Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik

Bachelorarbeit Mathematik

Das JKO-Schema für Darcy's Gesetz mit Quellterm

vorgelegt am: 25. August 2021
von: Andy Kevin Wert
Matrikelnummer: 461478
Erstgutachter: Prof. Dr. Benedikt Wirth
Zweitgutachterin: Prof. Dr. Angela Stevens

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wir untersuchen das maligne Wachstum eines Tumors. Dafür wird der Artikel [JKT20a] beschrieben und anschließend mit [CM17] verglichen.

Ein gängiges Modell des Tumorwachstums, das nur durch den Aufbau des Drucks beschränkt wird, ist durch die Gleichung

$$(P) \qquad \rho_t - \nabla \cdot (\rho \nabla p) = \rho G(p, x) \text{ und } p \in \partial s(\rho) \text{ in } \mathbb{R}^d \times [0, T]$$

mit der Anfangsdichte ρ_0 und der Wachstumsfunktion G gegeben [Per14]. Wir charakterisieren den Tumor anhand seiner Dichte $\rho = \rho(x, t)$ und des Drucks $p = p(x, t)$, der durch die interne Energie

$$E(\rho) = \int_{\mathbb{R}^d} s(\rho(x))\, dx \tag{1.1}$$

erzeugt wird. Das s soll dabei Eigenschaften wie Konvexität und Superlinearität erfüllen. Ein zulässiges Beispiel ist die Rényi-Energie, definiert als

$$s_m(\rho) := \frac{1}{m-1} \rho^m \text{ wenn } \rho \geq 0, \qquad \text{sonst } +\infty,$$

für $m > 1$. Für $m \to \infty$ erhält man

$$s_\infty(\rho) := 0 \text{ wenn } 0 \leq \rho \leq 1, \qquad \text{sonst } +\infty.$$

1.1 Das zeitdiskrete Schema

Um eine Lösung von (P) zu finden, führen wir zuerst ein zeitdiskretes Schema mit einer dualen Form ein. Eine detaillierte Betrachtung, einschließlich der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, findet in Kapitel 3 statt.

Wir wählen für ein $T > 0$ ein glattes, konvexes und beschränktes Gebiet Ω, das für das Zeitintervall $[0, T]$ ausreichend groß ist (siehe Satz 1.3 und die Diskussion am Anfang von Kapitel 6). Nun konstruieren wir eine zeitdiskrete Lösung von (P) wie folgt. Für eine feste Schrittlänge $\tau > 0$ definieren wir $\rho^{0,\tau} := \rho_0$ und iterieren über das Problem

$$(\rho^{n+1,\tau}, \mu^{n+1,\tau}) := \operatorname*{argmin}_{\rho \in X, \mu \in AC(\rho^{n,\tau})} J(\rho, \mu, \rho^{n,\tau}), \tag{1.2}$$

wobei $X := \{\rho \in L^1(\Omega) : E(\rho) < \infty\}$, $AC(\rho)$ bezeichnet den Raum der Maße, die absolut stetig bezüglich ρ sind,

$$J(\rho, \mu, \rho^{n,\tau}) := E(\rho) + \tau F(\mu, \rho^{n,\tau}) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho, \rho^{n,\tau} + \tau\mu) \tag{1.3}$$

und

$$F(\mu, \rho^{n,\tau}) := \begin{cases} \int_\Omega \rho^{n,\tau}(x) f\left(\frac{\mu(x)}{\rho^{n,\tau}(x)}, x\right) dx & \text{wenn } \mu \in AC(\rho^{n,\tau}), \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier ist $f = f(z, x)$ die eindeutige Funktion, die definiert ist durch

$$\begin{cases} f\left(G(0, x), x\right) = 0; \\ \partial_z f(z, x) = \{-b : z = G(b, x)\} \text{ wenn die Menge nicht leer ist, sonst } +\infty. \end{cases} \tag{1.4}$$

Mit der dualen Formulierung von (1.2) erhalten wir den diskreten Druck in (P)

$$p_{n+1,\tau} \in \operatorname*{argmax}_{p \in X^*} J^*(p, \rho^{n,\tau}). \tag{1.5}$$

Hier ist

$$J^*(p, \rho^{n,\tau}) = \int_\Omega \rho^{n,\tau}(x) \left(p^c(x) + \tau \bar{G}\left(p^c(x), x\right)\right) dx - \int_\Omega s^*(p(x))\, dx, \tag{1.6}$$

wobei $\partial_z \bar{G}(z, x) = G(z, x)$, s^* ist die Legendre-Transformation von s und

$$p^c(x) := \inf_y p(y) + \frac{1}{2\tau}|y - x|^2$$

ist die c-Transformation von p. In Kapitel 3 werden wir die Verbindung zwischen dem ursprünglichen und dem dualen Problem herleiten, insbesondere die Beziehung $p_{n+1} \in \partial s(\rho_{n+1})$ (siehe Proposition 3.2).

Falls s und s^* differenzierbar sind, folgt aus der zweiten Bedingung von (P), dass

$$p = s'(\rho), \quad \rho = (s^*)'(p).$$

Somit kann (P) auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$((s^*)'(p))_t - \Delta s^*(p) = \rho G(p, x). \tag{1.7}$$

1.2 Annahmen und Hauptresultate

Von nun an erwarten wir von der Dichtefunktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ der Energie, dass sie echt, konvex, unterhalbstetig, superlinear ist und folgendes erfüllt:

$$s(y) = +\infty \text{ wenn } y < 0,\ s(0) = 0,\ s(\rho) \text{ ist monoton wachsend in } [0, \infty)$$

$$\text{und } \lim_{z \to 0^+} \frac{s(z) - s(0)}{z} = 0.$$

Während die erste Bedingung verhindert, dass die Dichtefunktion negativ wird, und die zweite und dritte Voraussetzung natürliche Eigenschaften von Tumorwachstumsmodellen sind, dient die vierte Forderung nur der besseren Lesbarkeit. Sie stellt sicher, dass die Dichte positiv ist, wenn der Druck positiv ist. Ansonsten müsste man ständig auf $\partial s((0, \infty))$ verweisen.

Für das G nehmen wir folgendes an:

(G1) $G(0,x)$ ist für alle x strikt positiv.
(G2) $G(z,x)$ ist lipschitzstetig bezüglich $(z,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ und monoton fallend in Bezug auf z.
(G3) für alle x existiert ein $b(x)$, sodass $G(b(x),x) = 0$ und $0 \leq b_0 \leq b(x) \leq b_1 < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.
(G4) $B := \sup_{(z,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d} |G(z,x)| < \infty$.
Die Annahmen (G1)-G(3) sind natürliche Eigenschaften des von dem Druck abhängigen Wachstums. (G4) benutzen wir zur Vereinfachung unserer Rechenschritte.

Zur Approximation der Gleichung (P) definieren wir in der Zeit konstante Interpolationen

$$\begin{aligned} \rho^\tau(x,t) &:= \rho^{n+1,\tau}(x) \quad &&\text{wenn } t \in [n\tau,(n+1)\tau), \\ \mu^\tau(x,t) &:= \mu^{n+1,\tau}(x) \quad &&\text{wenn } t \in [n\tau,(n+1)\tau), \\ p^\tau(x,t) &:= p_{n+1,\tau}(x) \quad &&\text{wenn } t \in [n\tau,(n+1)\tau), \end{aligned} \tag{1.8}$$

angefangen mit einer gegebenen nicht-negativen Anfangsdichte $\rho^{0,\tau} = \rho_0$. Wir nehmen an, dass ρ_0 einen kompakten Träger hat mit

$$\inf \partial s(\hat{M}_0) < \infty \text{ wobei } \hat{M}_0 := \|\rho_0\|_\infty. \tag{1.9}$$

Insbesondere gilt $\hat{M}_0 < \infty$.

Das Gebiet Ω kann man für ein gegebenes Zeitintervall, abgesehen von einer Teilmenge, beliebig wählen, ohne die zeitdiskreten Lösungen zu beeinflussen. Wenn ρ_0 einen kompakten Träger hat und beschränkt ist, dann gilt dies auch für $(\rho^\tau, \mu^\tau, p^\tau)$ (siehe Satz 1.3 und die Diskussion am Anfang von Kapitel 6).

In den nächsten beiden Sätzen bezeichnen wir $Q := \mathbb{R}^d \times [0,T]$, wobei Ω ausreichend groß ist. Wir werden zeigen, dass die Interpolationen aus (1.8) für $\tau \to 0$ gegen stetige Lösungen von (P) konvergieren. Wir haben

Satz 1.1. *Sei $M_0 := \max(b_1, \inf \partial s(\|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}))$, wobei b_1 in (G3) gegeben ist. Nehme an, dass entweder $s \in C^1_{loc}([0,\infty))$, oder dass $G(\cdot,x)$ affin ist in $[0,M_0]$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt für jedes $T > 0$*
(a) Für alle $\tau \leq (2B)^{-1}$ sind ρ^τ, μ^τ, p^τ_+ gleichmäßig beschränkt in $L^\infty(Q)$.
Es existieren $\rho, p \in L^\infty(Q)$, sodass für $\tau \to 0$, bis auf eine Teilfolge,
(b) $\mu^\tau \rightharpoonup \rho G(p,x)$ in $L^1([0,T]; W^{-1,1}(\mathbb{R}^d))$;
(c) $\rho^\tau \to \rho$ in $L^1(Q)$;
(d) $p^\tau_+ \rightharpoonup p$ und $s^*(p^\tau) \rightharpoonup s^*(p)$ in $L^1(Q)$. Sie konvergieren auch fast überall, sofern $s \in C^1_{loc}([0,\infty))$.
Außerdem hat man
(e) (ρ,p) ist eine sehr schwache Lösung von (P) in dem Sinne, dass $p \in \partial s(\rho)$ fast überall und

$$\int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \rho\phi_t + s^*(p)\Delta\phi + G(p,x)\rho\phi \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}^d} (\rho\phi)(x,t_0) - (\rho\phi)(x,0) \, dx$$

für alle $\phi \in C^\infty(Q)$ und fast alle $t_0 \in [0,T]$.
(f) Wenn $\rho_0 \in BV$, dann haben wir auch $\rho(t,\cdot) \in BV$, dessen BV-Norm höchstens exponentiell in der Zeit wächst.

Für den Spezialfall $s = s_\infty$ mit einem $\rho_0 \leq 1$, das einen kompakten Träger in $\mathbb{R}^d$ hat, erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 1.2. *Sei $s = s_\infty$. Für jedes $T > 0$ existiert ein $\rho \in L^\infty(Q)$ und ein $p \in L^2_{loc}([0,T]; H^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$, sodass (a), (b) und (f) aus Satz 1.1 gilt. Außerdem hat man*

(c') $\rho^\tau \in [0,1]$ ist monoton wachsend in der Zeit und konvergiert gegen ein ρ in $L^1(Q)$. Wenn $\rho_0 \in \{0,1\}$ fast überall, dann gilt $\rho^\tau, \rho \in \{0,1\}$ fast überall.

