H \left((a-1) + a \frac{w_{K+1}^2}{16H^2} \right) \right] \right) \\ &= \mathcal{H}^2(A) 2 \left[(a-1) - a \frac{w_{K+1}^2}{16H^2} \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}^2(A) 2 \left[(a-1) - a \frac{w_{K+1}^2}{16H^2} \right] \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow & \quad (a-1) - a \frac{w_{K+1}^2}{16H^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad 16H^2(a-1) = aw_{K+1}^2 \\ \Leftrightarrow & \quad H = \sqrt{\frac{a}{a-1}} \frac{w_{K+1}}{4}. \end{aligned}$$

Bemerke, dass wir noch $H \leq \frac{1}{4}$ nachweisen müssen (siehe (3.7)).

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} &\leq \mathcal{H}^2(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{w_k^2}{16h_k} + \varepsilon \frac{h_k}{w_k^2} \left(4 + \frac{w_k^2}{4h_k^2} \right) \right) + \left(\sqrt{a(a-1)} \frac{w_{K+1}}{4} + \sqrt{a(a-1)} \frac{w_{K+1}}{4} \right) \right] \\ &= \mathcal{H}^2(A) \left[\sum_{k=1}^K 2 \left(\frac{w_k^2}{16cw_k^\alpha \varepsilon^\beta} + \varepsilon \frac{cw_k^\alpha \varepsilon^\beta}{w_k^2} \left(4 + \frac{w_k^2}{4c^2 w_k^{2\alpha} \varepsilon^{2\beta}} \right) \right) + \sqrt{a(a-1)} w_{K+1} \right] \\ &= \mathcal{H}^2(A) \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{8c} w_k^{2-\alpha} \varepsilon^{-\beta} + w_k^{\alpha-2} \varepsilon^{1+\beta} \left(8c + \frac{1}{2c} w_k^{2-2\alpha} \varepsilon^{-2\beta} \right) \right) + \sqrt{a(a-1)} w_{K+1} \right]. \end{aligned}$$

Um alle Terme optimal auszugleichen, wählen wir

$$\gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \alpha = 2 \quad \text{und} \quad \beta = -\frac{1}{2}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} &\leq \mathcal{H}^2(A) \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{8c} \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon} \left(8c + \frac{1}{2c} w_k^{-2} \varepsilon \right) \right) + \sqrt{a(a-1)} w_{K+1} \right] \\ &= \mathcal{H}^2(A) \left[\sqrt{\varepsilon} \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{8c} + 8c + \frac{1}{2c} w_k^{-2} \varepsilon \right) + \sqrt{a(a-1)} w_{K+1} \right]. \end{aligned}$$

Wegen (3.4) führt dies zu

$$w_1 = \tilde{c} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} a^0 (a-1)^0 = \tilde{c} \varepsilon^{\frac{1}{4}}$$

und wegen (3.5) zu

$$\varepsilon \leq a^0(a-1)^0 \mathcal{H}^2(A)^{-\frac{2}{\frac{1}{2}^2}} = \mathcal{H}^2(A)^2.$$

Bemerke, dass wir immer noch K angeben müssen. Die Intuition dafür ist die Folgende: Wenn wir annehmen, dass w_k^2 größer als ε bleibt, ist die Summe in unserer Abschätzung nichts anderes als K -mal eine Konstante. Es ist zu erwarten, dass K am stärksten logarithmisch in ε und $a-1$ steigt. Dies ist nicht erheblicher schlechter als eine Konstante für die obere Grenze von K zu haben. Somit kann der zweite Term so groß wie $\sqrt{\varepsilon}$ werden, ohne dabei die Energieabschätzung zu belasten. Deswegen werden wir K so wählen, dass $w_{K+1} \sim \sqrt{\frac{\varepsilon}{a(a-1)}}$ ist.

Das ist der Fall für

$$K = \lfloor \log_2 \frac{\sqrt{a(a-1)}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} \rfloor.$$

Damit ist

$$w_{K+1} = 2^{1-K-1} w_1 = 2^{-K} \tilde{c} \varepsilon^{\frac{1}{4}} = \tilde{c} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} 2^{-K} = \tilde{c} \frac{\sqrt{a(a-1)}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} 2^{-K} \sqrt{\frac{\varepsilon}{a(a-1)}} = \frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{a(a-1)}},$$

wobei $\hat{c} = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a(a-1)}} 2^K$ ist, und

$$H = \sqrt{\frac{a}{a-1}} \frac{w_{K+1}}{4} = \sqrt{\frac{a}{a-1}} \frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{a(a-1)}} \frac{1}{4} = \frac{\tilde{c} \sqrt{\varepsilon}}{4 \hat{c} (a-1)},$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ den ganzzahligen Teil bezeichnet.

Es ist $\hat{c} = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a(a-1)}} 2^K \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, denn

$$\hat{c} = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a(a-1)}} 2^{\lfloor \log_2 \frac{\sqrt{a(a-1)}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} \rfloor} > \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a(a-1)}} 2^{\left(\log_2 \left(\frac{\sqrt{a(a-1)}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}\right) - 1\right)} = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a(a-1)}} \frac{\sqrt{a(a-1)}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

und

$$\hat{c} = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a(a-1)}} 2^{\lfloor \log_2 \frac{\sqrt{a(a-1)}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} \rfloor} \leq \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a(a-1)}} 2^{\left(\log_2 \frac{\sqrt{a(a-1)}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}\right)} = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a(a-1)}} \frac{\sqrt{a(a-1)}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} = 1.$$

Außerdem stellen unsere Annahmen an ε sicher, dass $K \geq 1$ ist, denn

$$K = \lfloor \log_2 \frac{\sqrt{a(a-1)}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} \rfloor \geq \lfloor \log_2 \frac{\sqrt{a(a-1)}}{\left(\frac{a^2(a-1)^2}{64}\right)^{\frac{1}{4}}} \rfloor = \lfloor \log_2 \sqrt{8} \rfloor \geq 1$$

und dass $H \leq \frac{1}{8}$ ist, denn

$$H = \frac{\tilde{c} \sqrt{\varepsilon}}{4 \hat{c} (a-1)} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2(a-1)} \leq \frac{\frac{a(a-1)}{8}}{2(a-1)} = \frac{a}{16} \leq \frac{1}{8}.$$

Somit sind unsere Bedingungen in (3.7) erfüllt.

Wenn wir nun unsere Parameter in die Energieabschätzung einsetzen, folgt

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} &\leq \mathcal{H}^2(A) \sqrt{\varepsilon} \left[\left(\frac{1}{8c} + 8c \right) K + \sum_{k=1}^K \frac{1}{2c} w_k^{-2} \varepsilon + \frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \right] \\
&\leq \mathcal{H}^2(A) \sqrt{\varepsilon} \left[\left(\frac{1}{8c} + 8c \right) \left\lfloor \log_2 \left(\frac{\sqrt{a(a-1)}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} \right) \right\rfloor + \frac{1}{2c} \varepsilon \sum_{k=1}^K (2^{1-k} w_1)^{-2} + \frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \right] \\
&\leq \mathcal{H}^2(A) \sqrt{\varepsilon} \left[\left(\frac{1}{8c} + 8c \right) \log_2 \left(\frac{\sqrt{a(a-1)}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} \right) + \frac{1}{2c} \varepsilon \sum_{k=1}^K 2^{-2} 2^{2k} \frac{1}{\tilde{c}^2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \right] \\
&\leq \mathcal{H}^2(A) \sqrt{\varepsilon} \left[\left(\frac{1}{8c} + 8c \right) \left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{a(a-1)}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} \right) \right| + \frac{1}{8c\tilde{c}^2} \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=1}^K \frac{a(a-1)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \right] \\
&= \mathcal{H}^2(A) \sqrt{\varepsilon} C \left[\left| \log_2 \left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{a(a-1)} \right) \right| + a(a-1) + 1 \right]
\end{aligned}$$

für eine Konstante $C > 0$. □

Beweis zu Theorem 3.3.5. Diese Konstruktion ist für große a vorgesehen. Aus diesem Grund wird, im Gegensatz zur vorherigen Konstruktion, die Masse nicht mit einem Abstand von H von der oberen Grenze entlassen. Damit verhindern wir, dass sie das letzte Stück selber reisen muss. Stattdessen wird das Netzwerk aus Röhren über K_S Schichten die ganze Strecke bis nach oben gehen und sich sogar innerhalb der Grenzfläche noch weiter verzweigen, bevor es die Masse entlässt.

Wir werden hier die gleichen Definitionen (3.4) wie zuvor verwenden. Allerdings werden wir für die Schichten $K_S + 1$ bis K

$$h_k = 0 \text{ für } k = K_S + 1, \dots, K \text{ und } H = 0$$

benutzen.

Durch Einsetzen von Lemma 3.2.2 und 3.2.4 in (3.8) erhalten wir nun die Energieabschätzung

$$\begin{aligned}
&\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} \\
&\leq 2 \left[\sum_{k=1}^K \sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}^2} \left(E_P^{\varepsilon, a} \left[\chi_{x_{k,i}, w_k, h_k, f_k}^E \right] - w_k^2 h_k \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i \in \{1, \dots, N_{K+1}\}^2} \left(E_P^{\varepsilon, a} \left[\chi_{x_{K+1,i}, w_{K+1}, H, f_{K+1}}^W \right] - w_{K+1}^2 H \right) \right] \\
&\leq 2 \left[\sum_{k=1}^{K_S} N_k^2 \left(2^2 (f_k + \varepsilon) l - w_k^2 h_k \right) + N_{K+1}^2 2^2 a f_{K+1} \sqrt{\frac{2}{4} w_{K+1}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[\sum_{k=1}^{K_S} \frac{l^2}{w_k^2} \left(4 \left(\frac{w_k^2}{4} + \varepsilon \right) \sqrt{\frac{w_k^2}{8} + h_k^2} - w_k^2 h_k \right) + \sum_{k=K_S+1}^K \frac{l^2}{w_k^2} \left(4 \left(\frac{w_k^2}{4} + \varepsilon \right) \sqrt{\frac{w_k^2}{8}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{l^2}{w_{K+1}^2} 4a \frac{w_{K+1}^2}{4} \sqrt{\frac{1}{2} w_{K+1}^2} \right] \\
&= \mathcal{H}^2(A) 2 \left[\sum_{k=1}^{K_S} \left(\left(1 + \frac{4\varepsilon}{w_k^2} \right) \sqrt{\frac{w_k^2}{8} + h_k^2} - h_k \right) + \sum_{k=K_S+1}^K \left(1 + \frac{4\varepsilon}{w_k^2} \right) \sqrt{\frac{w_k^2}{8}} + a \sqrt{\frac{1}{2} w_{K+1}^2} \right] \\
&= \mathcal{H}^2(A) 2 \left[\sum_{k=1}^{K_S} h_k \left(\left(1 + \frac{4\varepsilon}{w_k^2} \right) \sqrt{1 + \frac{w_k^2}{8h_k^2}} - 1 \right) + \sum_{k=K_S+1}^K \frac{1}{2} \left(\frac{w_k}{\sqrt{2}} + \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}w_k} \right) + a \frac{w_{K+1}}{\sqrt{2}} \right] \\
&\leq \mathcal{H}^2(A) 2 \left[\sum_{k=1}^{K_S} h_k \left(\left(1 + \frac{4\varepsilon}{w_k^2} \right) \left(1 + \frac{w_k^2}{16h_k^2} \right) - 1 \right) + \sum_{k=K_S+1}^K \frac{1}{2} \left(\frac{w_k}{\sqrt{2}} + \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}w_k} \right) + a \frac{w_{K+1}}{\sqrt{2}} \right] \\
&= \mathcal{H}^2(A) 2 \left[\sum_{k=1}^{K_S} \left(\frac{w_k^2}{16h_k} + \varepsilon \frac{h_k}{w_k^2} \left(4 + \frac{w_k^2}{4h_k^2} \right) \right) + \sum_{k=K_S+1}^K \frac{1}{2} \left(\frac{w_k}{\sqrt{2}} + \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}w_k} \right) + a \frac{w_{K+1}}{\sqrt{2}} \right] \\
&= \mathcal{H}^2(A) \left[\sum_{k=1}^{K_S} \left(\frac{w_k^2}{8c} w_k^{-\alpha} \varepsilon^{-\beta} + \varepsilon \frac{c w_k^\alpha \varepsilon^{1\beta}}{w_k^2} \left(8 + \frac{w_k^2}{2c^2} w_k^{-2\alpha} \varepsilon^{-2\beta} \right) \right) + \sum_{k=K_S+1}^K \left(\frac{w_k}{\sqrt{2}} + \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}w_k} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{2} a w_{K+1} \right] \\
&= \mathcal{H}^2(A) \left[\sqrt{\varepsilon} \sum_{k=1}^{K_S} \left(\frac{1}{8c} + 8c + \frac{1}{2c} w_k^{-2} \varepsilon \right) + \sum_{k=K_S+1}^K \left(\frac{w_k}{\sqrt{2}} + \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}w_k} \right) + \sqrt{2} a w_{K+1} \right]
\end{aligned}$$

für $\alpha = 2$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = 0$ und $\delta = 0$ wie zuvor.