(d') p^τ_+ ist monoton wachsend in der Zeit und konvergiert gegen ein p in $L^2(Q)$. Außerdem gilt $\nabla p^\tau_+ \rightharpoonup \nabla p$ in $L^2(Q)$.

(e') (ρ, p) ist eine sehr schwache Lösung von (P) in dem Sinne, dass $p(1-\rho) = 0$ fast überall und

$$\int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \rho \partial_t \phi - \nabla p \cdot \nabla \phi + G(p,x)\rho\phi \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}^d} (\rho\phi)(x,t_0) - (\rho\phi)(x,0) \, dx$$

für alle $\phi \in C^\infty(Q)$ und fast alle $t_0 \in [0,T]$.

Weitere wichtige Eigenschaften der Interpolationen werden in dem nächsten Satz aufgelistet.

Satz 1.3. *(a)* (Vergleichsprinzip) *Wenn $(\rho_1)^{n,\tau} \leq (\rho_2)^{n,\tau}$ und beide (3.2) erfüllen, dann gilt $(\rho_1)^{n+1,\tau} \leq (\rho_2)^{n+1,\tau}$ und $(p_1)_{n+1,\tau} \leq (p_2)_{n+1,\tau}$.*

(b) (Ausbreitung mit endlicher Geschwindigkeit) *Wenn der Träger von ρ_0 in B_{R_0} enthalten ist und (1.9) erfüllt wird, dann existieren $R_1, R_2 > 0$, die unabhängig von τ sind, sodass*

$$\operatorname{supp} \rho^\tau(\cdot, t) \subset B_{R_0 + R_1 + R_2 t}.$$

(c) (Gleichgradige Stetigkeit in L^1) *Für jedes $y \in \mathbb{R}^d$ und einem ausreichend kleinem τ haben wir*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\rho^\tau(x + \epsilon y, t) - \rho^\tau(x,t)| \, dx \, dt = 0.$$

Nun treffen wir noch Aussagen zur Eindeutigkeit der Lösungen.

Satz 1.4 (Eindeutigkeit)**.** *(a) Sei $s \in C^1_{loc}([0,\infty))$. Dann ist unter Bedingung (8.1), die $s = s_m$ für $1 < m < \infty$ einschließt, das in Satz 1.1 erhaltene Paar (ρ, p) die eindeutige schwache Lösung von (P). Es ist insbesondere der Grenzwert der gesamten Folge (ρ^τ, p^τ) für $\tau \to 0$.*

(b) Wenn $s = s_\infty$, dann stimmt das Paar (ρ, p) aus Satz 1.2 mit der schwachen Lösung aus [PQV14] überein. Es ist insbesondere der Grenzwert der gesamten Folge (ρ^τ, p^τ) für $\tau \to 0$.

2 Vorbereitende Aussagen

Bevor wir mit dem Beweis der Aussagen beginnen, sprechen wir über wichtige Eigenschaften des optimalen Transports und der dualen Funktionen. Wir werden häufig die c-Transformation verwenden, wobei $c(x,y) := \frac{|x-y|^2}{2\tau}$ für ein $\tau > 0$. Wir übernehmen nun Definitionen und Resultate aus [JKT20b].

Definition 2.1. Gegeben sei eine Funktion $p : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann ist die *c-Transformation* von p definiert durch

$$p^c(y) = \inf_{x\in\Omega} p(x) + c(x,y).$$

Gegeben sei eine Funktion $q : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann ist die *konjugierte c-Transformation* von q definiert durch

$$q^{\bar{c}}(x) = \sup_{y\in\Omega} q(y) - c(x,y).$$

Lemma 2.2 ([San15])**.** *Gegeben seien Funktionen $p, q : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$p^{c\bar{c}} \leq p, \quad q \leq q^{\bar{c}c}$$

und

$$p^{c\bar{c}c} = p^c, \quad q^{\bar{c}c\bar{c}} = q^{\bar{c}}.$$

Definition 2.3. Wir nennen eine Funtion $p : \Omega \to \mathbb{R}$ *c-konkav*, wenn $p^{c\bar{c}} = p$, und wir sagen, ein Paar von Funktionen $p, q : \Omega \to \mathbb{R}$ sei *c-konjugiert*, wenn $p^c = q$ und $q^{\bar{c}} = p$.

Lemma 2.4 ([San15])**.** *Wenn p c-konkav ist, dann ist p lipschitzstetig und die Lipschitzkonstante hängt nur von c und Ω ab.*

Lemma 2.5 ([San15])**.** *Wenn μ ein nicht-negatives Maß ist, dann gilt für jede beschränkte Funktion $p : \Omega \to \mathbb{R}$, dass*

$$\inf_{\rho\in L^1(\Omega),\rho(\Omega)=\mu(\Omega)} \int_\Omega p(x)\rho(x)\,dx + \frac{1}{2\tau}W_2^2(\rho,\mu) = \int_\Omega p^c(y)\,d\mu(y).$$

Lemma 2.6 ([Gan94, Gan95, GM96])**.** *Sei $p : \Omega \to \mathbb{R}$ c-konkav mit $c(x,y) = \frac{|x-y|^2}{2\tau}$. Definiere $T_p : \Omega \to \Omega$ als die eindeutige Lösung von*

$$T_p(y) = y - \tau\nabla p^c(y). \tag{2.1}$$

Dann ist T_p fast überall invertierbar und T_p^{-1} ist die eindeutige Lösung von

$$T_p^{-1}(x) = x + \tau\nabla p(x).$$

Wenn μ ein nicht-negatives Maß und $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, dann gilt

$$\lim_{t\to 0^+} \int_\Omega \frac{(p+t\phi)^c(y) - p^c(y)}{t}\,d\mu(y) = \int_\Omega \phi(T_p(y))\,d\mu(y).$$

Bemerkung 2.7. Die Abbildungen T_p und T_p^{-1} können zusätzlich als die eindeutigen Lösungen von

$$T_p(y) = \operatorname*{argmin}_{x\in\Omega} p(x) + c(x,y), \quad T_p^{-1}(x) = \operatorname*{argmax}_{y\in\Omega} p^c(y) - c(x,y)$$

charakterisiert werden.

Satz 2.8 ([Bre91, Gan95, GM96])**.** *Wenn $\mu, \nu \in L^1(\Omega)$ nicht-negative Dichtefunktionen mit der gleichen Masse sind, dann existiert eine c-konave Funktion $p^* : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass*

$$p^* \in \operatorname*{argmax}_{p} \int_\Omega p^c(y)\mu(y)\,dy - \int_\Omega p(x)\nu(x)\,dx,$$

$$W_2^2(\mu,\nu) = \int_\Omega (p^*)^c(y)\mu(y)\,dy - \int_\Omega p^*(x)\nu(x)\,dx.$$

Außerdem ist T_{p^*} die eindeutige optimale Abbildung, die μ nach ν transportiert und $T_{p^*}^{-1}$ ist die eindeutige optimale Abbildung, die ν nach μ transportiert. Wenn $\bar{p}$ eine c-konkave Funktion mit $T_{\bar{p}\#}\mu = \nu$ ist, dann ist $T_{\bar{p}}$ die eindeutige optimale Abbildung, die μ nach ν transportiert und $T_{\bar{p}}^{-1}$ die eindeutige optimale Abbildung, die ν nach μ transportiert.

Lemma 2.9 ([JKT20b])**.** *Für jede echte, unterhalbstetige und konvexe Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ gilt $p \in \partial h(z)$ genau dann, wenn $pz = h(z) + h^*(p)$. Außerdem ist $p \in \partial h(z)$ genau dann, wenn $z \in \partial h^*(p)$. Hier ist h^* definiert als $h^*(p) := \sup_{\rho\in\mathbb{R}}\{\rho p - h(\rho)\}$.*

Lemma 2.10 ([JKT20b])**.** *Nehme an, dass $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ echt, unterhalbstetig und konvex ist und $h(z) \equiv +\infty$, wenn $z < 0$. Dann ist h^* monoton wachsend und streng monoton wachsend auf $\partial h((0,\infty))$.*

3 Eigenschaften der Probleme

In diesem Kapitel untersuchen wir Eigenschaften der Lösungen $(\rho^{n,\tau}, \mu^{n,\tau})$ von (1.2) und ihre Beziehung zur Druckvariable $p^{n,\tau}$, die das duale Problem (1.5) maximiert. Da τ fest ist, schreiben wir $\rho^n := \rho^{n,\tau}$.

3.1 Äquivalenz und Wohldefiniertheit

Wir zeigen zuerst die Existenz eines eindeutigen Minimierers des ursprünglichen Problems (1.3). Erinnerung: $X := \{\rho \in L^1(\Omega) : E(\rho) < \infty\}$. Definiere für $\rho \in X$ und $A \subset \Omega$

$$\rho(A) := \int_A \rho \, dx.$$

Definiere die duale Energie $E^* : X^* \to \mathbb{R}$, sodass

$$E^*(\rho) := \int_\Omega s^*(p(x)) \, dx, \quad s^*(p) := \sup_{y \in \mathbb{R}} \{py - s(y)\},$$

wobei $X^* := \{p : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} : p \text{ ist messbar}, E^*(p) < \infty\}$.

Lemma 3.1. *Sei $\rho^n \in X$. Dann ist*

$$\inf_{(\rho,\mu) \in X \times AC(\rho^n)} J(\rho, \mu, \rho^n) \geq \sup_{p \in X^*} J^*(p, \rho^n).$$

Beweis. Aufgrund der Eigenschaften von s ist E konvex, echt und unterhalbstetig. Nach [Tie84] folgt daraus, dass $E(\rho) = (E^*)^*(\rho)$, und nach Definition ist $(E^*)^*(\rho) = \sup_{p \in X^*}(\rho, p) - E^*(p)$. Durch Einsetzen sieht man, dass die Lösung von (1.2) der Lösung des folgenden Problems entspricht:

$$\inf_{\rho \in X, \mu \in AC(\rho^n)} \sup_{p \in X^*} \left((\rho, p) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho, \rho^n + \tau\mu) - E^*(p) + \int_\Omega \tau \rho^n(x) f\left(\frac{\mu(x)}{\rho^n(x)}, x\right) \right).$$

Durch Vertauschung von inf und sup und durch Lockerung der Bedingungen für ρ erhält man eine untere Schranke für den oberen Ausdruck:

$$\sup_{p \in X^*} \inf_{\rho \in L^1(\Omega), \mu \in AC(\rho^n)} \left((\rho, p) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho, \rho^n + \tau\mu) - E^*(p) + \int_\Omega \tau \rho^n(x) f\left(\frac{\mu(x)}{\rho^n(x)}, x\right) \right).$$

Nach Lemma 2.5 ist diese gleich

$$\sup_{p \in X^*} \inf_{\mu \in AC(\rho^n)} \left((\rho^n + \tau\mu, p^c) - E^*(p) + \int_\Omega \tau \rho^n(x) f\left(\frac{\mu(x)}{\rho^n(x)}, x\right) \right).$$

Gesucht ist nun ein μ, das den Ausdruck $\frac{\mu(x)}{\rho^n(x)}p^c(x) + f\left(\frac{\mu(x)}{\rho^n(x)}, x\right)$ minimiert. Man erhält das Infimum, wenn man μ so wählt, dass $p^c(x) \in -\partial_z f\left(\frac{\mu(x)}{\rho^n(x)}, x\right) = \{z \in \mathbb{R} : f(y,x) \geq f\left(\frac{\mu(x)}{\rho^n(x)}, x\right) + z\left(\frac{\mu(x)}{\rho^n(x)} - y\right)$ für alle $y \in \mathbb{R}\}$, denn dann gilt

$$\frac{\mu(x)}{\rho^n(x)}p^c(x) + f\left(\frac{\mu(x)}{\rho^n(x)}, x\right) \leq yp^c(x) + f(y,x) \text{ für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Nach (1.4) ist $p^c(x) \in -\partial_z f\left(\frac{\mu(x)}{\rho^n(x)}, x\right)$ äquivalent zu

$$\mu(x) = \rho^n(x)G(p^c(x), x).$$

Durch Einfügen erhalten wir dann das Maximierungsproblem

$$\sup_{p\in X^*} \int_\Omega \rho^n(x)\Big(p^c(x) + \tau\Big(p^c(x)G\left(p^c(x), x\right) + f\left(G\left(p^c(x), x\right), x\right)\Big)\Big)\,dx - E^*(p).$$

Mit (1.4) erhält man

$$\partial_z\Big(zG(z,x) + f\left(G(z,x), x\right)\Big) = G(z,x),$$

und somit gilt

$$zG(z,x) + f\left(G(z,x), x\right) = \overline{G}(z,x). \tag{3.1}$$

Daraus folgt die Aussage. $\square$

Als nächstes zeigen wir, dass das Infimum des ursprünglichen Problems dem Supremum des dualen Problems entspricht. Dabei erhalten wir weitere Eigenschaften der Lösungen, die wir später noch häufig verwenden werden.

Proposition 3.2. *Sei $\rho^n \in X$ und*

$$0 = \limsup_{b\to-\infty} \partial s^*(b) < \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \rho^n\,dx < \liminf_{b\to\infty} \partial s^*(b). \tag{3.2}$$

Dann hat (1.2) einen eindeutigen Minimierer $(\rho^{n+1}, \mu^{n+1}) \in X \times AC(\rho^n)$, (1.5) hat einen c-konkaven Maximierer $p_{n+1} \in X^*$ und

$$\inf_{(\rho,\mu)\in X\times AC(\rho^n)} J(\rho,\mu,\rho^n) = \sup_{p\in X^*} J^*(p,\rho^n).$$

Außerdem gilt für fast alle $x \in \Omega$

$$p_{n+1} \in \partial s(\rho^{n+1}), \quad \rho_{n+1} \in \partial s^*(p^{n+1}), \tag{3.3}$$

$$T_{p_{n+1}\#}(\rho^n + \tau\mu^{n+1}) = \rho^{n+1} \text{ mit } T^{-1}_{p_{n+1}}(x) = x + \tau\nabla p_{n+1} \tag{3.4}$$

und

$$\mu^{n+1}(x) = \rho^n(x)G(p^c_{n+1}(x), x). \tag{3.5}$$

Bemerkung 3.3. Wir werden uns hauptsächlich mit Anfangsdichten befassen, die einen kompakten Träger in $\mathbb{R}^d$ haben. Deshalb können wir ein beliebiges, aber ausreichend großes, Gebiet auswählen, das (3.2) in einem gegebenen Zeitabschnitt erfüllt (siehe Korollar 5.3).

Beweis. Für J^* aus (1.6) und eine Funktion $p : X^* \to \mathbb{R}$ ist

$$J^*(p^{c\bar{c}}, \rho^n) = \int_\Omega \rho^n(x)\Big(p^{c\bar{c}c}(x) + \tau\overline{G}(p^{c\bar{c}c}(x), x)\Big)\,dx - E^*(p^{c\bar{c}}).$$

Im Folgenden verwenden wir die Lemmata 2.2 und 2.10. Da $p^{c\bar{c}c} = p^c$, gilt

$$\int_\Omega \rho^n(x)\Big(p^{c\bar{c}c}(x) + \tau\overline{G}(p^{c\bar{c}c}(x), x)\Big)\,dx = \int_\Omega \rho^n(x)\Big(p^c(x) + \tau\overline{G}(p^c(x), x)\Big)\,dx.$$

Weil E alle Voraussetzungen in Lemma 2.10 erfüllt, ist E^* wachsend, und da $p^{c\bar{c}} \le p$ ist, gilt

$$E^*(p^{c\bar{c}}) \le E^*(p).$$

Insgesamt folgt daraus, dass $J^*(p^{c\bar{c}}, \rho^n) \ge J^*(p, \rho^n)$. Wir können die Maximierer von J^* auf die c-konkaven Funktionen beschränken, also

$$\sup_{p\in X^*} J^*(p, \rho^n) = \sup_{p\in X^*, p^{c\bar{c}}=p} J^*(p, \rho^n),$$

denn angenommen p sei ein Maximierer. Dann ist $J^*(p^{c\bar{c}}, \rho^n) = J^*(p, \rho^n)$ und weiterhin $p^{c\bar{c}} \le p$. Für $p^{c\bar{c}} = p$ erhält man die Behauptung. Sei nun $p^{c\bar{c}} \ne p$. Dann ist $(p^{c\bar{c}})^{c\bar{c}} = p^{c\bar{c}}$ nach Lemma 2.2 und da $p^{c\bar{c}}$ auch ein Maximierer ist, erhalten wir die Behauptung.

Wir betrachten nun eine Folge p_k von beschränkten, c-konkaven Funktionen, sodass

$$\lim_{k\to\infty} J^*(p_k, \rho^n) = \sup_{p\in X^*, p^{c\bar{c}}=p} J^*(p, \rho^n).$$

Setzen wir $\alpha_k = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega p_k(x)\,dx$, dann ist $\tilde{p}_k = p_k - \alpha_k$ c-konkav und hat den Mittelwert 0. Aus Lemma 2.4 folgt, dass $\tilde{p}_k$ gleichmäßig beschränkt in $W^{1,\infty}(\Omega)$ ist. Somit können wir annehmen, dass $\tilde{p}_k$ gegen eine Funktion $\tilde{p}$ mit Mittelwert 0 konvergiert. Als nächstes wählen wir

$$\beta_k \in \operatorname*{argmax}_{\beta\in[-\infty,\infty]} F(\beta) := J^*(\tilde{p}_k + \beta, \rho^n).$$

Da $(\tilde{p}_k(x) + \beta)^c = \tilde{p}_k^c(x) + \beta$ für alle $\beta \in [-\infty, \infty]$, gilt

$$F'(\beta) = \int_\Omega \rho^n(x)(1 + \tau G(\tilde{p}_k^c(x) + \beta, x))\,dx - \int_\Omega \partial s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta, x)\,dx.$$

Zu zeigen ist nun, dass F' fallend ist. Nach Definition ist G fallend bezüglich des ersten Arguments. Wir wollen nun zeigen, dass $\partial s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta, x)$ steigend bezüglich β ist, also $\sup \partial s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta, x) \le \inf \partial s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta + \varepsilon, x)$ für alle $\varepsilon > 0$ ist. Dafür sei $a = \sup \partial s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta, x)$ und $b = \inf \partial s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta + \varepsilon, x)$. Wir nehmen nun an, dass $b < a$. Da $a \in \partial s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta, x)$, gilt

$$\begin{aligned}
& s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta + \varepsilon, x) \ge s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta, x) + a(\tilde{p}_k(x) + \beta + \varepsilon - (\tilde{p}_k(x) + \beta)) \\
\iff\quad & s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta + \varepsilon, x) - a\varepsilon \ge s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta, x) \\
\implies\quad & s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta + \varepsilon, x) - b\varepsilon > s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta, x), \text{ da } b < a \text{ und } \varepsilon > 0 \\
\iff\quad & s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta, x) < s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta + \varepsilon, x) + b(\tilde{p}_k(x) + \beta - (\tilde{p}_k(x) + \beta + \varepsilon)) \\
\implies\quad & b \notin \partial s^*(\tilde{p}_k(x) + \beta + \varepsilon, x)
\end{aligned}$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Somit gilt die Behauptung. Aus der Aussage, dass F' fallend ist, folgt nun, dass $J^*(\tilde{p}_k+\beta,\rho^n)$ konkav bezüglich β ist. Da $\tilde{p}_k$ gleichmäßig beschränkt ist, ist auch $\tilde{p}_k^c$ gleichmäßig beschränkt, wobei die Schranke von c und Ω abhängig ist. Wegen der Annahme (3.2) existiert also ein $M>0$, das abhängig von ρ^n, G, c und Ω ist, sodass F' negativ ist, wenn $\beta > M$, und positiv ist, wenn $\beta < -M$. Somit existiert ein β_k, das F maximiert und dieses muss gleichmäßig beschränkt in $\mathbb{R}$ sein. Man kann also annehmen, dass β_k gegen einen endlichen Grenzwert $\tilde{\beta}$ konvergiert.

Wir definieren nun $p^* := (\tilde{p}+\tilde{\beta})^{c\bar{c}}$. Dann ist

$$J^*(p^*,\rho^n) \geq J^*(\tilde{p}+\tilde{\beta},\rho^n) \geq \limsup_{k\to\infty} J^*(\tilde{p}_k+\beta_k,\rho^n),$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, weil die c-Transformation, $\bar{G}(\cdot,x)$ und $-E^*$ oberhalbstetig ist, denn für alle ε ist $\hat{p}^c(x) < p^c(x)+\varepsilon$, wenn $|p-\hat{p}|<\varepsilon$ und außerdem ist $\bar{G}(\cdot,x)$ differenzierbar, weil $\partial_z\bar{G}(z,x) = G(z,x)$, also insbesondere oberhalbstetig und $-E^*$ ist oberhalbstetig, weil E^* unterhalbstetig ist. Nun sieht man, dass

$$\limsup_{k\to\infty} J^*(\tilde{p}_k+\beta_k,\rho^n) \geq \limsup_{k\to\infty} J^*(\tilde{p}_k+\alpha_k,\rho^n) = \sup_{p\in X^*, p^{c\bar{c}}=p} J^*(p,\rho^n).$$

Somit folgern wir, dass p^* ein c-konkaver Maximierer des dualen Problems ist.