Bemerke, dass wegen $h_k = 0$ für $k > K_S$ die Konstante c hier definiert wird durch (3.6) mit $H = 0$ und K_S anstelle von K . Solange wir $K_S \geq 1$ sicherstellen, vergrößert dies aber nicht seinen Bereich.

Auch hier müssen wir wieder K_S und K bestimmen. Die Heuristiken sind die Folgenden: Wenn wir den Energiebetrag der oberen zwei Schichten schreiben als

$$\frac{w_K}{\sqrt{2}} + \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}w_K} + \sqrt{2} a w_{K+1} = \frac{w_K}{\sqrt{2}} + \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}w_K} + a \frac{w_K}{\sqrt{2}},$$

sehen wir, dass der erste Term angesichts des dritten Terms vernachlässigt werden kann. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_K} \left(\frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}w_K} + a \frac{w_K}{\sqrt{2}} \right) &= \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{w_K^2} \right) + \frac{a}{\sqrt{2}} \stackrel{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow w_K^2 &= \frac{4\varepsilon}{a}.
\end{aligned}$$

Das minimierende w_K genügt also $w_K \sim \sqrt{\varepsilon/a}$. Genauso ziehen wir für die Summanden der zweiten Summe den minimierenden Wert $w_k \sim 2\sqrt{\varepsilon}$ vor, denn

$$\frac{\partial}{\partial w_k} \left(\frac{w_k}{\sqrt{2}} + \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}w_k} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{w_k^2} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad w_k^2 = 4\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad w_k = 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Dies ist natürlich nicht für alle Summanden möglich, da sich die w_k verkleinern müssen bis $w_K \sim \sqrt{\varepsilon/a}$ ist. Aber wir können zumindest $w_k \in [\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon/a}]$ für alle $k > K_S$ und $w_{K_S} \sim \sqrt{\varepsilon}$ fordern.

Mit Erinnerung an $w_1 = \tilde{c}\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ aus (3.4) müssen wir deswegen

$$K_S = \lfloor \log_2(4\varepsilon^{-\frac{1}{4}}) \rfloor, \quad K = K_S + \lfloor \log_2 \sqrt{a} \rfloor$$

wählen, sodass mit $\hat{c} = \frac{\varepsilon^{1/4}}{4} 2^{K_S}$ und $\bar{c} = \frac{2^K}{(2^{K_S} \sqrt{a})}$ tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} w_{K_S} &= 2^{1-K_S} w_1 = 2^{1-K_S} \tilde{c} \varepsilon^{\frac{1}{4}} = 2 \tilde{c} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} 2^{-K_S} = \frac{\tilde{c}}{2\hat{c}} \sqrt{\varepsilon}, \\ w_K &= 2^{1-K} w_1 = 2 * 2^{-K} \tilde{c} \varepsilon^{\frac{1}{4}} = \frac{2\sqrt{a}\tilde{c}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}} 2^K} \sqrt{\frac{\varepsilon}{a}} = \frac{2\tilde{c}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}} 2^{K_S} \frac{2^K}{2^{K_S} \sqrt{a}}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{a}} = \frac{\tilde{c}}{2\hat{c}\bar{c}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{a}}. \end{aligned}$$

Es gilt $\hat{c} \in (\frac{1}{2}, 1]$, denn

$$\hat{c} = \frac{\varepsilon^{1/4}}{4} 2^{\lfloor \log_2(4\varepsilon^{-\frac{1}{4}}) \rfloor} \leq \frac{\varepsilon^{1/4}}{4} 2^{\log_2(4\varepsilon^{-\frac{1}{4}})} = 1$$

und

$$\hat{c} = \frac{\varepsilon^{1/4}}{4} 2^{\lfloor \log_2(4\varepsilon^{-\frac{1}{4}}) \rfloor} > \frac{\varepsilon^{1/4}}{4} 2^{\log_2(4\varepsilon^{-\frac{1}{4}}) - 1} = \frac{1}{2}$$

und $\bar{c} \in (\frac{1}{2}, 1]$, denn

$$\bar{c} = \frac{2^K}{(2^{K_S} \sqrt{a})} = \frac{2^{\lfloor \log_2 \sqrt{a} \rfloor}}{\sqrt{a}} \leq \frac{2^{\log_2 \sqrt{a}}}{\sqrt{a}} = 1$$

und

$$\bar{c} = \frac{2^K}{(2^{K_S} \sqrt{a})} = \frac{2^{\lfloor \log_2 \sqrt{a} \rfloor}}{\sqrt{a}} > \frac{2^{\log_2(\sqrt{a}) - 1}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}.$$

Damit erhalten wir für die Energieabschätzung

$$\begin{aligned} &\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} \\ &\leq \mathcal{H}^2(A) \left[\sqrt{\varepsilon} \sum_{k=1}^{K_S} \left(\frac{1}{8c} + 8c + \frac{1}{2c} w_k^{-2} \varepsilon \right) + \sum_{k=K_S+1}^K \left(\frac{w_k}{\sqrt{2}} + \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}w_k} \right) + \sqrt{2} a w_{K+1} \right] \\ &= \mathcal{H}^2(A) \left[\sqrt{\varepsilon} K_S \left(\frac{1}{8c} + 8c \right) + \sum_{k=1}^{K_S} \frac{1}{2c} w_k^{-2} \varepsilon^{3/2} + \sum_{k=1}^{K-K_S} \left(\frac{w_{k+K_S}}{\sqrt{2}} + \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}w_{k+K_S}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} a w_K \right] \\ &= \mathcal{H}^2(A) \left[\sqrt{\varepsilon} K_S \left(\frac{1}{8c} + 8c \right) + \sum_{k=1}^{K_S} \frac{1}{2c} (2^{1-k} w_1)^{-2} \varepsilon^{3/2} + \sum_{k=1}^{K-K_S} \left(\frac{w_{K_S}}{\sqrt{2} 2^k} + \frac{4\varepsilon 2^k}{\sqrt{2} w_{K_S}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} a \frac{\tilde{c}}{2\hat{c}\bar{c}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{a}} \right] \\ &= \mathcal{H}^2(A) \left[\sqrt{\varepsilon} K_S \left(\frac{1}{8c} + 8c \right) + \sum_{k=1}^{K_S} \frac{1}{2c} \frac{1}{4^k} \frac{1}{\tilde{c}^2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \varepsilon^{3/2} + \sum_{k=1}^{K-K_S} \left(\frac{\tilde{c}\sqrt{\varepsilon}}{2\hat{c}\sqrt{2} 2^k} + \frac{8\hat{c}\sqrt{\varepsilon} 2^k}{\sqrt{2}\tilde{c}} \right) + \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{2}\hat{c}\bar{c}} \sqrt{a\varepsilon} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{H}^2(A)\sqrt{\varepsilon} \left[K_S \left(\frac{1}{8c} + 8c \right) + \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{8c\tilde{c}^2} \sum_{k=1}^{K_S} 4^k + \sum_{k=1}^{K-K_S} \left(\frac{\tilde{c}}{2\sqrt{2}\tilde{c}} 2^{-k} + \frac{8\hat{c}}{\sqrt{2}\tilde{c}} 2^k \right) + \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{2}\tilde{c}\tilde{c}} \sqrt{a} \right] \\
&\leq \mathcal{H}^2(A)\sqrt{\varepsilon} \left[K_S \left(\frac{1}{8c} + 8c \right) + \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{8c\tilde{c}^2} \sum_{k=1}^{K_S} 16 \frac{1}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{K-K_S} \left(\frac{\tilde{c}}{2\sqrt{2}\tilde{c}} 2^{-k} + \frac{8\hat{c}}{\sqrt{2}\tilde{c}} 2^k \right) + \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{2}\tilde{c}\tilde{c}} \sqrt{a} \right] \\
&\leq \mathcal{H}^2(A)\sqrt{\varepsilon} \frac{C}{2} \left[K_S + 2^{K-K_S} + \sqrt{a} \right] \\
&\leq \mathcal{H}^2(A)\sqrt{\varepsilon} \frac{C}{2} \left[\log_2 \left(4\varepsilon^{-\frac{1}{4}} \right) + 2\sqrt{a} \right] \\
&\leq \mathcal{H}^2(A)\sqrt{\varepsilon} \frac{C}{2} \left[2 \left| \log_2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{4^2} \right) \right| + 2\sqrt{a} \right] \\
&\leq \mathcal{H}^2(A)\sqrt{\varepsilon} \frac{C}{2} \left[2 \left(|\log_2(\sqrt{\varepsilon})| + 1 \right) + 2\sqrt{a} \right] \\
&= \mathcal{H}^2(A)\sqrt{\varepsilon} C \left[|\log_2(\sqrt{\varepsilon})| + \sqrt{a} + 1 \right],
\end{aligned}$$

wobei alle auftretenden Konstanten in einer genügend großen Konstanten $C > 0$ zusammengefasst wurden. \square

3.3.3 Obere Schranke in nD für $n > 3$

Auch im n-Dimensionalen für $n > 3$ hat der Parameter a einen großen Einfluss auf die obere Schranke für unsere Energie. Aus diesem Grund werden wir auch hier den Fall eines kleinen a und den Fall eines großen a getrennt voneinander, in Theorem 3.3.7 und Theorem 3.3.8, behandeln.

Theorem 3.3.7 (Obere Schranke für $\Delta\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A}$ in nD für kleine a). *Unter Verwendung der Notation aus Kapitel 2.4 existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $a \leq 2$, $\varepsilon \leq \min \left\{ 1, \frac{\sqrt{a(a-1)}^{n+1}}{\sqrt{2}^{n^2-1}}, \sqrt{\frac{1}{(8(n-1))^{n-1}} \frac{(a-1)^{n+1}}{a^{n-3}}}, \mathcal{H}^{n-1}(A)^{\frac{n+1}{n-1}} \right\}$ gilt*

$$\Delta\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A} \leq \mathcal{H}^{n-1}(A) C \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{a(a-1)}^{\frac{n-3}{n-1}}.$$

Theorem 3.3.8 (Obere Schranke für $\Delta\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A}$ in nD für große a). *Es existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $a \geq 2$, $\varepsilon \leq \min \left\{ 1, \mathcal{H}^{n-1}(A)^{\frac{n+1}{n-1}} \right\}$ gilt*

$$\Delta\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A} \leq \mathcal{H}^{n-1}(A) C \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{a(a-1)}^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Die beiden Theoreme können im folgenden Korollar zusammengefasst werden.

Korollar 3.3.9. *Es existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $\varepsilon \leq \min \left\{ 1, \mathcal{H}^{n-1}(A)^{\frac{n+1}{n-1}} \right\}$ gilt*

$$\Delta\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A} \leq \mathcal{H}^{n-1}(A) \min \left\{ a-1, C \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{a} \sqrt{a-1}^{\frac{n-3}{n-1}} \right\}.$$

Beweis zu Korollar 3.3.9. Analog wie bereits im zwei- und dreidimensionalen Fall, können wir mit Lemma 2.6.1 die Ungleichung

$$\Delta\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A} \leq \mathcal{H}^{n-1}(A)(a-1)$$

zeigen.

Sei nun $a \geq 1$ und $\varepsilon \leq \min \left\{ 1, \mathcal{H}^{n-1}(A)^{\frac{n+1}{n-1}} \right\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die beiden Konstanten C in Theorem 3.3.7 und 3.3.8 identisch und größer als $\tilde{C}^{-\frac{1}{n-1}}$ sind für $\tilde{C} = \min \left\{ \sqrt{2}^{1-n^2}, \sqrt{8(n-1)^{1-n}} \right\}$.