Wir definieren nun

$$\mu^*(x) := \rho^n(x)G((p^*)^c(x),x) \text{ und } \rho^* := T_{p^*\#}(\rho^n+\tau\mu^*). \tag{3.6}$$

Wir wollen zeigen, dass (ρ^*,μ^*) ein Minimierer von $J(\rho,\mu,\rho^n)$ ist.

Wegen der Optimalität von p^* wissen wir, dass für jede stetige Funktion $\phi:\Omega\to\mathbb{R}$ $0\in\partial_t(-J^*(p^*+t\phi,\rho^n))$ bei $t=0$ gilt. Also existiert ein $\omega\in\partial s^*(p^*)$ mit

$$\lim_{t\to 0^+}\int_\Omega \frac{(p^*+t\phi)^c(x)-p^c(x)}{t}(1+\tau G((p^*)^c(x),x))\rho^n(x)\,dx - \int_\Omega \omega(x)\phi(x)\,dx = 0.$$

Dies ist nach Lemma 2.6 äquivalent zu

$$\int_\Omega \phi(T_{p^*}(x))(1+\tau G((p^*)^c(x),x))\rho^n(x)\,dx - \int_\Omega \omega(x)\phi(x)\,dx = 0.$$

Nach der Definition von ρ^* muss gelten, dass

$$\rho^*\in\partial s^*(p^*) \text{ fast überall in } \Omega. \tag{3.7}$$

Da s konvex, echt und unterhalbstetig ist, gilt nach Lemma 2.9, dass $p^*\in\partial s(\rho^*)$ fast überall, und somit gilt ebenfalls nach Lemma 2.9, dass

$$\rho^*(x)p^*(x) = s(\rho^*(x)) + s^*(p^*(x)) \text{ fast überall},$$

also

$$\int_\Omega \rho^*(x)p^*(x)\,dx = E(\rho^*)+E^*(p^*). \tag{3.8}$$

Mithilfe von (3.1), (3.8) und der Definition von μ^* in (3.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} J^*(p^*, \rho^n) - \int_\Omega \tau \rho^n(x) f\left(\frac{\mu^*(x)}{\rho^n(x)}, x\right) dx &= \int_\Omega (p^*)^c(y)(\rho^n + \tau\mu^*)(y)\, dy \\ &\quad - \int_\Omega p^*(x)\rho^*(x)\, dx + E(\rho^*) \\ &= \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho^*, \rho^n + \tau\mu^*) + E(\rho^*), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus dem Satz 2.8 folgt. Wir können also folgern, dass

$$J^*(p^*, \rho^n) = J(\rho^*, \mu^*, \rho^n) \geq \inf_{(\rho,\mu)\in X\times AC(\rho^n)} J(\rho, \mu, \rho^n).$$

Andererseits gilt nach Lemma 3.1, dass

$$\inf_{(\rho,\mu)\in X\times AC(\rho^n)} J(\rho, \mu, \rho^n) \geq \sup_{p\in X^*} J^*(p, \rho^n) = J^*(p^*, \rho^n).$$

Also gilt Gleichheit und (ρ^*, μ^*) ist ein Minimierer des ursprünglichen Problems. Man schreibe $p^* = p_{n+1}$, $\rho^* = \rho^{n+1}$ und $\mu^* = \mu^{n+1}$. Dann folgt (3.3)-(3.5) aus (3.6), (3.7) und Lemma 2.6.

Jetzt wollen wir beweisen, dass (ρ^*, μ^*) eindeutig ist. Wir nehmen an, dass (ρ_0, μ_0) und (ρ_1, μ_1) zwei Minimierer sind. Sei T_i die optimale Transportabbildung von $\rho^n + \tau\mu_i$ nach ρ_i. Diese Abbildung existiert, da Minimierer absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes sind. Sei $\pi_i : \Omega \times \Omega \to [0, \infty)$ der optimale Transportplan bezüglich der Abbildung T_i und wir definieren

$$(\rho_t, \mu_t, \pi_t) := t(\rho_1, \mu_1, \pi_1) + (1-t)(\rho_0, \mu_0, \pi_0) \text{ für } t \in [0, 1].$$

Für $t \in [0, 1]$ ist

$$E(\rho_t) \leq tE(\rho_1) + (1-t)E(\rho_0), \quad F(\mu_t, \rho^n) \leq tF(\mu_1, \rho^n) + (1-t)F(\mu_0, \rho^n),$$
$$W_2^2(\rho_t, \rho^n + \tau\mu_t) \leq tW_2^2(\rho_1, \rho^n + \tau\mu_1) + (1-t)W_2^2(\rho_0, \rho^n + \tau\mu_0).$$

Also gilt

$$J(\rho_t, \mu_t, \rho^n) \leq tJ(\rho_1, \mu_1, \rho^n) + (1-t)J(\rho_0, \mu_0, \rho^n) = J(\rho_1, \mu_1, \rho^n).$$

Daraus folgt, dass (ρ_t, μ_t) ein Minimierer für alle $t \in [0, 1]$ ist und $t \to J(\rho_t, \mu_t, \rho^n)$ konstant in $[0, 1]$ ist. Wenn π_t für ein $t \in (0, 1)$ keine optimale Transportabbildung ist, dann gilt

$$W_2^2(\rho_t, \rho^n + \tau\mu_t) < tW_2^2(\rho_1, \rho^n + \tau\mu_1) + (1-t)W_2^2(\rho_0, \rho^n + \tau\mu_0),$$

also

$$J(\rho_t, \mu_t, \rho^n) < tJ(\rho_1, \mu_1, \rho^n) + (1-t)J(\rho_0, \mu_0, \rho^n) = J(\rho_0, \mu_0, \rho^n),$$

was ein Widerspruch bezüglich der Optimalität von (ρ_0, μ_0) und (ρ_1, μ_1) wäre. Also muss π_t für alle $t \in [0, 1]$ eine optimale Transportabbildung sein. Da ρ_t und $\rho^n + \tau\mu_t$ absolut stetig sind, kann man π_t mithilfe einer Abbildung T_t, die $\rho^n + \tau\mu_t$ auf ρ_t transportiert, erzeugen. Für $x \in \operatorname{supp} \rho^n$ haben wir

$$\pi_t(x, y) = t\delta(T_0(x) - y) + (1-t)\delta(T_1(x) - y) = \delta(T_t(x) - y).$$

Dies ist nur möglich, wenn eine einzige Abbildung T existiert mit $T(x) = T_0(x) = T_1(x)$ für fast alle x in $\operatorname{supp} \rho^n$. Wir wollen nun zeigen, dass $\mu_1 = \mu_0$. Daraus folgt dann auch die Eindeutigkeit von ρ, denn dann gilt, dass $\rho_1 = T_\#(\rho^n + \tau\mu_1) = T_\#(\rho^n + \tau\mu_0) = \rho_0$.

Wir benutzen nun, dass $t \to J(\rho_t, \mu_t, \rho^n)$ konstant ist. Dann folgern wir, dass für alle $t \in (0,1)$ ein $\eta_t(x) \in \partial_z f\left(\frac{\mu_t(x)}{\rho^n(x)}, x\right)$ und ein $\zeta_t \in \partial s(\rho_t)$ existiert, sodass

$$(\eta_t, \mu_1 - \mu_0) + (\zeta_t, \rho_1 - \rho_0) + \frac{1}{2}(|T - id|^2, \mu_1 - \mu_0) = 0,$$

wobei $(\cdot, \cdot)$ das L^2-Skalarprodukt ist. Wir können nun sehen, dass für $0 < t_1 < t_2 < 1$

$$(\eta_{t_2} - \eta_{t_1}, \mu_1 - \mu_0) + (\zeta_{t_2} - \zeta_{t_1}, \rho_1 - \rho_0) = 0.$$

Wegen der Stetigkeit von G gilt für alle x, dass $\partial_z f(\cdot, x)$ streng monoton wachsend auf dem Bild von $G(\cdot, x)$ ist. Da zusätzlich $\partial s(y)$ monoton wächst, ist

$$(\eta_{t_2} - \eta_{t_1}, \mu_1 - \mu_0) + (\zeta_{t_2} - \zeta_{t_1}, \rho_1 - \rho_0) > 0,$$

wenn $\mu_1 \neq \mu_0$ fast überall, was jedoch ein Widerspruch ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Wir können im Allgemeinen keine Aussage über die Eindeutigkeit des Drucks, der das duale Problem maximiert, treffen. Das folgende Lemma sagt jedoch aus, dass ein minimales Element in $\operatorname{argmax}_{p \in X^*, p^{c\bar{c}} = p} J^*(p, \rho_n)$ existiert. Wir können also immer p^{n+1} als den kleinsten Maximierer setzen. Der Beweis dazu ist analog zu dem von Lemma 3.4 in [JKT20b].

Lemma 3.4 (Existenz des minimalen Drucks)**.** *Es existiert eine c-konkave Funktion*

$$p^* \in \operatorname*{argmax}_{p \in X^*, p^{c\bar{c}} = p} J^*(p, \bar{\rho}),$$

sodass $p^* \leq \tilde{p}$ *für alle* $\tilde{p} \in \operatorname{argmax}_{p \in X^*, p^{c\bar{c}} = p} J^*(p, \bar{\rho})$.

3.2 Gleichmäßigkeit der Schranken

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass sowohl der Druck als auch die Dichte gleichmäßig beschränkt sind. Dafür zeigen wir zuerst, dass der Druck von oben bschränkt ist, wenn die Wachstumsfunktion G streng monoton fallend ist.

Lemma 3.5. *Seien* $b(x)$, b_0 *und* b_1 *gegeben wie in (G3) und nehme zusätzlich an, dass* $G(\cdot, x)$ *für alle* $x \in \Omega$ *streng monoton fallend ist. Sei* $\hat{M} = \sup \partial s^*(b_1)$ *und* $\bar{M} = \inf \partial s^*(b_0)$. *Definiere für ein* ρ_0 *aus (1.9) mit* $n = 0, 1, \ldots$*:*

$$\hat{M}_n := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} \rho^n(x),\ \bar{M}_n := \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \Omega} \rho^n(x) \text{ und } v_n := \inf \partial s(\hat{M}_n).$$

Dann gilt:
(a) $p_{n+1} \leq P_{n+1} := \max(v_n, b_1)$ *und* P_{n+1} *fällt monoton bezüglich n.*
(b) $\max(\hat{M}, \hat{M}_n)$ *ist nicht-wachsend und* $\min(\bar{M}, \bar{M}_n)$ *ist nicht-fallend bezüglich n.*
Insbesondere wenn ρ_0 *(1.9) erfüllt, dann auch* ρ^n *und die Schranke ist unabhängig von n und* τ.