Falls $a \geq 2$, impliziert Theorem 3.3.8

$$\begin{aligned} & \Delta\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A} \\ & \leq \mathcal{H}^{n-1}(A) C \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{a(a-1)}^{\frac{n-2}{n-1}} \\ & = \mathcal{H}^{n-1}(A) C \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{a}^{\frac{n-1}{n-1}} \sqrt{a}^{-\frac{1}{n-1}} \sqrt{a-1}^{\frac{n-3}{n-1}} \sqrt{a-1}^{\frac{1}{n-1}} \\ & \leq \mathcal{H}^{n-1}(A) C \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{a} \sqrt{a-1}^{\frac{n-3}{n-1}} \sqrt{a}^{-\frac{1}{n-1}} \sqrt{a}^{\frac{1}{n-1}} \\ & = \mathcal{H}^{n-1}(A) C \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{a} \sqrt{a-1}^{\frac{n-3}{n-1}}. \end{aligned}$$

Somit ist das Korollar für $a \geq 2$ gezeigt.

Falls $a < 2$ und ε die Bedingungen aus Theorem 3.3.7 erfüllt, dann impliziert das Theorem

$$\begin{aligned} & \Delta\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A} \\ & \leq \mathcal{H}^{n-1}(A) C \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{a(a-1)}^{\frac{n-3}{n-1}} \\ & = \mathcal{H}^{n-1}(A) C \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{a}^{\frac{n-3}{n-1}} \sqrt{a-1}^{\frac{n-3}{n-1}} \\ & \leq \mathcal{H}^{n-1}(A) C \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{a} \sqrt{a-1}^{\frac{n-3}{n-1}}. \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung für diesen Fall gezeigt.

Falls $a < 2$, aber die Bedingungen aus Theorem 3.3.7 an ε verletzt werden, gilt $\varepsilon > \tilde{C} \sqrt{a(a-1)}^{n+1}$. Jedoch impliziert dies

$$\begin{aligned} & C \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{a} \sqrt{a-1}^{\frac{n-3}{n-1}} \\ & \geq C \tilde{C}^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{a(a-1)}^{\frac{n+1}{n-1}} \sqrt{a} \sqrt{a-1}^{\frac{n-3}{n-1}} \\ & \geq C \tilde{C}^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{a(a-1)}^{\frac{n+1}{n-1}} \sqrt{a(a-1)}^{\frac{n-3}{n-1}} \\ & = C \tilde{C}^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{a(a-1)}^{\frac{2n-2}{n-1}} \\ & = C \tilde{C}^{\frac{1}{n-1}} a(a-1) \\ & \geq a-1. \end{aligned}$$

Damit reduziert sich die zu prüfende Ungleichung auf $\Delta\mathcal{E}^{\varepsilon,a,A} \leq \mathcal{H}^{n-1}(A)(a-1)$, womit der Beweis zum Schluss kommt. \square

Beweis zu Theorem 3.3.7. Analog zum Beweis von Theorem 3.3.4 erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} \\
& \leq 2 \left[\sum_{k=1}^K \sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}^{n-1}} \left(E_p^{\varepsilon, a} \left[\chi_{x_{k,i}, w_k, h_k, f_k}^E \right] - w_k^{n-1} h_k \right) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i \in \{1, \dots, N_{K+1}\}^{n-1}} \left(E_p^{\varepsilon, a} \left[\chi_{x_{K+1,i}, w_{K+1}, H, f_{K+1}}^W \right] - w_{K+1}^{n-1} H \right) \right] \\
& \leq 2 \left[\sum_{k=1}^K N_k^{n-1} \left(2^{n-1} (f_k + \varepsilon) l - w_k^{n-1} h_k \right) \right. \\
& \quad \left. + N_{K+1}^{n-1} \left(2^{n-1} a f_{K+1} \sqrt{\frac{(n-1)}{4} w_{K+1}^2 + H^2} - w_{K+1}^{n-1} H \right) \right] \\
& = \mathcal{H}^{n-1}(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K \frac{1}{w_k^{n-1}} \left(2^{n-1} \left(\left(\frac{w_k}{2} \right)^{n-1} + \varepsilon \right) \sqrt{\frac{n-1}{16} w_k^2 + h_k^2} - w_k^{n-1} h_k \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{w_{K+1}^{n-1}} \left(2^{n-1} a \left(\frac{w_{K+1}}{2} \right)^{n-1} \sqrt{\frac{(n-1)}{4} w_{K+1}^2 + H^2} - w_{K+1}^{n-1} H \right) \right] \\
& = \mathcal{H}^{n-1}(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K h_k \left(\left(1 + \varepsilon \frac{2^{n-1}}{w_k^{n-1}} \right) \sqrt{\frac{n-1}{16 h_k^2} w_k^2 + 1} - 1 \right) + \left(H \left(a \sqrt{\frac{(n-1)}{4 H^2} w_{K+1}^2 + 1} - 1 \right) \right) \right] \\
& \leq \mathcal{H}^{n-1}(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K h_k \left(\left(1 + \varepsilon \frac{2^{n-1}}{w_k^{n-1}} \right) \left(1 + \frac{n-1}{32 h_k^2} w_k^2 \right) - 1 \right) + \left(H \left(a \left(1 + \frac{(n-1)}{8 H^2} w_{K+1}^2 \right) - 1 \right) \right) \right] \\
& = \mathcal{H}^{n-1}(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{(n-1) w_k^2}{32 h_k} + \varepsilon \frac{h_k}{w_k^{n-1}} 2^{n-1} \left(1 + \frac{(n-1) w_k^2}{32 h_k^2} \right) \right) + \left(H (a-1) + a \frac{(n-1) w_{K+1}^2}{8 H} \right) \right] \\
& \leq \mathcal{H}^{n-1}(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{(n-1) w_k^{2-\alpha}}{32 c} a^{-\gamma} (a-1)^{-\delta} \varepsilon^{-\beta} + 2^{n-1} c w_k^{\alpha-n+1} a^\gamma (a-1)^\delta \varepsilon^{1+\beta} \right) \right. \\
& \quad \left. \left(1 + \frac{(n-1) w_k^2}{32 h_k^2} \right) + \left(\sqrt{\frac{n-1}{8} \frac{a}{a-1}} w_{K+1} (a-1) + a \frac{(n-1) w_{K+1}^2}{8 \sqrt{\frac{n-1}{8} \frac{a}{a-1}} w_{K+1}} \right) \right] \\
& = \mathcal{H}^{n-1}(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{(n-1) w_k^{2-\alpha}}{32 c} a^{-\gamma} (a-1)^{-\delta} \varepsilon^{-\beta} \right) \right. \\
& \quad \left. + 2^{n-1} c w_k^{\alpha-n+1} a^\gamma (a-1)^\delta \varepsilon^{1+\beta} \left(1 + \frac{(n-1) w_k^2}{32 h_k^2} \right) + 2 \sqrt{\frac{n-1}{8} a (a-1)} w_{K+1} \right] \\
& = \mathcal{H}^{n-1}(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{(n-1) w_k^{2-\alpha}}{32 c} a^{-\gamma} (a-1)^{-\delta} \varepsilon^{-\beta} \right) \right. \\
& \quad \left. + 2^{n-1} c w_k^{\alpha-n+1} a^\gamma (a-1)^\delta \varepsilon^{1+\beta} \left(1 + \frac{(n-1) w_k^2}{32 h_k^2} \right) + \sqrt{\frac{n-1}{2} a (a-1)} w_{K+1} \right], \tag{3.9}
\end{aligned}$$

wobei wir im drittletzten Schritt das minimierende

$$H = \sqrt{\frac{n-1}{8} \frac{a}{a-1}} w_{K+1}$$

gewählt haben (für welches wir noch $H \leq \frac{1}{4}$ nachweisen müssen (siehe (3.7))), denn

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial H} \left(H(a-1) + a \frac{(n-1)w_{K+1}^2}{8H} \right) &= (a-1) + a \left(-\frac{(n-1)w_{K+1}^2}{8H^2} \right) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a} - 1 &= -\frac{(n-1)w_{K+1}^2}{8H^2} \\ \Leftrightarrow 8H^2 \left(1 - \frac{1}{a} \right) &= (n-1)w_{K+1}^2 \\ \Leftrightarrow H &= \sqrt{\frac{(n-1)}{8} \frac{a}{a-1}} w_{K+1}. \end{aligned}$$

Als nächstes wählen wir die Exponenten

$$\alpha = \frac{n+1}{2}, \beta = -\frac{1}{2} \text{ und } \gamma = \delta = 0,$$

um die Terme der Summen auszugleichen.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K \frac{(n-1)w_k^{\frac{3-n}{2}}}{32c} \sqrt{\varepsilon} + 2^{n-1} c w_k^{-\frac{n+1}{2}} \sqrt{\varepsilon} \left(1 + \frac{(n-1)w_k^2}{32h_k^2} \right) + \sqrt{\frac{n-1}{2} a(a-1) w_{K+1}} \right] \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K w_k^{\frac{3-n}{2}} \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{(n-1)}{32c} + 2^{n-1} c \left(1 + \frac{(n-1)w_k^2}{32h_k^2} \right) \right) + \sqrt{\frac{n-1}{2} a(a-1) w_{K+1}} \right]. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der gewählten Exponenten in (3.4) erhalten wir

$$w_1 = \tilde{c} \varepsilon^{-\frac{\beta}{\alpha}} a^{-\frac{\gamma}{\alpha}} (a-1)^{-\frac{\delta}{\alpha}} = \tilde{c} \varepsilon^{\frac{1}{n+1}} = \tilde{c} \sqrt[n+1]{\varepsilon}.$$

Mit (3.5) folgt außerdem

$$\varepsilon \leq a^{-\frac{\gamma}{\beta}} (a-1)^{-\frac{\delta}{\beta}} \mathcal{H}^{n-1}(A)^{-\frac{\alpha}{\beta(n-1)}} = \mathcal{H}^{n-1}(A)^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

Um K festzulegen, ist die Idee die Folgende: Angenommen, es sei $h_k \geq w_k$, sodass der Term der Form $\frac{w_k^2}{h_k^2}$ in unserer Abschätzung vernachlässigt werden kann.

In der oberen Summe erscheinen die w_k mit negativer Potenz, sodass die Summe zu $\sim \sqrt{\varepsilon} w_{K+1}^{\frac{3-n}{2}}$ abgeschätzt werden kann. Gleichet man dies mit einem Term der Form $\sqrt{a(a-1)} w_{K+1}$ aus, erhalten wir $w_{K+1} \sim \sqrt[n-1]{\frac{\varepsilon}{a(a-1)}}$, denn

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon} w_{K+1} &= \sqrt{a(a-1)} w_{K+1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{a(a-1)}} = w_{K+1}^{\frac{2-3+n}{2}} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{a(a-1)} = w_{K+1}^{n-1} \\ &\Leftrightarrow w_{K+1} = \sqrt[n-1]{\frac{\varepsilon}{a(a-1)}}. \end{aligned}$$

Dementsprechend wählen wir

$$K = \lfloor \log_2 \left((a(a-1))^{\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{-\frac{2}{n^2-1}} \right) \rfloor,$$

denn dann ist

$$\begin{aligned} w_{K+1} &= 2^{1-(K+1)} w_1 = 2^{-K} \tilde{c}^{n+1} \sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{n^{-1} \sqrt{a(a-1)}} \varepsilon^{\frac{2}{n^2-1}} \varepsilon^{\frac{1}{n+1}} \tilde{c} = \frac{1}{n^{-1} \sqrt{a(a-1)}} \varepsilon^{\frac{2+n-1}{n^2-1}} \tilde{c} \\ &= n^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon}{a(a-1)}} \tilde{c} \sim n^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon}{a(a-1)}}. \end{aligned}$$

K ist aufgrund unserer Annahmen an ε strikt positiv und somit zulässig, denn

$$\begin{aligned} K &= \lfloor \log_2 \left((a(a-1))^{\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{-\frac{2}{n^2-1}} \right) \rfloor \geq \lfloor \log_2 \left((a(a-1))^{\frac{1}{n-1}} \left(\frac{\sqrt{a(a-1)}^{n+1}}{\sqrt{2}^{n^2-1}} \right)^{-\frac{2}{n^2-1}} \right) \rfloor \\ &= \lfloor \log_2 \left((a(a-1))^{\frac{1}{n-1}} (a(a-1))^{-\frac{1}{n-1}} \frac{1}{\sqrt{2}^{n^2-2}} \right) \rfloor = \lfloor \log_2 2 \rfloor = 1. \end{aligned}$$