Beweis. Wir definieren
$$U := \{x : p_{n+1}(x) > \max(v_n, b_1)\}.$$
Mithilfe von (3.3) können wir feststellen, dass, bis auf eine Nullmenge, $\{x \in \Omega : \rho^{n+1}(x) > \max(\hat{M}_n, \hat{M})\} \subset U$. Somit ist es ausreichend zu zeigen, dass $|U| = 0$, um (a) und den ersten Teil von (b) zu folgern, denn da p_{n+1} stetig ist, folgt $U = \varnothing$ aus $|U| = 0$. p_{n+1} ist stetig, weil p_{n+1} c-konkav und somit nach Lemma 2.4 auch lipschitzstetig ist.

Wenn $x \in T^{-1}_{p_{n+1}}(U)$, dann gilt nach Bemerkung 2.7:
$p^c_{n+1}(x) = p_{n+1}(T_{p_{n+1}}(x)) + c(T_{p_{n+1}}(x), x) \geq p_{n+1}(T_{p_{n+1}}(x)) > b_1$. Außerdem folgt aus dieser Bemerkung, dass $p_{n+1}(x) \geq p_{n+1}(T_{p_{n+1}}(x))$. Da $G(\cdot, x)$ streng monoton fallend ist, gilt
$$T^{-1}_{p_{n+1}}(U) \subset U \text{ und } G(p^c_{n+1}(x), x) < 0 \text{ in } T^{-1}_{p_{n+1}}(U). \tag{3.9}$$

Sei nun ϕ die charakteristische Funktion von U. Wenn $|U| \neq 0$, können wir (3.4) und (3.9) benutzen, um zu folgern, dass
$$\begin{aligned}\int_U \rho^{n+1}(x)\,dx &= \int_\Omega \rho^n(x)\Big(1 + \tau G(p^c_{n+1}(x), x)\Big)\phi\left(T_{p_{n+1}}(x)\right)\,dx \\ &< \int_\Omega \rho^n(x)\phi\left(T_{p_{n+1}}(x)\right)\,dx \leq \int_U \rho^n(x)\,dx.\end{aligned}$$

Nach (3.3) haben wir $\partial s(\rho^{n+1}) = p_{n+1} > v_n = \inf \partial s(\hat{M}_n)$ fast überall in U. Mithilfe der Konvexität von s folgern wir $\rho^{n+1} \geq \hat{M}_n \geq \rho^n$ fast überall in U. Daraus folgt $|U| = 0$.

Sei nun $V = \{x \in \Omega : \rho^{n+1}(x) < \min(\bar{M}_n, \bar{M})\}$. Die folgenden Aussagen können mit einem ähnlichen Vorgehen wie weiter oben bewiesen werden. Mit (3.5) kann man zeigen, dass $\mu^{n+1}(x) \geq 0$ fast überall in V. Außerdem folgt aus $b_0 > p_{n+1}(x) \geq p_{n+1}(T_{p_{n+1}}(x))$ in V, dass $V \subset T^{-1}_{p_{n+1}}(V)$. Somit gilt
$$\int_V \rho^{n+1}(x)\,dx \geq \int_{T^{-1}_{p_{n+1}}(V)} \rho^n(x) + \tau\mu^{n+1}(x)\,dx \geq \min(\bar{M}, \bar{M}_n)|V|.$$

Daraus folgern wir, dass $|V| = 0$. Da Nullmengen für die Berechnung von $\bar{M}_n$ nicht beachtet werden, folgt daraus die zweite Aussage in (b). □

Korollar 3.6. *Wenn p^{n+1} der minimale Druck ist, gelten die Aussagen in Lemma 3.5 auch ohne die Voraussetzung, dass G streng monoton fallend ist.*

Beweis. Es reicht aus zu zeigen, dass $p_{n+1} \leq P_{n+1}$, da man nur für den Beweis dieser Aussage die strenge Monotonie von G benutzt hat. Sei $\delta > 0$. Wir approximieren G mit der streng monoton fallenden Funktion $G_\delta(p, x) := G(p, x) + \delta(e^{-p} - 1)$, definieren J^*_δ als die entsprechende duale Energie und wählen $p_{n+1,\delta}$ nach Lemma 3.4 als das minimale Element in $\operatorname{argmax}_{p \in X^*, p^{c\bar{c}} = p} J^*_\delta(p, \rho^n)$. Dann erhält man mit dem Lemma 3.5, angewandt auf $p_{n+1,\delta}$, dass $p_{n+1,\delta} \leq P_{n+1}$. Wegen der gleichmäßigen Lipschitzstetigkeit konvergiert eine Teilfolge von $p_{n+1,\delta}$ gleichmäßig gegen ein Element $p^* \in S_n = \operatorname{argmax}_{p \in X^*, p^{c\bar{c}} = p} J^*(p, \rho^n)$ für $\delta \to 0$. Da p_{n+1} das minimale Element von S_n ist, folgern wir $p_{n+1} \leq p^* \leq P_{n+1}$. □

Abschließend betrachten wir BV-Abschätzungen der Dichte. Das folgende Lemma wird später exponentielles Wachstum der BV-Norm in der Zeit zeigen (siehe Korollar 6.3).

Lemma 3.7. *Sei Ω konvex und beschränkt und sei P_n gegeben wie in Lemma 3.5. Wenn $g_0 := \|G\|_{W^{1,\infty}([0,P_1]\times\mathbb{R}^d)} < \infty$ und $\rho^n \in BV(\Omega)$, dann haben wir $\rho^{n+1} \in BV(\Omega)$ für $\tau < 1/B$ mit der Schranke*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\rho^{n+1}|\,dx \quad &\leq \quad (1+\tau B)\int_\Omega |\nabla\rho^n(x)|\,dx \\ &\quad +\tau\left(\frac{1}{2(1-\tau B)}\int_\Omega |\nabla p_{n+1}|^2\rho^{n+1}\,dx + \left(\frac{g_0^2}{2}+g_0\right)\rho^n(\Omega)\right).\end{aligned}$$

Beweis. Von (1.2) haben wir $\rho^{n+1} = \operatorname{argmin}_{\rho\in L^1(\Omega)} W_2(\rho,\rho^n+\tau\mu^{n+1}) + E(\rho)$. Mit Satz 1.1 aus [DPMSV16] folgt

$$\int_\Omega |\nabla\rho^{n+1}| \leq \int_\Omega |\nabla(\rho^n+\tau\mu^{n+1})|.$$

Mit (3.5) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\rho^{n+1}| \quad \leq \quad & \int_\Omega |\nabla\rho^n(x)(1+\tau G(p^c_{n+1},x))| + \tau\rho^n(x)|\partial_z G(p^c_{n+1},x)\nabla p^c_{n+1}| \\ & +\tau\rho^n(x)|\partial_x G(p^c_{n+1}(x),x)|.\end{aligned}$$

Für den ersten Term haben wir

$$\int_\Omega |\nabla\rho^n(x)(1+\tau G(p^c_{n+1},x))| \leq (1+\tau B)\int_\Omega |\nabla\rho^n|, \text{ da } G\leq B.$$

Um den zweiten Term abzuschätzen, benutzen wir, dass für alle $a,b\in\mathbb{R}$ gilt:

$$0\leq (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab \iff ab\leq \frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

Wenden wir nun zuerst die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und dann die obere Ungleichung an, erhalten wir

$$\tau\int_\Omega \rho^n|\partial_z G(p^c_{n+1},x)\nabla p^c_{n+1}| \leq \frac{\tau}{2}(\int_\Omega \rho^n|\partial_z G(p^c_{n+1},x)|^2\,dx + \int_\Omega \rho^n|\nabla p^c_{n+1}|^2\,dx).$$

Für $\tau < 1/B$ gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega \rho^n|\nabla p^c_{n+1}|^2 \quad &\leq \quad (1-\tau B)^{-1}\int_\Omega \left(\rho^n+\tau\mu^{n+1}\right)|\nabla p^c_{n+1}|^2 \\ &= \quad (1-\tau B)^{-1}\int_\Omega \left(\rho^n+\tau\mu^{n+1}\right)\left|\frac{id-T_{p_{n+1}}}{\tau}\right|^2, \text{ nach (2.1)} \\ &= \quad (1-\tau B)^{-1}\int_\Omega \rho^{n+1}\left|\frac{T^{-1}_{p_{n+1}}-id}{\tau}\right|^2 \\ &= \quad (1-\tau B)^{-1}\int_\Omega \rho^{n+1}|\nabla p_{n+1}|^2,\end{aligned}$$

wobei wir für die letzten beiden Schritte (3.4) verwendet haben. Nun folgt die Abschätzung aus der Definition von g_0 und somit gilt auch $\rho^{n+1}\in BV(\Omega)$. □

3.3 Eigenschaften der Monotonie

Wir untersuchen nun Monotonieeigenschaften der Dichtefunktion. Wir zeigen zuerst, dass sich der Träger im Laufe der Zeit nur ausbreitet. Dafür nehmen wir in diesem Abschnitt an, dass ρ^n (3.2) erfüllt.

Lemma 3.8. *Es gilt, bis auf eine Nullmenge,* $\{x \in \Omega : \rho^n(x) > 0\} \subset \{x \in \Omega : \rho^{n+1}(x) > 0\}$.

Beweis. Wenn $D = \{x \in \Omega : \rho^n(x) > 0,\ \rho^{n+1}(x) = 0\}$, dann ist $p_{n+1}(x) \leq 0$ für fast alle $x \in D$, denn $p_{n+1} \in \partial s(\rho^{n+1})$ fast überall und $\partial s(0) \leq 0$ aufgrund der Eigenschaften von s. Mit der Annahme (G1) folgt

$$\mu^{n+1}(x) = \rho^n(x) G\left(p^c_{n+1}(x), x\right) \geq \rho^n(x) G(0, x) > 0 \text{ für fast alle } x \in D.$$

Wenn wir einen Punkt $x \in D$ mit $T_{p_{n+1}}(x) \neq x$ wählen, gilt $p_{n+1}(T_{p_{n+1}}(x)) < p_{n+1}(x)$, da man $T_{p_{n+1}}$ nach Lemma 2.6 als die eindeutige Lösung von $T_{p_{n+1}}(x) = \operatorname{argmin}_{y\in\Omega} p(y) + c(y, x)$ charakterisieren kann. Daraus folgt $\rho^{n+1}(T_{p_{n+1}}(x)) \leq \rho^{n+1}(x)$ für fast alle $x \in D$, denn wenn dies nicht gelten würde, hätte man mit (3.3) einen Widerspruch zu der Annahme, dass s auf $[0, \infty)$ monoton steigend ist. Nun sehen wir, dass

$$\int_D \rho^n(x) + \tau\mu^{n+1}(x)\, dx = \int_{T_{p_{n+1}}(D)} \rho^{n+1}(y)\, dy \leq 0.$$

Dies ist nur möglich, wenn D eine Nullmenge ist. □

Wenn wir die singuläre Energie E_∞ betrachten, können wir eine starke Aussage über die Monotonie treffen. Zusätzlich können wir zeigen, dass die Dichtefunktion eine charakteristische Funktion bleibt, wenn die Anfangsdichtefunktion bereits eine charakteristische Funktion ist. Wir erinnern uns, dass für $E = E_\infty$ gilt:

$$X = \{\rho \in L^1(\Omega) : E(\rho) < \infty\} = \{\rho \in L^1(\Omega) : 0 \leq \rho \leq 1 \text{ fast überall}\}.$$

Proposition 3.9. *Sei $s = s_\infty$ mit $\rho^n \in X$. Dann ist $\rho^{n+1} \geq \rho^n$ fast überall. Wenn zusätzlich $\rho^n(x) \in \{0, 1\}$ fast überall in Ω, dann haben wir $\rho^{n+1} \in \{0, 1\}$ fast überall in Ω.*

Beweis. Von Lemma 3.8 folgt, dass $D = \{x \in \Omega : \rho^n(x) > 0, \rho^{n+1}(x) = 0\}$ eine Nullmenge ist. Wir betrachten nun die Menge $E = \{x \in \Omega : 0 < \rho^{n+1}(x) < \rho^n(x)\}$. Das bedeutet insbesondere, dass $\rho^{n+1}(x) \in (0, 1)$ auf E ist. Bei der Betrachtung von s^*_∞ fällt auf, dass $s^*_\infty(p) = 0$, wenn $p \leq 0$ und $s^*_\infty(p) = p$, wenn $p > 0$. Daraus folgt, dass $\partial s^*_\infty(p) = 0$ für $p < 0$, $\partial s^*_\infty(p) = 1$ für $p > 0$ und $\partial s^*_\infty(0) = [0, 1]$. Somit folgt aus dem Verhältnis $\rho^{n+1} \in \partial s^*_\infty(p_{n+1})$, dass $p_{n+1} = 0$ fast überall auf E. p_{n+1} ist lipschitzstetig, also haben wir $\nabla p_{n+1} = 0$ fast überall auf E nach [EG15]. $T^{-1}_{p_{n+1}}(x) = x + \tau\nabla p_{n+1}(x)$ ist die optimale Abbildung von $\rho^{n+1}(x)$ nach $\rho^n(x) + \tau\mu^{n+1}(x)$. Also haben wir $T_{p_{n+1}}(x) = T^{-1}_{p_{n+1}}(x) = x$ für fast alle $x \in E$. Da $p^c_{n+1}(x) \leq p_{n+1}(x)$, können wir folgern, dass $\mu^{n+1}(x) = \rho^n(x)G(p^c_{n+1}(x), x) \geq \rho^n(x)G(0, x)$ für fast alle $x \in E$. Nun berechnen wir

$$\int_E \rho^{n+1}(x)\, dx = \int_E \rho^n(x) + \tau\mu^{n+1}(x)\, dx \geq \int_E \rho^n(x) \left(1 + \tau G(0, x)\right)\, dx \geq \int_E \rho^n(x)\, dx.$$

Dies ist nur möglich, wenn E das Maß null hat.

Es bleibt übrig zu zeigen, dass $\rho^{n+1} \in \{0,1\}$ fast überall, wenn $\rho^n \in \{0,1\}$ fast überall. Wir definieren $A = \{x \in \Omega : \rho^{n+1}(x) \in (0,1)\}$. Wie vorher folgern wir, dass $p_{n+1}(x) = 0$ und $T_{p_{n+1}}(x) = T_{p_{n+1}}^{-1}(x) = x$ für fast alle $x \in A$. Des Weiteren haben wir $\rho^n(x) \leq \rho^{n+1}(x) < 1$ für fast alle $x \in A$, also folgt $\rho^n(x) = 0$ aus $\rho^n(x) \in \{0,1\}$ für fast alle $x \in A$. Nun sehen wir, dass

$$\int_A \rho^{n+1}(x)\,dx = \int_A \rho^n(x) + \tau\mu^{n+1}(x)\,dx = \int_A \rho^n(x)(1 + \tau G(p_{n+1}^c(x), x))\,dx = 0.$$

Somit muss A eine Nullmenge sein. $\square$

4 Vergleichsprinzipien

Wir stellen nun ein Vergleichsprinzip sowohl für die Dichte als auch für den Druck auf.

Wir beginnen mit dem Druck. Hier ist zu beachten, dass wir nur positive Stellen des Drucks vergleichen, da wir die Vergleichseigenschaft nur für Regionen garantieren können, in denen die Dichte nicht verschwindet.

Proposition 4.1. *Für $i \in \{0,1\}$ seien $\rho_i \in X$, $G_i(p,x)$ Wachstumsfunktionen, die die Annahmen (G1)-(G4) erfüllen, und G_0 streng monoton fallend in p. Definiere*

$$J_i^*(p) := \int_\Omega \rho_i(x) \left(p^c(x) + \tau \bar{G}_i(p^c(x), x)\right) - s^*(p(x))\, dx,$$

und nehme an, dass die folgenden Eigenschaften gelten:
(1) $0 \leq \rho_0 \leq \rho_1$ fast überall in Ω und sie erfüllen (3.2);
(2) $G_0(z,x) \leq G_1(z,x)$ für alle $(z,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$.
Wenn

$$p_i \in \underset{p \in X^*, p = p^{c\bar{c}}}{\operatorname{argmax}} J_i^*(p),$$

dann gilt $(p_0)_+ \leq (p_1)_+$.

Beweis. Wie in dem Beweis von Proposition 3.2 kann man aus Lemma 2.6 und der Optimalität der p_i's folgern, dass $\eta_i \in \partial s^*(p_i)$ existieren mit

$$\int_\Omega \rho_i(x)\big(1 + \tau G_i(p_i^c(x), x)\big)\phi(T_{p_i}(x)) - \eta_i(x)\phi(x)\, dx = 0 \tag{4.1}$$

für jede beschränkte Funktion ϕ. Da $\eta_i \geq 0$, gilt

$$\rho_i(x)\big(1 + \tau G_i(p_i^c(x), x)\big) \geq 0 \text{ fast überall in } \Omega, \tag{4.2}$$

denn sonst hätte man beispielsweise für ein ϕ mit $\phi(x) > 0$ für fast alle x einen Widerspruch.

Sei $U = \{x \in \Omega : p_0(x) > p_1(x)\}$ und man wähle ϕ als die charakteristische Funktion von U. Wenn wir (4.1) mit $i = 0$ von (4.1) mit $i = 1$ subtrahieren und anders anordnen, sehen wir, dass

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \rho_1(x)\Big(1 + \tau G_1\big(p_1^c(x), x\big)\Big)\phi\big(T_{p_1}(x)\big) - \rho_0(x)\Big(1 + \tau G_0\big(p_0^c(x), x\big)\Big)\phi\big(T_{p_0}(x)\big)\, dx \\ &= \int_\Omega \big(\eta_1(x) - \eta_0(x)\big)\phi(x)\, dx.\end{aligned}$$

Da ∂s^* monoton wächst, ist klar, dass $\eta_0(x) \geq \eta_1(x)$ auf U. Also gilt

$$\int_\Omega \rho_1(x)\Big(1 + \tau G_1\big(p_1^c(x), x\big)\Big)\phi\big(T_{p_1}(x)\big)\, dx \leq \int_\Omega \rho_0(x)\Big(1 + \tau G_0\big(p_0^c(x), x\big)\Big)\phi\big(T_{p_0}(x)\big)\, dx. \tag{4.3}$$

Nach Lemma 4.1 in [JKT20b] wissen wir, dass

$$T_{p_1}(x) \in U \text{ wenn } T_{p_0}(x) \in U, \tag{4.4}$$

woraus $\phi(T_{p_0}(x)) \leq \phi(T_{p_1}(x))$ folgt. Außerdem gilt für $T_{p_0}(x) \in U$, dass

$$p_1^c(x) = p_1(T_{p_1}(x)) + \frac{1}{2\tau}|T_{p_1}(x) - x|^2 \leq p_1(T_{p_0}(x)) + \frac{1}{2\tau}|T_{p_0}(x) - x|^2 < p_0^c(x),$$

wobei die zweite Ungleichung die Definition von p_1^c benutzt und die dritte benutzt, dass $p_1 < p_0$ bei $T_{p_0}(x)$ ist. Mit der strengen Monotonie von G_0 erhalten wir

$$G_0(p_0^c(x), x) < G_1(p_1^c(x), x) \text{ wenn } T_{p_0}(x) \in U. \tag{4.5}$$

Also leiten wir von (4.2) ab, dass

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \rho_1(x)\Big(1 + \tau G_1\big(p_1^c(x), x\big)\Big)\phi\big(T_{p_1}(x)\big) - \rho_0(x)\Big(1 + \tau G_0\big(p_0^c(x), x\big)\Big)\phi\big(T_{p_0}(x)\big)\, dx \\
\geq\ &\int_\Omega \Big(\rho_1(x)\big(1 + \tau G_1\left(p_1^c(x), x\right)\big) - \rho_0(x)\big(1 + \tau G_0\left(p_0^c(x), x\right)\big)\Big)\phi\big(T_{p_0}(x)\big)\, dx \\
\geq\ &\tau \int_\Omega \Big(G_1\big(p_1^c(x), x\big) - G_0\big(p_0^c(x), x\big)\Big)\rho_0(x)\phi\big(T_{p_0}(x)\big)\, dx \geq 0.
\end{aligned}$$

In beiden Rechenschritten haben wir (4.2) benutzt. Zusätzlich haben wir in der zweiten Zeile $\phi(T_{p_0}(x)) \leq \phi(T_{p_1}(x))$ und in der dritten Zeile die Annahme, dass $\rho_0 \leq \rho_1$ fast überall auf Ω ist, benutzt. Zusammen mit (4.3) und (4.5) folgern wir nun, dass $\rho_0(x)\phi(T_{p_0}(x)) = 0$ fast überall in Ω. Seien $\rho_i^* := T_{p_i\#}(\rho_i(1 + \tau G_i(p_i^c(x), x)))$ die optimalen Dichtefunktionen des entsprechenden ursprünglichen Problems. Dann ist

$$\int_U \rho_0^*(x)\, dx = \int_\Omega \rho_0(x)\left(1 + \tau G_0(p_0^c(x), x)\right)\phi(T_{p_0}(x))\, dx = 0.$$