Mit dieser Wahl und unter Benutzung von $\hat{c} = (a(a-1))^{-\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{\frac{2}{n^2-1}} 2^K \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, denn

$$\begin{aligned} \hat{c} &= (a(a-1))^{-\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{\frac{2}{n^2-1}} 2^{\lfloor \log_2 \left((a(a-1))^{\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{-\frac{2}{n^2-1}} \right) \rfloor} \\ &\leq (a(a-1))^{-\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{\frac{2}{n^2-1}} 2^{\log_2 \left((a(a-1))^{\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{-\frac{2}{n^2-1}} \right)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \hat{c} &= (a(a-1))^{-\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{\frac{2}{n^2-1}} 2^{\lfloor \log_2 \left((a(a-1))^{\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{-\frac{2}{n^2-1}} \right) \rfloor} \\ &> (a(a-1))^{-\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{\frac{2}{n^2-1}} 2^{\log_2 \left((a(a-1))^{\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{-\frac{2}{n^2-1}} \right) - 1} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} w_{K+1} &= \frac{w_1}{2^K} = \frac{w_1 \varepsilon^{\frac{2}{n^2-1}}}{2^K \varepsilon^{\frac{2}{n^2-1}}} = \frac{w_1 \varepsilon^{\frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)(n+1)}}}{2^K \varepsilon^{\frac{2}{n^2-1}}} = \frac{w_1 \varepsilon^{\frac{1}{n+1}}}{2^K \varepsilon^{\frac{2}{n^2-1}}} \\ &= \frac{w_1}{2^K} \frac{1}{(a(a-1))^{-\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{\frac{2}{n^2-1}}} \left(\frac{\varepsilon}{a(a-1)} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \left(\frac{\varepsilon}{a(a-1)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned}$$

und

$$H = \sqrt{\frac{n-1}{8} \frac{a}{a-1}} w_{K+1} = \frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \sqrt{\frac{n-1}{8} \frac{a}{a-1}} \left(\frac{\varepsilon}{a(a-1)} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Aufgrund unserer Bedingungen an ε erfüllt dabei H tatsächlich die Bedingung $H \leq \frac{1}{4}$, denn

$$\begin{aligned} H &= \frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \sqrt{\frac{n-1}{8} \frac{a}{a-1}} \left(\frac{\varepsilon}{a(a-1)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\leq 2 \sqrt{\frac{n-1}{8}} \sqrt{\frac{a}{a-1}} \frac{1}{(a(a-1))^{\frac{1}{n-1}}} \sqrt{\frac{1}{(8(n-1))^{n-1}} \frac{(a-1)^{n+1}}{a^{n-3}}} \\ &= \sqrt{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{a}{a-1}} \sqrt{\frac{1}{8(n-1)}} \sqrt{\frac{a-1}{a}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Demnach sind also die Bedingungen (3.7) erfüllt. Bemerke, dass wegen $\frac{w_k^2}{h_k^2} \leq \frac{w_{K+1}^2}{h_{K+1}^2}$ für $k \leq K$, denn

$$\frac{w_k^2}{h_k^2} \leq \frac{w_{K+1}^2}{h_{K+1}^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{c^2} w_k^{1-n} \varepsilon \leq \frac{1}{c^2} w_{K+1}^{1-n} \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad w_k \geq w_{K+1},$$

gilt

$$\begin{aligned} \frac{w_k^2}{h_k^2} &\leq \frac{w_{K+1}^2}{h_{K+1}^2} = \frac{w_{K+1}^2}{c^2 w_{K+1}^{2\alpha} \varepsilon^{2\beta}} = \frac{w_{K+1}^2}{c^2 w_{K+1}^{n+1} \varepsilon^{-1}} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{w_{K+1}^{n-1}} \varepsilon = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\hat{c}}{\tilde{c}} \right)^{n-1} \left(\frac{a(a-1)}{\varepsilon} \right)^{\frac{n-1}{n-1}} \varepsilon \\ &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{\hat{c}}{\tilde{c}} \right)^{n-1} a(a-1) \leq \frac{1}{c^2} 2^{n-1} 2 = \frac{2^n}{c^2}. \end{aligned}$$

Damit können wir nun unsere Überschussenergie weiter abschätzen. Es ist

$$\begin{aligned} &\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K w_k^{\frac{3-n}{2}} \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{(n-1)}{32c} + 2^{n-1} c \left(1 + \frac{(n-1)w_k^2}{32h_k^2} \right) \right) + \sqrt{\frac{n-1}{2} a(a-1)} w_{K+1} \right] \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(A) 2 \left[\sum_{k=1}^K w_k^{\frac{3-n}{2}} \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{(n-1)}{32c} + 2^{n-1} c \left(1 + \frac{(n-1)2^{n-5}}{c^2} \right) \right) + \sqrt{\frac{n-1}{2} a(a-1)} w_{K+1} \right] \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(A) \frac{C}{2} \left[w_{K+1}^{\frac{3-n}{2}} \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{a(a-1)} w_{K+1} \right] \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(A) \frac{C}{2} \left[\left(\frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \right)^{\frac{3-n}{2}} \left(\left(\frac{\varepsilon}{a(a-1)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right)^{\frac{3-n}{2}} \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{a(a-1)} \frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \left(\frac{\varepsilon}{a(a-1)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right] \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(A) \frac{C}{2} \left[\left(\frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \right)^{\frac{3-n}{2}} \left(\frac{\varepsilon}{a(a-1)} \right)^{\frac{3-n}{2(n-1)}} \varepsilon^{\frac{n-1}{2(n-1)}} + \frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} (a(a-1))^{\frac{n-3}{2(n-1)}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{H}^{n-1}(A) \frac{C}{2} \left[\left(\frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \right)^{\frac{3-n}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} (a(a-1))^{\frac{n-3}{2(n-1)}} + \frac{\tilde{c}}{\hat{c}} \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} (a(a-1))^{\frac{n-3}{2(n-1)}} \right] \\
&\leq \mathcal{H}^{n-1}(A) C \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} (a(a-1))^{\frac{n-3}{2(n-1)}}
\end{aligned}$$

für ein $C > 0$. □

Beweis zu Theorem 3.3.8. Die Abschätzung im vorherigen Beweis beruhte auf der Annahme, dass $h_k \gtrsim w_k$ ist. Dies wird die Konstruktion für ein großes a jedoch nicht immer erfüllen. Deshalb nehmen wir an, dass der Term in (3.9), welcher $\frac{w_k^2}{h_k^2}$ enthält, dominant wird.

Wie zuvor auch, sind die Summanden in (3.9) bis auf den K -ten Term vernachlässigbar, sodass sich die Energie bis auf einen konstanten Faktor folgendermaßen verhält:

$$\begin{aligned}
&\Delta \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} \\
&\sim \mathcal{H}^{n-1}(A) \left[\left(w_K^{2-\alpha} a^{-\gamma} (a-1)^{-\delta} \varepsilon^{-\beta} + w_K^{\alpha-n+1} a^\gamma (a-1)^\delta \varepsilon^{1+\beta} \left(1 + \frac{w_K^2}{h_K^2} \right) \right) + \sqrt{a(a-1)} w_K \right].
\end{aligned}$$

Angenommen, der erste Term sei vernachlässigbar. Wir müssen nun die Parameter so wählen, dass sich die verbleibenden Terme ausgleichen. Das ist der Fall, falls $1 \sim \frac{w_K^2}{h_K^2}$ und $w_K^{\alpha-n+1} a^\gamma (a-1)^\delta \varepsilon^{1+\beta} \sim \sqrt{a(a-1)} w_K$. Aus der ersten Proportionalität folgt $w_K \sim h_K$ oder äquivalent $w_K \sim a^{\frac{\gamma}{1-\alpha}} (a-1)^{\frac{\delta}{1-\alpha}} \varepsilon^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$, während die Zweite äquivalent ist zu $w_K \sim \left(a^{\frac{1}{2}-\gamma} (a-1)^{\frac{1}{2}-\delta} \varepsilon^{-1-\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha-n}}$.

Durch Gleichsetzen und der Wahl von α wie im vorherigen Beweis, $\alpha = \frac{n+1}{2}$, erhalten wir die Exponenten $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = \delta = \frac{1}{4}$, denn aus

$$a^{\frac{\gamma}{1-\alpha}} (a-1)^{\frac{\delta}{1-\alpha}} \varepsilon^{\frac{\beta}{1-\alpha}} = \left(a^{\frac{1}{2}-\gamma} (a-1)^{\frac{1}{2}-\delta} \varepsilon^{-1-\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha-n}}$$

folgt mit $\alpha = \frac{n+1}{2}$

$$\varepsilon^{\frac{2\beta}{1-n}} = \varepsilon^{(-1-\beta)\frac{2}{1-n}} \Leftrightarrow \varepsilon^\beta = \varepsilon^{-1-\beta} \Leftrightarrow 2\beta = -1 \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{2},$$

$$a^{\frac{2\gamma}{1-n}} = a^{(\frac{1}{2}-\gamma)\frac{2}{1-n}} \Leftrightarrow a^\gamma = a^{\frac{1}{2}-\gamma} \Leftrightarrow 2\gamma = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{4}$$

und analog zu $\gamma = \frac{1}{4}$ folgt $\delta = \frac{1}{4}$.

Die obige Skalierung von w_K zusammen mit

$$w_K = w_1 2^{1-K} = \tilde{c} \varepsilon^{-\frac{\beta}{\alpha}} a^{-\frac{\gamma}{\alpha}} (a-1)^{-\frac{\delta}{\alpha}} 2^{1-K} = \tilde{c} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{a(a-1)}} \right)^{\frac{1}{n+1}} 2^{1-K}$$

(siehe (3.2) und (3.4)) legt nun nahe, K folgendermaßen zu wählen

$$K = \lfloor \log_2 \left(4\tilde{c}\sqrt{n-1} (a(a-1))^{\frac{1}{n^2-1}} \varepsilon^{-\frac{2}{n^2-1}} \right) \rfloor.$$

Dann ist $K \geq 1$, denn

$$\lfloor \log_2 \left(4\tilde{c}\sqrt{n-1}(a(a-1))^{\frac{1}{n^2-1}}\varepsilon^{-\frac{2}{n^2-1}} \right) \rfloor \geq \lfloor \log_2 \left(2\sqrt{n-1}2^{\frac{1}{n^2-1}} \right) \rfloor \geq \lfloor \log_2 (2\sqrt{n-1}) \rfloor \geq 1.$$

Für eine Konstante $\hat{c} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ resultiert dies in

$$\begin{aligned} w_{K+1} &= w_1 2^{1-K-1} \\ &= \tilde{c} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{a(a-1)}} \right)^{\frac{1}{n+1}} 2^{-K} \\ &= \tilde{c} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{a(a-1)}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \frac{1}{2} - \left(\log_2 \left(4\tilde{c}\sqrt{n-1}(a(a-1))^{\frac{1}{n^2-1}}\varepsilon^{-\frac{2}{n^2-1}} \right) + \log_2(\hat{c}) \right) \\ &= \tilde{c} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{a(a-1)}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \frac{1}{4\tilde{c}\sqrt{n-1}} (a(a-1))^{-\frac{1}{n^2-1}} \varepsilon^{\frac{2}{n^2-1}} \frac{1}{\hat{c}} \\ &= \frac{1}{4\hat{c}\sqrt{n-1}} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{a(a-1)}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{\frac{n-1}{8} \frac{a}{a-1}} w_{K+1} \\ &= \sqrt{\frac{n-1}{8} \frac{a}{a-1}} \frac{1}{4\hat{c}\sqrt{n-1}} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{a(a-1)}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \frac{1}{\hat{c}\sqrt{128}} \sqrt{\frac{a}{a-1}} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{a(a-1)}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{32}} \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Somit sind die Bedingungen (3.7) erfüllt.

Schließlich erhalten wir für unsere Energieabschätzung (3.9)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\varepsilon, a, A} &\leq \mathcal{H}^{n-1}(A) \tilde{C} \left[\left(w_K^{2-\alpha} a^{-\gamma} (a-1)^{-\delta} \varepsilon^{-\beta} + w_K^{\alpha-n+1} a^\gamma (a-1)^\delta \varepsilon^{1+\beta} \left(1 + \frac{w_K^2}{h_K^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{a(a-1)} w_K \right] \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(A) \tilde{C} \left[2\sqrt{a(a-1)} w_K + \sqrt{a(a-1)} w_K \right] \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(A) C \sqrt{a(a-1)} \left(a^{\frac{1}{4}} (a-1)^{\frac{1}{4}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{\frac{n+1}{2}-n}} \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(A) C \sqrt{a(a-1)} (a(a-1))^{\frac{1}{4} \frac{2}{1-n}} \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(A) C \sqrt{a(a-1)}^{\frac{n-2}{n-1}} \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned}$$

für Konstanten $C, \tilde{C} > 0$.

□

Somit haben wir die obere Schranke für die optimale „urban planning“-Energie für alle Dimensionen bewiesen und können unsere Resultate wie in Theorem 2.6.2 zusammenfassen.

KAPITEL 4

Eine Verallgemeinerung von „urban planning“-Netzwerken

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, wie sich feinskalige Strukturen in einer Verallgemeinerung von „urban planning“-Netzwerken verhalten, indem wir auch für diese Netzwerke eine obere Schranke der Energie herleiten.

Dazu betrachten wir hier ebenfalls eine stetige, monoton steigende, subadditive, stückweise affine Kostenfunktion. Unter einer stückweise affinen Funktion verstehen wir eine Funktion f , welche auf jedem Teilintervall affin ist, d.h. von der Form $f(x) = cx + d$ ist.

Aufgrund der Subadditivität der Funktion ist es auch hier günstiger, Masse gemeinsam und nicht jeden Partikel einzeln zu transportieren. Es werden also auch in unserem verallgemeinerten Modell verzweigte Netzwerkstrukturen präferiert.

Zunächst werden wir uns eine geeignete Kostenfunktion konstruieren, wobei wir uns hier auf drei Teilintervalle beschränken werden. Anschließend werden wir für unser Problem eine Lagrangesche Formulierung angeben.

Bevor wir uns mit der tatsächlichen Energieskalierung beschäftigen, müssen wir auch in diesem Fall wieder etwas Vorarbeit leisten. Wir werden sehen, dass die in Kapitel 2 vorgestellten Hilfssätze in ähnlicher Form auch für unsere Verallgemeinerung gelten.

In dem Beweis der oberen Schranke werden wir dem gleichen Schema folgen wie im „urban planning“-Modell. Wir werden uns auch hier ein Irrigation Pattern mit der gewünschten Energie konstruieren. Die Konstruktion wird bis auf einige wenige kleine Ausnahmen analog zum ursprünglichen Problem erfolgen.

Schließlich werden wir eine obere Schranke für unsere Verallgemeinerung im Zweidimensionalen beweisen. Wir werden feststellen, dass auch hier der Hauptbeitrag der Überschussenergie im Inneren des Netzwerkes, auf den größten Strukturen, auftritt und von den Grenzen μ_0 und μ_1 weg beschränkt ist. Die Energieverteilung verhält sich also ähnlich wie im 2D „urban planning“-Modell.

4.1 Konstruktion der Kostenfunktion

Als Erstes wollen wir eine Kostenfunktion konstruieren, welche den oben genannten Eigenschaften der Funktion für unser verallgemeinertes Modell genügen soll. Wir betrachten folgende Situation:

Wie auch im Falle des „urban planning“-Modells kann ein Pendler für feste Kosten b_1 pro Reisedistanz auf einem Netzwerk Σ_1 mit Netzwerkunterhaltungskosten $\varepsilon_1 > 0$ reisen oder seine eigenen Transportmittel benutzen, für die er pro Reisedistanz etwas höhere Kosten

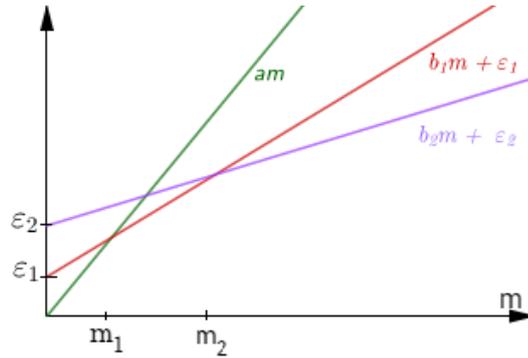


Abbildung 4.1: Stückweise lineare Kostenfunktion $c^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_1, b_2}(m) = \min\{am, b_1m + \varepsilon_1, b_2m + \varepsilon_2\}$.

$a > b_1$ zahlen muss. Zusätzlich steht ihm in dieser Verallgemeinerung ein weiteres Netzwerk Σ_2 mit festen Reisekosten $b_2 < b_1$ pro Reisedistanz zur Verfügung, welches allerdings höhere Netzwerkunterhaltungskosten $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ aufweist. Somit ist es erst ab einer bestimmten Masse m_2 , welche insgesamt auf dem Netzwerk transportiert wird, lohnenswert, auf diesem Netzwerk zu reisen.

Die minimalen Kosten, um eine gegebene Masse m von einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ nach $y \in \mathbb{R}^n$ zu transportieren, sind also gegeben durch die Kostenfunktion $c^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_1, b_2} : [0, \mathbb{R}] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$c^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_1, b_2}(m) = \min\{am, b_1m + \varepsilon_1, b_2m + \varepsilon_2\},$$

mit $b_2 < b_1 < a$ und $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ (siehe Abb. 4.1).

Wie bereits beim „urban planning“-Modell, setzen wir auch hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b_1 = 1$. Damit können wir unsere Kostenfunktion schreiben als

$$c^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}(m) = \min\{am, m + \varepsilon_1, b_2m + \varepsilon_2\},$$

wobei $a > 1$, $b_2 < 1$ und $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ist.

Falls m_2 die Masse bezeichnet, ab der es kostengünstiger ist, die Masse auf dem Netzwerk mit Unterhaltungskosten ε_2 anstelle von ε_1 zu transportieren, können wir die Netzwerkunterhaltungskosten ε_2 schreiben als

$$\varepsilon_2 = (1 - b_2)m_2 + \varepsilon_1.$$

Wir treffen hier die Annahme, dass unsere Parameter ε_1 und ε_2 fest sind. Somit können wir erwarten, dass der Wert $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ eine Konstante ist.

Auch in der Verallgemeinerung wollen wir Netzwerke mit sehr feinen Strukturen betrachten. Aus diesem Grund sind die Unterhaltungskosten der beiden Netzwerke ε_1 und ε_2 klein.

4.2 Lagrangesche Formulierung des verallgemeinerten „urban planning“-Modells

Als Nächstes wollen wir auch für unsere Verallgemeinerung der „urban planning“-Netzwerke eine Pattern-basierte Formulierung des Transportmodells angeben. Diese werden wir im

weiteren Verlauf dieses Kapitels benötigen, um auch die hier betrachteten Netzwerke durch ein Irrigation Pattern beschreiben zu können.

Definition 4.2.1. Sei $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), P_\Gamma)$ der Referenzraum und $\chi : \Gamma \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Irrigation Pattern. Für $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $a > 1$ und $b_2 < 1$ betrachte die Kostendichte

$$r_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}^\chi(x) = \begin{cases} \min\{a, 1 + \frac{\varepsilon_1}{m_\chi(x)}, b_2 + \frac{\varepsilon_2}{m_\chi(x)}\} & \text{falls } m_\chi(x) > 0, \\ a & \text{falls } m_\chi(x) = 0. \end{cases}$$

Die Kostenfunktion $F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}$ ist definiert durch

$$F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2} = \int_{\Gamma \times I} r_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}^\chi(\chi_p(t)) |\dot{\chi}_p(t)| dP_\Gamma(p) dt.$$

Für $\mu_0, \mu_1 \in \text{fbm}(\mathbb{R}^n)$ ist das Problem

$$\min \mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, \mu_0, \mu_1}[\chi],$$

wobei

$$\mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, \mu_0, \mu_1}[\chi] = \begin{cases} F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}(\chi) & \text{falls } \mu_+^\chi = \mu_0 \text{ und } \mu_-^\chi = \mu_1, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zusätzlich ist es möglich, unser verallgemeinertes Problem in einer Netzwerk- und einer Eulerschen Formulierung anzugeben. Aus diesem Grund können wir wie in [BW15a] die Äquivalenz der Optimierungsprobleme

$$\min_{\chi} \mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, \mu_0, \mu_1}[\chi] = \min_{\Sigma} \mathcal{F}_W^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, 1, b_2, \mu_0, \mu_1}$$

und die Existenz minimierender Pattern zeigen. Analog wie für das „urban planning“-Modell in [BW15a] kann man auch für diesen Spezialfall ein Reparametrisierungsergebnis erhalten.

Proposition 4.2.2 (Konstante Geschwindigkeitsreparametrisierung von Pattern). *Irrigation Pattern mit endlichen Kosten können so reparametrisiert werden, dass $\chi_p : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig ist und $|\dot{\chi}_p|$ konstant ist für fast alle $p \in \Gamma$, ohne dass sich die Kosten $F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}$ verändern.*

4.3 Die optimale Energie

Wir werden auch hier die in Kapitel 2.5 eingeführte Geometrie betrachten. Für einen Hyperquadrat $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $m > 0$ betrachten wir die zwei Maße

$$\mu_0 = m \mathcal{H}^{n-1} \llcorner (A \times \{0\}), \quad \mu_1 = m \mathcal{H}^{n-1} \llcorner (A \times \{L\}).$$

Deswegen setzen wir

$$\mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A, m, L} = \mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, \mu_0, \mu_1}.$$

Durch Umskalierung der Geometrie und des Masseflusses erhalten wir leicht folgende Entdimensionalisierung

$$\mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A, m, L}[\chi] = L^n m \mathcal{F}_{L^{n-1}m, L^{n-1}m, a, b_2, \frac{1}{L}A, 1, 1}[\frac{1}{L}\chi],$$

sodass wir uns beschränken können auf

$$\mu_0 = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner (A \times \{0\}), \quad \mu_1 = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner (A \times \{1\}) \text{ und } \mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A} := \mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A, 1, 1}.$$

Wir bezeichnen die Mindestenergie für $\varepsilon_2 = 0$, also insbesondere auch $\varepsilon_1 = 0$, mit

$$\mathcal{F}^{*, a, b_2, A} = \inf_{\chi} \mathcal{F}^{0, 0, a, b_2, A}[\chi].$$

Auch für die Mindestenergie $\mathcal{F}^{*, a, b_2, A}$ können wir die Aussage des Lemmas 2.6.1 annehmen.

Lemma 4.3.1. *Es gilt $\mathcal{F}^{*, a, b_2, A} = W_1(\mu_0, \mu_1) = \mathcal{H}^{n-1}(A)$.*

Beweis. Wegen $b_2 \rightarrow 1$ für $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ gilt $\mathcal{F}^{*, a, b_2, A} = \mathcal{F}^{*, a, 1, A}$. Damit erhält man analog wie im Beweis 2.6.1 $\mathcal{F}^{*, a, b_2, A} = W_1(\mu_0, \mu_1) = \mathcal{H}^{n-1}(A)$. \square

Für $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ weicht die Mindestenergie von $\mathcal{F}^{*, a, b_2, A}$ ab. Wir werden später die Überschussenergie

$$\Delta \mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A} = \min_{\chi} \mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A}[\chi] - \mathcal{F}^{*, a, b_2, A}$$

betrachten.

4.4 Konstruktionen der Netzwerke

Unsere Konstruktionen für die verallgemeinerten „urban planning“-Netzwerke werden aus den Zelltypen bestehen, welche wir bereits bei den Konstruktionen der „urban planning“-Netzwerke verwendet haben. Dabei werden auch hier die Elementarzellen (siehe Definition 3.2.1) die inneren Schichten der Konstruktion bilden, während die Schicht an der oberen und unteren Grenze aus Wassersteinzellen (siehe Definition 3.2.3) bestehen wird.

Um später eine obere Schranke für die Energie der Konstruktionen bestimmen zu können, benötigen wir also die Kosten des verallgemeinerten Modells für die beiden Zelltypen.

Lemma 4.4.1 (Kosten der Elementarzelle). *Die Energie einer Elementarzelle erfüllt*

$$F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}(\chi_{x, w, h, f}^E) = 2^{n-1} \min\{af, f + \varepsilon_1, b_2f + \varepsilon_2\}l$$

für l wie in 3.1.