Wir erinnern uns, dass nach Proposition 3.2 $\rho_i^* \in \partial s^*(p_i)$ fast überall. Da ∂s^* monoton wächst, haben wir $\rho_1^* \leq \rho_0^*$ fast überall auf U. Daraus folgt, dass

$$\int_U \rho_1^*(x)\, dx \leq \int_U \rho_0^*(x)\, dx = 0.$$

Somit können wir folgern, dass U eine $(\rho_1^* + \rho_0^*)$-Nullmenge ist, also ist $p_0(x) \leq p_1(x)$ für $(\rho_1^* + \rho_0^*)$-fast alle x. Von der dualen Relation $p_i \in \partial s(\rho_i^*)$ folgt, dass $\rho_i^* > 0$, wenn $p_i > 0$. Also ist U für positive p_i's sogar eine Lebesgue-Nullmenge. Da die p_i's c-konkav sind, sind diese auch lipschitzstetig, also ist $\{x \in \Omega : p_0(x) > 0,\, p_1(x) > 0\} \cap U = \varnothing$. Somit gilt die Behauptung. □

Korollar 4.2. *Die Aussage von Proposition 4.1 gilt auch ohne die Annahme der strengen Monotonie von G_0.*

Beweis. Wir gehen wie in dem Beweis von Korollar 3.6 vor. Wir definieren die streng monoton fallende Funktion $G_\delta(p, x) := G_0(p, x) + \delta(e^{-p} - 1)$ mit $\delta > 0$. Sei J_δ^* die entsprechende duale Energie und p_δ das minimale Element von $\operatorname{argmax}_{p \in X^*, p^{c\bar{c}} = p} J_\delta^*(p, \rho_0)$, das nach Lemma 3.4 existiert. Wenn man nun Proposition 4.1 auf das G_δ anwendet, erhält man $p_\delta \leq p_1$. Wegen der gleichmäßigen Lipschitzstetigkeit konvergiert eine Teilfolge von p_δ gleichmäßig gegen ein Element $p^* \in S_0 = \operatorname{argmax}_{p \in X^*, p^{c\bar{c}} = p} J^*(p, \rho_0)$ für $\delta \to 0$. Da p_0 das minimale Element von S_0 ist, erhalten wir $(p_0)_+ \leq (p^*)_+ \leq (p_1)_+$. □

Nun wollen wir das Vergleichsprinzip auf die Dichtefunktion erweitern.

Proposition 4.3. *Für $i \in \{0,1\}$ sei $J_i : X \times AC(\rho_i)$ die Funktion*

$$J_i(\rho,\mu) = E(\rho) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho, \rho_i + \tau\mu) + \int_\Omega \tau \rho_i f_i \left(\frac{\mu(x)}{\rho_i(x)}, x \right) dx,$$

und nehme an, dass die folgenden Eigenschaften gelten:
(1) $0 \le \rho_0 \le \rho_1$ fast überall und sie erfüllen (3.2);
(2) $\partial_z f_1(z,x) \le \partial_z f_0(z,x)$ für alle $(z,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$.
Wenn

$$(\rho_i^*, \mu_i^*) = \underset{(\rho,\mu)\in X\times AC(\rho_i)}{\operatorname{argmin}} J_i(\rho,\mu),$$

dann gilt $\rho_0^* \le \rho_1^*$ fast überall in Ω.

Beweis. Für den Beweis zeigen wir zuerst, dass $G_0(z,x) \le G_1(z,x)$ für alle $(z,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Dafür wählen wir ein beliebiges $b \in \mathbb{R}$ und $x \in \Omega$, und definieren $z_0 := G_0(b,x)$. Dann gilt

$$\partial f_1(z_0,x) \le \partial f_0(z_0,x) \ni -b,$$

wobei wir hier (2) und die Definition von $\partial f_0(z_0,x)$ benutzt haben. Wir berechnen nun

$$\partial f_1(z_0,x) = \{-\tilde{b} : z_0 = G_1(\tilde{b},x)\} \neq \varnothing.$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil ansonsten $\partial f_1(z_0,x) = \infty$ wäre, was im Widerspruch zu (2) stände. Sei nun $\tilde{b} \in \partial f_1(z_0,x)$. Dann ist

$$-\tilde{b} \le -b, \text{ also } b \le \tilde{b},$$

und somit

$$G_0(b,x) = G_1(\tilde{b},x) \le G_1(b,x),$$

wobei wir in dem ersten Schritt die Definition von $\partial f_1(z_0,x)$ und z_0, und in dem zweiten Schritt die Monotonie von G_1 benutzt haben. Da wir beliebige $b \in \mathbb{R}, x \in \Omega$ betrachtet haben, können wir folgern, dass $G_0(z,x) \le G_1(z,x)$ für alle $(z,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$.

Nun erinnern wir uns, dass unser ursprüngliches Problem dem dualen Problem $J_i^* : X^* \to \mathbb{R}$ entspricht, wobei

$$J_i^*(p) = \int_\Omega \rho_i(x)\big(p^c(x) + \tau \bar{G}_i(p^c(x),x)\big) - s^*\left(p(x)\right) dx.$$

Nach Proposition 3.2 und Korollar 4.2 existieren $p_0, p_1 \in \operatorname{argmax}_{p\in X^*, p=p^{c\bar{c}}} J_i^*(p)$, sodass $p_0 \le p_1$ auf $\operatorname{supp}\rho_0^* \cup \operatorname{supp}\rho_1^*$ und

$$p_i \in \partial s(\rho_i^*), \quad \rho_i^* \in \partial s^*(p_i), \quad T_{p_i\#}(\rho_i + \tau\mu_i^*) = \rho_i^*, \quad \mu_i^*(x) = \rho_i(x) G_i(p_i^c(x), x).$$

Jetzt definieren wir $E = \{y \in \Omega : \rho_1^*(y) < \rho_0^*(y)\}$. Es gilt $E \subset \operatorname{supp}\rho_0^*$, denn wenn dies nicht gelten würde, gäbe es eine Teilmenge $A \subset E$ mit $\rho_1^*(x) < \rho_0^*(x) = 0$ für alle $x \in A$, was jedoch ein Widerspruch zu der Monotonie von s^* nach Lemma 2.10 wäre. Da $E \subset \operatorname{supp}\rho_0^*$ und ∂s monoton steigt, muss gelten, dass $p_0 = p_1$ fast überall auf E. Somit gilt $\nabla p_0 = \nabla p_1$ fast überall in E nach [EG15]. Hieraus folgt $E = T_{p_1}^{-1}(E) = T_{p_0}^{-1}(E)$ (bis auf eine Nullmenge) und $\mu_0^*(x) \le \mu_1^*(x)$ für fast alle $x \in E$, wobei wir hier die Aussage benutzt haben, dass $G_0(z,x) \le G_1(z,x)$ für alle $(z,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Mit den beiden Aussagen können wir nun folgern, dass

$$\int_E \rho_1^*(y) - \rho_0^*(y)\, dy = \int_E \rho_1(x) - \rho_0(x) + \tau(\mu_1^*(x) - \mu_0^*(x))\, dx \ge 0.$$

Also gilt $\rho_0^*(x) \le \rho_1^*(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. □

Wenn wir Proposition 4.1 und Proposition 4.3 iterieren, erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 4.4. *Seien ρ_0, ρ_1 und G_0, G_1 gegeben wie in Proposition 4.1. Wir bezeichnen $\{\rho_i^n\}_n$ und $\{p_{n,i}\}_n$ als die Folgen der Lösungen, erzeugt durch (1.2) beziehungsweise (1.5) mit Anfangsdichte ρ_i. Dann haben wir für $i = 1, \ldots, N$*

$$\rho_0^n \le \rho_1^n \text{ und } (p_{n,0})_+ \le (p_{n,1})_+,$$

solange $\{\rho_i^n\}_{n=1}^N$ (3.2) erfüllt.

Mit Proposition 3.9, Proposition 4.1 und Proposition 4.2 erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 4.5. *Sei $s = s_\infty$ und $\rho_0 \in X$. Dann sind ρ^n und $(p_n)_+$ fast überall monoton wachsend bezüglich n, solange $\rho^1, \ldots, \rho^n$ (3.2) erfüllt.*

5 Begrenzung der Ausbreitungsgeschwindigkeit

Wir wollen nun mithilfe des Vergleichsprinzips zeigen, dass sich der Träger der Dichtefunktion nur mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet (siehe Proposition 5.2). Da der Träger sich nach Lemma 3.8 nur erweitert, reicht es aus zu zeigen, dass eine obere Schranke für die Wachstumsgeschwindigkeit existiert. Das bedeutet, dass unsere Lösung nicht von der Wahl unseres Gebietes Ω abhängt, sofern wir Ω groß genug wählen (siehe Korollar 5.3).

Um diese Aussagen treffen zu können, konstruieren wir eine kugelförmige Grenze für die Dichte. Der Beweis folgt später.

Proposition 5.1. *Sei $\tau > 0$ und $\rho^+ \in \partial s^*([0, +\infty))$ eine endliche Zahl. Dann existieren universelle positive Konstanten R_* und c_*, deren obere Schranken von G, ∂s^* und ρ^+ abhängig sind, und eine Familie von Dichtefunktionen $\{\rho_R\}_{R \geq R_*}$, die zusätzlich von τ abhängen, sodass*

(1) ρ_R ist rotationssymmetrisch und der Träger von ρ_R ist enthalten in $\overline{B_R}$ mit $\rho_R \geq \rho^+$ auf B_{R-R_*};

(2) die neue optimale Dichte ρ, die man erhält, wenn man ρ_R statt ρ^n in (1.2) einsetzt, erfüllt $\rho \leq \rho_{R+c_*\tau}$ fast überall, vorausgesetzt $B_{R+c_*\tau} \subset \Omega$.