Beweis. Die Masse, welche durch den Punkt \tilde{x} eines Zweiges fließt, ist gegeben durch $m_{\chi_{x,w,h,f}^E}(\tilde{x}) = f$. Durch Einsetzen von $\chi_{x,w,h,f}^E$ und P_{Γ_f} in Definition 4.2.1 erhalten wir

$$\begin{aligned}
F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}(\chi_{x,w,h,f}^E) &= \int_{\Gamma_f} \int_0^1 r_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}^{\chi}(\chi_{x,w,h,f}^E(p, t)) |\dot{\chi}_{x,w,h,f}^E(p, t)| dt dP_{\Gamma_f}(p) \\
&= \int_{\Gamma_f} \int_0^1 \min\{a, 1 + \frac{\varepsilon_1}{m_{\chi}(x)}, b_2 + \frac{\varepsilon_2}{m_{\chi}(x)}\} |(\frac{w}{2}m_j, h)| dt dP_{\Gamma_f}(p) \\
&= \min\{a, 1 + \frac{\varepsilon_1}{f}, b_2 + \frac{\varepsilon_2}{f}\} \int_{\Gamma_f} \sqrt{\frac{w^2}{4}|m_j|^2 + h^2} df \mathcal{L}^{n-1} \lfloor \Gamma_f(p) \\
&= \min\{a, 1 + \frac{\varepsilon_1}{f}, b_2 + \frac{\varepsilon_2}{f}\} 2^{n-1} f \sqrt{\frac{w^2}{4} \frac{1}{4} |j|^2 + h^2} \\
&= 2^{n-1} \min\{af, f + \varepsilon_1, b_2 f + \varepsilon_2\} \sqrt{(\frac{w}{4})^2 (n-1) + h^2} \\
&= 2^{n-1} \min\{af, f + \varepsilon_1, b_2 f + \varepsilon_2\} l.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.4.2 (Kosten der Wassersteinzelle). *Die Energie einer Wassersteinzelle erfüllt*

$$F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}(\chi_{x,w,h,f}^W) \leq \begin{cases} \min\{af, f + \varepsilon_1, b_2 f + \varepsilon_2\} & \text{falls } n = 2 \text{ und } h = 0, \\ 2^{n-1} af \sqrt{\frac{(n-1)}{4} w^2 + h^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Mit Definition 4.2.1 geht der Beweis analog wie für das „urban planning“-Modell (siehe Lemma 3.2.4). □

Wir wollen auch die verallgemeinerten „urban planning“-Netzwerke durch ein Irrigation Pattern beschreiben. Dieses wird aus vielen Irrigation Pattern zusammengesetzt sein, welche jeweils eine Elementar- oder Wassersteinzelle darstellen. Aus diesem Grund müssen wir untersuchen, wie sich die Energie unseres Modells verhält, wenn wir zwei Pattern mit Hilfe der in Definition 3.1.1 und 3.1.2 definierten Operationen kombinieren.

Wir werden feststellen, dass unsere Energie $F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}$ die gleichen Eigenschaften wie die „urban planning“-Energie erfüllt (siehe Lemma 3.1.3). Dies ermöglicht es uns, bei der Konstruktion des Netzwerkes größtenteils analog wie in Kapitel 3 zu verfahren und somit im weiteren Verlauf dieser Arbeit häufig auf dieses zu verweisen, sodass wir uns auf die wenigen Unterschiede konzentrieren werden.

Lemma 4.4.3. *Die verallgemeinerte „urban planning“-Energie $F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}$ erfüllt die elementaren Eigenschaften*

- (i) $F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}(\chi_1 \amalg \chi_2) \leq F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}(\chi_1) + F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}(\chi_2)$,
- (ii) $F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}(\chi_1 \circ_T \chi_2) \leq F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}(\chi_1) + F_P^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}(\chi_2)$.

Beweis.

(i) Die Kostendichte für die Vereinigung zweier Pattern χ_1 und χ_2 erfüllt

$$r_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}^{\chi_1 \amalg \chi_2}(x) \leq r_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}^{\chi_1}(x) \quad \text{und} \quad r_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}^{\chi_1 \amalg \chi_2}(x) \leq r_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}^{\chi_2}(x).$$

Damit geht der Beweis analog wie für die „urban planning“-Energie (siehe Beweis zu Lemma 3.1.3).

(ii) Auch für die Aneinanderreihung zweier Pattern gilt

$$r_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}^{\chi_1 \circ_T \chi_2}(x) \leq r_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}^{\chi_1}(x) \quad \text{und} \quad r_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}^{\chi_1 \circ_T \chi_2}(x) \leq r_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2}^{\chi_2}(x).$$

Somit folgt mit Proposition 4.2.2 die Ungleichung analog wie im Beweis von Lemma 3.1.3.

□

4.5 Obere Schranke für die optimale Energie $\mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A}$

Um eine obere Schranke zu erhalten, wollen wir uns auch hier ein Irrigation Pattern mit der gewünschten Energie konstruieren. Die Konstruktion unseres Pattern erfolgt analog wie im Fall des „urban planning“-Modells.

Während wir den Basispunkt $x_{k,i}$, die Breite w_k und den Fluss f_k der i -ten Elementarzelle in der k -ten Schicht analog wie für das „urban planning“-Modell wählen (siehe (3.2)), müssen wir den Wert für die Höhe der k -ten Schicht aufgrund seiner Abhängigkeit von den Transport- und Netzwerkunterhaltungskosten für unsere Verallgemeinerung anpassen. Somit muss von nun an zusätzlich die Differenz $(a - b_2)$ Einfluss auf die Höhe der Elementarzellen und damit auf das Verhältnis von horizontalem und vertikalem Transport haben. Ebenso muss bei den Netzwerkunterhaltungskosten differenziert werden zwischen ε_1 und ε_2 , sodass beide Werte zu einem gewissen Anteil ins Gewicht fallen werden. Deshalb wählen wir die Höhe der k -ten Schicht als

$$h_k = cw_k^\alpha \varepsilon_1^{\beta_1} \varepsilon_2^{\beta_2} a^\gamma (a - 1)^{\delta_1} (a - b_2)^{\delta_2}$$

für einige zu bestimmende Konstanten $c, \alpha, \beta_1, \gamma, \delta_1, \delta_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Das Irrigation Pattern $\chi = \chi_1 \circ_{Id} \chi_2$, welches das gesamte Netzwerk beschreibt, wird analog konstruiert wie für das ursprüngliche „urban planning“-Modell in Kapitel 3.

Um die Breite der größten Elementarzelle zu bestimmen, verwenden wir auch hier die Tatsache, dass die Gesamthöhe unserer Konstruktion 1 sein muss. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \left(\sum_{k=1}^K h_k + H \right) \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^K cw_k^\alpha \varepsilon_1^{\beta_1} \varepsilon_2^{\beta_2} a^\gamma (a - 1)^{\delta_1} (a - b_2)^{\delta_2} + H \right) \\ &= 2cw_1^\alpha \varepsilon_1^{\beta_1} \varepsilon_2^{\beta_2} a^\gamma (a - 1)^{\delta_1} (a - b_2)^{\delta_2} \frac{1 - 2^{-K\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}} + 2H. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Im Folgenden werden wir verwenden, dass die Konstanten α , β_1 und β_2 ungleich 0 sind. Später werden wir sehen, dass wir in unserem Beweis die Konstanten tatsächlich so wählen werden, dass diese Einschränkung nicht verletzt wird.

Unter der Annahme, dass $1 - 2H$ immer noch von Ordnung 1 ist, gilt

$$w_1 \sim \varepsilon_1^{-\frac{\beta_1}{\alpha}} \varepsilon_2^{-\frac{\beta_2}{\alpha}} a^{-\frac{\gamma}{\alpha}} (a-1)^{-\frac{\delta_1}{\alpha}} (a-b_2)^{-\frac{\delta_2}{\alpha}}.$$

Basierend auf diesen Heuristiken wählen wir

$$w_1 = \tilde{c} \varepsilon_1^{-\frac{\beta_1}{\alpha}} \varepsilon_2^{-\frac{\beta_2}{\alpha}} a^{-\frac{\gamma}{\alpha}} (a-1)^{-\frac{\delta_1}{\alpha}} (a-b_2)^{-\frac{\delta_2}{\alpha}} \text{ für } \tilde{c} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \quad (4.2)$$

wobei \tilde{c} auch hier so gewählt ist, dass die Seitenlängen des Hyperquadrates l ein ganzzahlig Vielfaches von w_1 ist. Insbesondere setzt dies $w_1 \leq l$ voraus. Dadurch erhalten wir für all unsere Konstruktionen folgende Bedingungen an ε_2 und somit, wegen $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, insbesondere an ε_1 :

$$\begin{aligned} w_1 &\leq l \\ \Leftrightarrow \tilde{c} \varepsilon_1^{-\frac{\beta_1}{\alpha}} \varepsilon_2^{-\frac{\beta_2}{\alpha}} a^{-\frac{\gamma}{\alpha}} (a-1)^{-\frac{\delta_1}{\alpha}} (a-b_2)^{-\frac{\delta_2}{\alpha}} &\leq n^{-1} \sqrt{\mathcal{H}^{n-1}(A)} \\ \Rightarrow \varepsilon_1^{-\frac{\beta_1}{\alpha}} \varepsilon_2^{-\frac{\beta_2}{\alpha}} &\leq a^{\frac{\gamma}{\alpha}} (a-1)^{\frac{\delta_1}{\alpha}} (a-b_2)^{\frac{\delta_2}{\alpha}} \mathcal{H}^{n-1}(A)^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned}$$

und unter der Voraussetzung, dass wir später α , β_1 und β_2 so wählen werden, dass $\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha} < 0$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon_2^{-\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha}} &\leq a^{\frac{\gamma}{\alpha}} (a-1)^{\frac{\delta_1}{\alpha}} (a-b_2)^{\frac{\delta_2}{\alpha}} \mathcal{H}^{n-1}(A)^{\frac{1}{n-1}} \\ \Rightarrow \varepsilon_2 &\leq a^{-\frac{\gamma}{\beta_1+\beta_2}} (a-1)^{-\frac{\delta_1}{\beta_1+\beta_2}} (a-b_2)^{-\frac{\delta_2}{\beta_1+\beta_2}} \mathcal{H}^{n-1}(A)^{-\frac{\alpha}{(\beta_1+\beta_2)(n-1)}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Durch Einsetzen von (4.2) in (4.1) erhalten wir für unsere Konstante c

$$\begin{aligned} 1 &= 2c w_1^\alpha \varepsilon_1^{\beta_1} \varepsilon_2^{\beta_2} a^\gamma (a-1)^{\delta_1} (a-b_2)^{\delta_2} \frac{1-2^{-K\alpha}}{1-2^{-\alpha}} + 2H \\ \Leftrightarrow 1 &= 2c \tilde{c}^\alpha \varepsilon_1^{-\beta_1} \varepsilon_2^{-\beta_2} a^\gamma (a-1)^{-\delta_1} (a-b_2)^{-\delta_2} \varepsilon_1^{\beta_1} \varepsilon_2^{\beta_2} a^\gamma (a-1)^{\delta_1} (a-b_2)^{\delta_2} \frac{1-2^{-K\alpha}}{1-2^{-\alpha}} + 2H \\ \Leftrightarrow 1 - 2H &= 2c \tilde{c}^\alpha \frac{1-2^{-K\alpha}}{1-2^{-\alpha}} \\ \Leftrightarrow c &= \frac{1-2H}{2\tilde{c}^\alpha} \frac{1-2^{-\alpha}}{1-2^{-K\alpha}} \text{ für } \tilde{c} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{aligned}$$

Auch für diesen Fall werden in unseren Konstruktionen die Bedingungen

$$K \geq 1, \quad H \leq \frac{1}{4}, \quad \alpha > 0 \quad (4.4)$$

sichergestellt sein. Damit ist auch hier $c \in \left[\frac{1-2^{-\alpha}}{4}, 2^{\alpha-1}\right]$.

Analog wie in (3.8) können wir die Überschussenergie $\Delta\mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A}$ folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A} &\leq \mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A} - \mathcal{F}^{*, a, b_2, A} \\ &\leq 2 \left[\sum_{k=1}^K \sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}^{n-1}} \left(F_p^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2} \left[\chi_{x_k, i, w_k, h_k, f_k}^E \right] - w_k^{n-1} h_k \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \in \{1, \dots, N_{K+1}\}^{n-1}} \left(F_p^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, s} \left[\chi_{x_{K+1}, i, w_{K+1}, H, f_{K+1}}^W \right] - w_{K+1}^{n-1} H \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.6 Obere Schranke in 2D

Für unsere Verallgemeinerung des „urban planning“-Modells erhalten wir im Zweidimensionalen folgende Resultate.

Theorem 4.6.1 (Partielle obere Schranke von $\Delta\mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A}$ in 2D). *Es existiert ein $C > 0$, welches unabhängig ist von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A$, sodass für alle $\varepsilon_2 < \min\{1, \mathcal{H}^1(A)^{\frac{3}{2}}\}$ gilt*

$$\Delta\mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A} \leq \mathcal{H}^1(A) C \varepsilon_1^{\frac{1}{6}} \varepsilon_2^{\frac{1}{6}}.$$

Vor dem Beweis schauen wir uns noch ein Korollar an, welches direkt aus dem Theorem folgt.

Korollar 4.6.2. *Für dasselbe C wie zuvor, für alle $\varepsilon_2 < \min\{1, \mathcal{H}^1(A)^{\frac{3}{2}}\}$ gilt*

$$\Delta\mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A} \leq \mathcal{H}^1(A) \min\{a - 1, C \varepsilon_1^{\frac{1}{6}} \varepsilon_2^{\frac{1}{6}}\}.$$

Beweis zu Korollar 4.6.2. Der Beweis geht unter Verwendung von Lemma 4.3.1 analog wie im Falle des „urban planning“-Modells. \square

Der Beweis zu Theorem 4.6.1 wird sich wie folgt von dem Beweis zu Theorem 3.3.2 im Hinblick auf unsere veränderte Kostenfunktion unterscheiden: Für die Elementarzellen, aus denen das Innere unserer Konstruktion aufgebaut ist, haben wir das Ursprungs- und Zielmaß folgendermaßen gewählt

$$\mu_+^{\chi_{x, w, h, f}^E} = 2^{n-1} f \delta_x \quad \text{und} \quad \mu_-^{\chi_{x, w, h, f}^E} = f \sum_{j \in \{-1, 1\}^{n-1}} \delta_x \left(x' + \frac{w}{2} m_j, x_n + h \right).$$

Somit verringert sich der Massefluss auf einer Elementarzelle von Schicht zu Schicht um das 2^{n-1} -fache. Das bedeutet, dass der Massefluss auf der größten Schicht, in der Mitte unserer Konstruktion, am größten ist und sich zum Rand hin exponentiell verringert.

Aus diesem Grund können wir annehmen, dass auf den ersten K_S Schichten die Kosten der einzelnen Elementarzellen $2^{n-1}(b_2 f_k + \varepsilon_2)l$ für $k = 1, \dots, K_S$ betragen. Ab der $K_S + 1$ -ten

Schicht wird sich die über eine Elementarzelle zu transportierende Masse soweit verringert haben, dass die Kosten für den Transport auf dem Netzwerk mit Transportkosten $b_1 = 1$ und Unterhaltungskosten ε_1 minimal sein werden.

Deshalb werden wir in unserer Abschätzung die Summe über die ersten K_S Schichten und die Summe über die restlichen $K - K_S$ Schichten getrennt voneinander betrachten.

Beweis zu Theorem 4.6.1. In der zweidimensionalen Konstruktion setzen wir die Höhe der obersten Schicht der Wassersteinzellen gleich 0, d.h.

$$H = 0.$$

Mit Lemma 4.4.1 und 4.4.2 eingesetzt in (4.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \Delta \mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A} \\ & \leq 2 \left[\sum_{k=1}^{K_S} N_k \left(F_p^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2} \left[\chi_{x_{k,i}, w_k, h_k, f_k}^E \right] - w_k h_k \right) + N_{K+1} \left(F_p^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2} \left[\chi_{x_{K+1,i}, w_{K+1}, H, f_{K+1}}^W \right] \right) \right] \\ & \leq \mathcal{H}^1(A) 2 \left[\sum_{k=1}^{K_S} \frac{1}{w_k} (2(b_2 f_k + \varepsilon_2)l - w_k h_k) + \sum_{k=K_S+1}^K \frac{1}{w_k} (2(f_k + \varepsilon_1)l - w_k h_k) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{w_{K+1}} (f_{K+1} + \varepsilon_2) w_{K+1} \right] \\ & = \mathcal{H}^1(A) 2 \left[\sum_{k=1}^{K_S} \frac{1}{w_k} \left(2(b_2 \frac{w_k}{2} + \varepsilon_2) \sqrt{\frac{w_k^2}{16} + h_k^2} - w_k h_k \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=K_S+1}^K \frac{1}{w_k} \left(2\left(\frac{w_k}{2} + \varepsilon_1\right) \sqrt{\frac{w_k^2}{16} + h_k^2} - w_k h_k \right) + \left(\frac{w_{K+1}}{2} + \varepsilon_2\right) \right] \\ & = \mathcal{H}^1(A) 2 \left[\sum_{k=1}^{K_S} h_k \left(\left(b_2 + \frac{2\varepsilon_2}{w_k}\right) \sqrt{1 + \frac{w_k^2}{16h_k^2}} - 1 \right) + \sum_{k=K_S+1}^K h_k \left(\left(1 + \frac{2\varepsilon_1}{w_k}\right) \sqrt{1 + \frac{w_k^2}{16h_k^2}} - 1 \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{w_{K+1}}{2} + \varepsilon_2\right) \right] \\ & \leq \mathcal{H}^1(A) 2 \left[\sum_{k=1}^{K_S} h_k \left(\left(b_2 + \frac{2\varepsilon_2}{w_k}\right) \left(1 + \frac{w_k^2}{32h_k^2}\right) - 1 \right) + \sum_{k=K_S+1}^K h_k \left(\left(1 + \frac{2\varepsilon_1}{w_k}\right) \left(1 + \frac{w_k^2}{32h_k^2}\right) - 1 \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{w_{K+1}}{2} + \varepsilon_2\right) \right] \\ & = \mathcal{H}^1(A) 2 \left[\sum_{k=1}^{K_S} h_k \left(b_2 + \frac{2\varepsilon_2}{w_k} + \frac{b_2 w_k^2}{32h_k^2} + \frac{2\varepsilon_2 w_k}{32h_k^2} - 1 \right) + \sum_{k=K_S+1}^K h_k \left(\frac{w_k^2}{32h_k^2} + \frac{2\varepsilon_1}{w_k} + \frac{2\varepsilon_1 w_k}{32h_k^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{w_{K+1}}{2} + \varepsilon_2\right) \right], \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt $\sqrt{1+z} \leq 1 + \frac{z}{2}$ verwendet haben.

Der Parameter a erscheint in dieser Abschätzung nicht explizit, sodass wir erwarten, dass $\gamma = 0$, $\delta_1 = 0$ und $\delta_2 = 0$ optimal sind.

Wie auch beim „urban planning“-Problem werden wir die Schichtung nur solange fortführen, wie $2cw_k \leq h_k$ ist oder äquivalent unter der Annahme von $\alpha > 1$, solange wie $2^{2-k}w_1 \geq \varepsilon_1^{\frac{\beta_1}{1-\alpha}} \varepsilon_2^{\frac{\beta_2}{1-\alpha}}$ ist. Deswegen setze

$$K = \lfloor 2 + \log_2 \left(w_1 \varepsilon_1^{\frac{\beta_1}{\alpha-1}} \varepsilon_2^{\frac{\beta_2}{\alpha-1}} \right) \rfloor,$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ den ganzzahligen Teil bezeichnet. Bemerke, dass wir später noch $K \geq 1$ nachweisen müssen (siehe (4.4)).

Somit gilt

$$2cw_k \leq h_k \quad \Leftrightarrow \quad 4 \frac{w_k^2}{h_k^2} \leq \frac{1}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{w_k^2}{16h_k^2} \leq \frac{1}{64c^2}$$

für alle $k \leq K$ und

$$\begin{aligned} w_{K+1} &= 2^{1-K-1}w_1 = 2^{-\lfloor 2 + \log_2 \left(w_1 \varepsilon_1^{\frac{\beta_1}{\alpha-1}} \varepsilon_2^{\frac{\beta_2}{\alpha-1}} \right) \rfloor} w_1 < 2^{-\left(2 + \log_2 \left(w_1 \varepsilon_1^{\frac{\beta_1}{\alpha-1}} \varepsilon_2^{\frac{\beta_2}{\alpha-1}} \right) - 1 \right)} w_1 \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_1^{\frac{\beta_1}{1-\alpha}} \varepsilon_2^{\frac{\beta_2}{1-\alpha}} \frac{w_1}{w_1} < \varepsilon_1^{\frac{\beta_1}{1-\alpha}} \varepsilon_2^{\frac{\beta_2}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Damit kann die Überschussenergie abgeschätzt werden als

$$\begin{aligned} &\Delta \mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A} \\ &\leq \mathcal{H}^1(A) 2 \left[\sum_{k=1}^{K_S} h_k (b_2 - 1) + b_2 \frac{w_k^2}{32h_k} + \varepsilon_2 \frac{h_k}{w_k} \left(2 + \frac{w_k^2}{16h_k^2} \right) + \sum_{k=K_S+1}^K \frac{w_k^2}{32h_k} + \varepsilon_1 \frac{h_k}{w_k} \left(2 + \frac{w_k^2}{16h_k^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{w_{K+1}}{2} + \varepsilon_2 \right) \right] \\ &\leq \mathcal{H}^1(A) \left[\sum_{k=1}^{K_S} 2h_k (b_2 - 1) + b_2 \frac{w_k^2}{16h_k} + \varepsilon_2 \frac{h_k}{w_k} \left(4 + \frac{1}{32c^2} \right) + \sum_{k=K_S+1}^K \frac{w_k^2}{16h_k} + \varepsilon_1 \frac{h_k}{w_k} \left(4 + \frac{1}{32c^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\varepsilon_1^{\frac{\beta_1}{1-\alpha}} \varepsilon_2^{\frac{\beta_2}{1-\alpha}} + 2\varepsilon_2 \right) \right] \\ &\leq \mathcal{H}^1(A) \left[\sum_{k=1}^{K_S} b_2 \frac{w_k^2}{16cw_k^\alpha \varepsilon_1^{\beta_1} \varepsilon_2^{\beta_2}} + \varepsilon_2 \frac{cw_k^\alpha \varepsilon_1^{\beta_1} \varepsilon_2^{\beta_2}}{w_k} \left(4 + \frac{1}{32c^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=K_S+1}^K \frac{w_k^2}{16cw_k^\alpha \varepsilon_1^{\beta_1} \varepsilon_2^{\beta_2}} + \varepsilon_1 \frac{cw_k^\alpha \varepsilon_1^{\beta_1} \varepsilon_2^{\beta_2}}{w_k} \left(4 + \frac{1}{32c^2} \right) + \left(\varepsilon_1^{\frac{\beta_1}{1-\alpha}} \varepsilon_2^{\frac{\beta_2}{1-\alpha}} + 2\varepsilon_2 \right) \right] \\ &= \mathcal{H}^1(A) \left[\sum_{k=1}^{K_S} \frac{1}{16c} b_2 w_k^{2-\alpha} \varepsilon_1^{-\beta_1} \varepsilon_2^{-\beta_2} + \left(4c + \frac{1}{32c} \right) w_k^{\alpha-1} \varepsilon_1^{\beta_1} \varepsilon_2^{\beta_2+1} + \sum_{k=K_S+1}^K \frac{1}{16c} w_k^{2-\alpha} \varepsilon_1^{-\beta_1} \varepsilon_2^{-\beta_2} \right. \\ &\quad \left. + \left(4c + \frac{1}{32c} \right) w_k^{\alpha-1} \varepsilon_1^{\beta_1+1} \varepsilon_2^{\beta_2} + \left(\varepsilon_1^{\frac{\beta_1}{1-\alpha}} \varepsilon_2^{\frac{\beta_2}{1-\alpha}} + 2\varepsilon_2 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathcal{H}^1(A) \left[\sum_{k=1}^{K_S} \frac{1}{16c} (2^{1-k} w_1)^{2-\alpha} \varepsilon_1^{-\beta_1} \varepsilon_2^{-\beta_2} + \left(4c + \frac{1}{32c}\right) (2^{1-k} w_1)^{\alpha-1} \varepsilon_1^{\beta_1} \varepsilon_2^{\beta_2+1} \right. \\
&\quad + \sum_{k=K_S+1}^K \frac{1}{16c} (2^{1-k} w_1)^{2-\alpha} \varepsilon_1^{-\beta_1} \varepsilon_2^{-\beta_2} + \left(4c + \frac{1}{32c}\right) (2^{1-k} w_1)^{\alpha-1} \varepsilon_1^{\beta_1+1} \varepsilon_2^{\beta_2} \\
&\quad \left. + \left(\varepsilon_1^{\frac{\beta_1}{1-\alpha}} \varepsilon_2^{\frac{\beta_2}{1-\alpha}} + 2\varepsilon_2 \right) \right]
\end{aligned}$$

Um die Summanden zu minimieren, wählen wir nun die optimalen Exponenten

$$\alpha = \frac{3}{2}, \beta_1 = -\frac{1}{2} \text{ und } \beta_2 = -\frac{1}{2}.$$

Durch Einsetzen der optimalen Exponenten in unsere Energieabschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\Delta \mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A} \\
&\leq \mathcal{H}^1(A) \left[\sum_{k=1}^{K_S} \frac{1}{16c} 2^{\frac{1-k}{2}} w_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \left(4c + \frac{1}{32c}\right) 2^{\frac{1-k}{2}} w_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon_1^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=K_S+1}^K \frac{1}{16c} 2^{\frac{1-k}{2}} w_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \left(4c + \frac{1}{32c}\right) 2^{\frac{1-k}{2}} w_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\varepsilon_2 \right] \\
&= \mathcal{H}^1(A) \left[\sqrt{2} \left(\frac{1}{16c} \sqrt{\varepsilon_1} + \left(4c + \frac{1}{32c}\right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \right) \sqrt{w_1} \sqrt{\varepsilon_2} \sum_{k=1}^{K_S} 2^{-\frac{k}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{2} \left(\frac{1}{16c} \sqrt{\varepsilon_2} + \left(4c + \frac{1}{32c}\right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right) \sqrt{w_1} \sqrt{\varepsilon_1} \sum_{k=K_S+1}^K 2^{-\frac{k}{2}} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\varepsilon_2 \right] \\
&\leq \mathcal{H}^1(A) \left[\frac{2}{2-\sqrt{2}} \left(\frac{1}{16c} \sqrt{\varepsilon_1} + \left(4c + \frac{1}{32c}\right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \right) \sqrt{w_1} \sqrt{\varepsilon_2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{2-\sqrt{2}} \left(\frac{1}{16c} \sqrt{\varepsilon_2} + \left(4c + \frac{1}{32c}\right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right) \sqrt{w_1} \sqrt{\varepsilon_1} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\varepsilon_2 \right],
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Beschränktheit der geometrischen Summe ausgenutzt haben.

Bemerke, dass für diese Parameter $w_1 = \tilde{c} \varepsilon_1^{-\frac{\beta_1}{\alpha}} \varepsilon_2^{-\frac{\beta_2}{\alpha}} a^{-\frac{\gamma}{\alpha}} (a-1)^{-\frac{\delta_1}{\alpha}} (a-b_2)^{-\frac{\delta_2}{\alpha}} = \tilde{c} \varepsilon_1^{\frac{1}{3}} \varepsilon_2^{\frac{1}{3}}$ ist und somit sind wegen

$$K = \lfloor 2 + \log_2 \left(w_1 \varepsilon_1^{\frac{\beta_1}{\alpha-1}} \varepsilon_2^{\frac{\beta_2}{\alpha-1}} \right) \rfloor = 2 + \lfloor \log_2 \left(\tilde{c} \varepsilon_1^{-23} \varepsilon_2^{-\frac{2}{3}} \right) \rfloor \geq 2 + \lfloor \log_2(\tilde{c}) \rfloor \geq 2 - 1 = 1$$

die Umsetzbarkeitskriterien (4.4) tatsächlich erfüllt, während Bedingung (4.3) zu $\varepsilon_2 \leq \mathcal{H}^1(A)^{\frac{3}{2}}$ wird.

Damit erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
& \Delta \mathcal{F}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_2, A} \\
& \leq \mathcal{H}^1(A) \left[\frac{2}{2 - \sqrt{2}} \sqrt{w_1} \sqrt{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{16c} \sqrt{\varepsilon_1} + \left(4c + \frac{1}{32c}\right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} + \frac{1}{16c} \sqrt{\varepsilon_2} + \left(4c + \frac{1}{32c}\right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\varepsilon_2 \right] \\
& \leq \mathcal{H}^1(A) \left[\frac{2}{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\tilde{c} \varepsilon_1^{\frac{1}{6}} \varepsilon_2^{\frac{1}{6}}} \sqrt{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{16c} \sqrt{\varepsilon_2} + \left(4c + \frac{1}{32c}\right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} + \frac{1}{16c} \sqrt{\varepsilon_2} + \left(4c + \frac{1}{32c}\right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\varepsilon_2 \right] \\
& = \mathcal{H}^1(A) \left[\frac{2}{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\tilde{c} \varepsilon_1^{\frac{1}{6}} \varepsilon_2^{\frac{1}{6}}} \sqrt{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{8c} \sqrt{\varepsilon_2} + \left(8c + \frac{1}{16c}\right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \right) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\varepsilon_2 \right] \\
& \leq \mathcal{H}^1(A) \left[\frac{2}{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\tilde{c} \varepsilon_1^{\frac{1}{6}} \varepsilon_2^{\frac{1}{6}}} \varepsilon_2 \left(\frac{1}{8c} + \left(8c + \frac{1}{16c}\right) \frac{1}{\varepsilon_1} \right) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\varepsilon_2 \right] \\
& \leq \mathcal{H}^1(A) \left[\frac{2}{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\tilde{c} \varepsilon_1^{\frac{1}{6}} \varepsilon_2^{\frac{1}{6}}} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{8c} + 8c + \frac{1}{16c} \right) + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2 \right] \\
& \leq C \mathcal{H}^1(A) \varepsilon_1^{\frac{1}{6}} \varepsilon_2^{\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

für ein $C > 0$ das gewünschte Resultat. \square

In dem Beweis zu Theorem 4.6.1 können wir sehen, dass der Beitrag zur Überschussenergie für kleine k am größten ist. Somit stammt der Hauptbeitrag der Überschussenergie auch in unserem verallgemeinerten „urban planning“-Modell von den größten Strukturen im Inneren des Netzwerkes.

KAPITEL 5

Fazit und Ausblick

In dieser Bachelorarbeit haben wir uns mit feinskaligen Strukturen in „urban planning“-Netzwerken beschäftigt und darauf aufbauend feinskalige Strukturen in einer Verallgemeinerung dieser Netzwerke betrachtet. Diese bestand in der Erweiterung der „urban planning“-Kostenfunktion auf eine stückweise affine Funktion, wobei wir uns hier auf drei Teilintervalle beschränkt haben.

Es hat sich herausgestellt, dass die Verallgemeinerung, genauso wie das ursprüngliche „urban planning“-Modell, zu verzweigten Netzwerkstrukturen führt. Deshalb konnten wir für den Beweis der oberen Schranke für unsere Verallgemeinerung im Zweidimensionalen dem gleichen Schema folgen wie beim „urban planning“-Modell.

Wir haben gesehen, dass die Überschussenergie über den Grenzfall $\varepsilon_2 = 0$ auf den größten Strukturen im Inneren des Netzwerkes konzentriert ist. Dies ist auch für das ursprüngliche Modell im Zweidimensionalen zu beobachten. Aus diesem Grund können wir vermuten, dass sich die Energieverteilung unserer verallgemeinerten „urban planning“-Netzwerke ähnlich zu der der „urban planning“-Netzwerke verhält.

Um dies zu verifizieren, müssten wir im nächsten Schritt eine untere Schranke für die verallgemeinerte Energie beweisen, deren Wert sich lediglich um einen konstanten Faktor von unserer oberen Schranke unterscheidet. Anschließend wäre zu prüfen, inwieweit die Energieverteilungen auch in höheren Dimensionen ein ähnliches Verhalten aufweisen.

Weiter wäre es interessant zu sehen, wie sich die Energie verhält, wenn wir eine stückweise affine Kostenfunktion mit n Teilintervallen betrachten. Dabei könnte man ähnlich verfahren wie in der hier behandelten Verallgemeinerung.

Literaturverzeichnis

- [BG15] Peter Bella und Michael Goldman. Nucleation barriers at corners for a cubic-to-tetragonal phase transformation. *Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A. Math.* 145(4):715–724, 2015.
- [Ber05] Marc Bernot. *Optimal transport and irrigation*. English. Mathematics, École normale supérieure de Cachan, ENS Cachan, 2005.
- [BCM05] Marc Bernot, Vicent Caselles und Jean-Michel Morel. Traffic plans. *Publications Matemàtiques*, 49(2):417–451, 2005.
- [BCM08] Marc Bernot, Vicent Caselles und Jean-Michel Morel. The structure of branched transportation networks. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 32(3):279–317, 2008.
- [BCM09] Marc Bernot, Vicent Caselles und Jean-Michel Morel. *Optimal transportation networks. Models and theory*, Band 1955 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [BB05] Alessio Brancolini und Guiseppe Buttazzo. Optimal networks for mass transportation problems. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 11(1):88–101, 2005.
- [BRW16] Alessio Brancolini, Carolin Rossmann und Benedikt Wirth. Optimal micropatterns in 2d transport networks and their relation to image inpainting. *ArXiv e-prints*, 1601.07402v2, November 2016.
- [BW15a] Alessio Brancolini und Benedikt Wirth. Equivalent formulations for the branched transport and urban planning problems. *ArXiv e-prints*, 1509.06698, September 2015.
- [BW15b] Alessio Brancolini und Benedikt Wirth. Optimal micropatterns in transport networks. *ArXiv e-prints*, 1511.08467, November 2015.
- [CC15] Allan Chan und Sergio Conti. Energy scaling and branched microstructures in a model for shape-memory alloys with $SO(2)$ invariance. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 25(6):1091–1124, 2015.
- [Kan42] L. Kantorovich. On the transfer of masses. *Dokl. Acad. Nauk. USSR*, 37(7-8):227–229, 1942.
- [KKO13] Hans Knüpfer, Robert V. Kohn und Felix Otto. Nucleation barriers for the cubic-to-tetragonal phase transformation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 66(6):867–904, 2013.
- [KM92] Robert V. Kohn und S. Müller. Branching of twins near an austenite-twinned-martensite interface. *Philosophical Magazine A*, 1992.
- [KM94] Robert V. Kohn und Stefan Müller. Surface energy and microstructure in coherent phase transitions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47(4):405–435, 1994.
- [KW14] Robert V. Kohn und Benedikt Wirth. Optimal fine-scale structures in compliance minimization for a uniaxial load. *Proceedings of the Royal Society of London A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 470(2170), 2014.

- [KW15] Robert Kohn und Benedikt Wirth. Optimal fine-scale structures in compliance minimization for a shear load. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2015.
- [MSM03] F. Maddalena, S. Solimini und J.-M. Morel. A variational model of irrigation patterns. *Interfaces Free Bound*, 5(4):391–415, 2003.
- [MS09] Francesco Maddalena und Sergio Solimini. Transport distances and irrigation models. *J. Convex. Anal.*, 16(1):121–152, 2009.
- [MS13] Francesco Maddalena und Sergio Solimini. Synchronic and asynchronous descriptions of irrigation problems. *Adv. Nonlinear Stud.*, 13(3):583–623, 2013.
- [Mon81] G. Monge. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris*:666–704, 1781.
- [Roy88] Halsey L. Royden. *Real Analysis*. Macmillan Publishing Company, New York, third edition Auflage, 1988.
- [San15] Filippo Santambrogio. *Optimal Transport for Applied Mathematicians. Calculus of Variations, PDEs and Modeling*. Birkhäuser, 2015.
- [Vil03] Cédric Villani. *Topics in optimal transportation*, Band 58 der Reihe *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2003.
- [Vil09] Cédric Villani. *Optimal transport. Old and new*, Band 338 der Reihe *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [Xia08] Qinglan Xia. Introduction to monge-kantorovich-problem. Vorlesungsskript, University of California at Davis, 2008.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Das Transportproblem von Monge (entnommen aus [Vil09])	4
2.2	Unterschied zwischen Monge- und Kantorovich-Formulierung (entnommen aus [Xia08])	6
2.3	Netzwerkstrukturen in verschiedenen Transportmodellen (entnommen aus [Ber05])	7
2.4	Das betrachtete Setting (entnommen aus [BW15b])	12
2.5	Konstruktion eines Netzwerkes (in Anlehnung an [BW15b])	16
3.1	Elementar- und Wassersteinzellen in 2D und 3D (entnommen aus [BW15b])	22
3.2	Skizze der Konstruktionsansätze in 2D und 3D (entnommen aus [BW15b]) .	26
4.1	Stückweise lineare Kostenfunktion $c^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b_1, b_2}(m) = \min\{am, b_1m + \varepsilon_1, b_2m + \varepsilon_2\}$	52

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit mit dem Titel *Feinskalige Strukturen in einer Verallgemeinerung von „urban planning“-Netzwerken* selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommenen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Münster, 31. Dezember 2017

Anna Seppelt

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

Münster, 31. Dezember 2017

Anna Seppelt