Wenn ein $\rho_0 \in X$, das (1.9) erfüllt, gegeben ist, dann ist $\|\rho_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ endlich und liegt wegen Lemma 2.9 in $\partial s^*([0, +\infty))$. Mit Proposition 4.3 erhält man

Korollar 5.2 (Dichten breiten sich mit endlicher Geschwindigkeit aus)**.** *Gegeben sei ein $\rho_0 \in X$, das (1.9) erfüllt. Seien R_*, c_* und $\{\rho_R\}$ gegeben wie in Lemma 5.1 mit $\rho^+ := \|\rho_0\|_{L^\infty(\Omega)}$. Seien $\rho^n = \rho^{n,\tau}$ und $\rho^0 = \rho_0$ für ein festes $\tau > 0$ gegeben wie in (1.2). Wenn $\rho_0 \leq \rho_{R_0}$ fast überall für ein $R_0 \geq R_*$, dann gilt*

$$\rho^n \leq \rho_{R_n} \text{ mit } R_n := R_0 + nc_*\tau, \text{ solange } B_{R_n} \subset \Omega.$$

Angenommen es gilt zusätzlich, dass $\operatorname{supp} \rho_0 \subset \overline{B_R(0)}$ *für ein $R > 0$. Dann ist* $\operatorname{supp} \rho^n \subset \overline{B_{R_n}(0)}$ *mit $R_n := R + R_* + nc_*\tau$, vorausgesetzt diese Kugel liegt in Ω.*

Wegen der Eindeutigkeit von ρ^n (siehe Proposition 3.2) gilt Folgendes.

Korollar 5.3. *Angenommen $\rho_0 \in X$ erfülle (1.9) mit* $\operatorname{supp} \rho_0 \subset B_R(0)$. *Dann ist die Folge $\{\rho^n\}$ für $n\tau \leq T$ unabhängig von der Wahl von Ω, mit der Einschränkung, dass $B_{R+R_*+c_*T}(0) \subset \Omega$.*

Wir wollen nun Proposition 5.1 beweisen.

Dafür definieren wir zuerst eine glatte Funktion $\tilde{G} = G(p)$ mit

(1) $\sup_{x \in \Omega} G(z, x) \leq \tilde{G}(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

(2) $\tilde{G}(0) < +\infty$ und für ein $z_M > 0$ gilt $\tilde{G}(z_M) = 0$, s^* ist differenzierbar in z_M und $(s^*)'(z_M) \geq \rho^+$.

Nach der Voraussetzung existiert ein $p^+ \in [0,+\infty)$ mit $\rho^+ \in \partial s^*(p^+)$ und aufgrund der Konvexität von s^* [Tie84] existiert für jedes $z \geq p^+$ ein $\mu_z \in \partial s^*(z)$ mit $\mu_z \geq \rho^+$. Man sucht also ein $z_M \geq \sup(p^+, b_1)$, wobei b_1 definiert ist wie in (G3), in dem s^* differenzierbar ist. Ein z_M, das die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt, existiert, weil s^* konvex ist und somit fast überall differenzierbar [Tie84]. Aufgrund der Differenzierbarkeit von s^* in z_M ist μ_{z_M} wohldefiniert mit $\mu_{z_M} = (s^*)'(z_M)$. Nun folgt aus (G3) und (G4), dass solch ein $\tilde{G}$ existiert und dieses hängt nur von G und ρ^+ ab.

Wir definieren nun $\tilde{f} = \tilde{f}(z)$ durch $\tilde{G}(z)$ wie in (1.4) und betrachten das modifizierte duale Problem mit einer von x unabhängigen Wachstumsfunktion

$$\sup_{q^{\bar{c}} \in X^*, q^{\bar{c}c} = q} \int_\Omega \rho_0(x)\big(q(x) + \tau\bar{\tilde{G}}(q(x))\big)\, dx - s^*(q^{\bar{c}}), \tag{5.1}$$

wobei $\bar{\tilde{G}} := z\tilde{G}(z) + \tilde{f}(\tilde{G}(z))$ eine Stammfunktion von $\tilde{G}$ ist. Nach Proposition 3.2 hat (5.1) einen Maximierer, denn wir können $p = q^{\bar{c}}$ schreiben und dann ist $p \in X^*$, p ist c-konkav, da $q^{\bar{c}c\bar{c}} = q^{\bar{c}}$, und es gilt $q = p^c$. Wir werden im Folgenden q als den Maximierer bezeichnen.

Anstatt anzunehmen, dass das q durch ρ_0 bestimmt wird, finden wir zuerst das optimale q und leiten daraus dann das entsprechende ρ_0 ab. Dafür nehmen wir an:

(i) ρ_0 ist rotationssymmetrisch und der Träger von ρ_0 ist enthalten in $\overline{B_R} \subset \Omega$;

(ii) $\rho_0 > 0$ auf B_R und $\rho_0 \ll \mathcal{L}^d$;

(iii) das optimale q ist rotationssymmetrisch und $q \in C^2(\overline{B_R})$.

Wegen der Symmetrie können wir $\rho_0 = \rho_0(r)$ und $q = q(r)$ schreiben. Es gilt nach Lemma 2.6:

$$\begin{aligned}
& q^{\bar{c}}\left(r - \tau q'(r)\right) = p^{c\bar{c}}\left(r - \tau (p^c)'(r)\right) \\
= \;& p^{c\bar{c}}\left(T_p(r)\right) = p^c\left(T_p^{-1}(T_p(r)) - c\left(T_p^{-1}\left(T_p(r)\right), T_p(r)\right)\right) \\
= \;& p^c(r) - c\left(r, T_p(r)\right) = q(r) - c\left(r, r - q'(r)\right) \\
= \;& q(r) - \frac{\tau}{2}|q'(r)|^2.
\end{aligned}$$

Wenn wir nun die q-Variation in (5.1) nehmen, erhalten wir die Optimalitätsbedingung für q

$$\rho_0(r) \cdot \frac{1 + \tau\tilde{G}(q(r))}{(1 - \tau q''(r))(1 - \tau r^{-1} q'(r))^{d-1}} \in \partial s^*\left(q(r) - \frac{\tau}{2}|q'(r)|^2\right) \text{ f.a. } r \in [0, R). \tag{5.2}$$

Sei $Q = Q(w)$ die Lösung der folgenden ODE für $w \geq 0$:

$$-Q''(w) = \tilde{G}(Q(w)) + w, \quad Q(0) = z_M, \quad Q'(0) = 0. \tag{5.3}$$

Nun kann man das Folgende zeigen:

Lemma 5.4. *(1) Es existiert ein eindeutiges $w_0 > 0$, welches nur von $\tilde{G}$ abhängt, sodass $Q(w_0) = 0$.*

(2) Q ist glatt und $Q'(w)$, $Q''(w) \leq 0$ für $w \in [0, w_0]$;

(3) Es existiert ein eindeutiges $w_1 \in [0, w_0]$, sodass $Q(w_1) = \frac{\tau}{2}|Q'(w_1)|^2$. Außerdem ist $c_* := |Q'(w_1)|$ beschränkt durch eine universelle Konstante, die nur von $\tilde{G}$ abhängig ist.

Sei $R_* = w_1 + 1$. Für alle $R \geq R_*$ definieren wir

$$q_R(r) = \begin{cases} z_M & \text{falls } r \leq R - w_1, \\ Q(r - (R - w_1)) & \text{falls } r \in (R - w_1, R], \\ -\infty & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5.4}$$

Hier garantieren (5.3) und Lemma 5.4, dass $q_R \in C^2(\overline{B_R})$. Wir definieren nun gemäß (5.2)

$$\rho_R(r) \begin{cases} = (s^*)'(z_M) & \text{falls } r \leq R - w_1, \\ \in \frac{(1-\tau q_R''(r))(1-\tau r^{-1} q_R'(r))^{d-1}}{1+\tau \tilde{G}(q_R(r))} \cdot \partial s^* \left(q_R(r) - \frac{\tau}{2} |q_R'(r)|^2 \right) & \text{falls } r \in (R - w_1, R], \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5.5}$$

Wir wollen nun zeigen, dass ρ_R fast überall in $\mathbb{R}^d$, insbesondere also in $\{y \in \mathbb{R}^d : |y| \in [R - w_1, R]\}$, wohldefiniert ist. Wir nehmen dafür ein $R' \in (R - w_1, R]$ und definieren

$$S_{R'} := \left\{ r \in [R', R] : s^*(\cdot) \text{ ist nicht differenzierbar in } q_R(r) - \frac{\tau}{2} |q_R'(r)|^2 \right\}.$$

Es reicht aus zu zeigen, dass $S_{R'}$ das Maß null hat. Zu beachten ist hier, dass $q_R(r) - \frac{\tau}{2}|q_R'(r)|^2$ C^1 und streng monoton fallend auf $[R', R]$ ist, und dabei erfüllt, dass

$$\frac{d}{dr} \left(q_R(r) - \frac{\tau}{2} |q_R'(r)|^2 \right) \leq C(R') < 0 \text{ für alle } r \in [R', R].$$

Nach *the area formula* [Sim84] und weil $s^*(\cdot)$ konvex ist, und somit fast überall differenzierbar, hat $S_{R'}$ das Maß null. Da R' beliebig nahe an $R - w_1$ sein kann, folgern wir, dass ρ_R fast überall in $\mathbb{R}^d$ wohldefiniert ist. Somit kann man schreiben,

$$\rho_R(r) = \frac{(1 - \tau q_R''(r))(1 - \tau r^{-1} q_R'(r))^{d-1}}{1 + \tau \tilde{G}(q_R(r))} \cdot (s^*)' \left(q_R(r) - \frac{\tau}{2} |q_R'(r)|^2 \right) \text{ f.a. } r \in [0, R]. \tag{5.6}$$

Dass dies auch für $r \in [0, R - w_1]$ gilt, sieht man durch Einsetzen.
Dieses ρ_R erfüllt die Annahmen (i)-(ii).

Nun definieren wir $\tilde{\rho}$ durch

$$\tilde{\rho}(r + \tau |q_R'(r)|) \begin{cases} = (s^*)'(z_M) & \text{falls } r \leq R - w_1, \\ \in \partial s^* \left(q_R(r) - \frac{\tau}{2} |q_R'(r)|^2 \right) & \text{falls } r \in (R - w_1, R], \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5.7}$$

Mit einer ähnlichen Argumentation wie oben kann man zeigen, dass $\tilde{\rho}$ fast überall in $\mathbb{R}$ wohldefiniert ist. Wenn man nun das duale Problem

$$\sup_{p \in X^*, p^{c\bar{c}} = p} \int_\Omega \rho_R(x) \left(p^c(x) + \tau \bar{\tilde{G}}(p^c(x)) \right) dx - \int_\Omega s^*(p(x))\, dx,$$

welches mit c- und $\bar{c}$-Transformationen äquivalent zu (5.1) ist (mit ρ_R statt ρ_0), betrachtet, ist das optimale p nach Proposition 3.2 eindeutig durch $q_R^{\bar{c}}$ auf $\operatorname{supp} \tilde{\rho}$ gegeben und das $\tilde{\rho}$, definiert in (5.7), ist die optimale Dichte.

Für $\tilde{\rho}$ können wir zusätzlich zeigen:

Lemma 5.5. *$\tilde{\rho} \leq \rho_{\tilde{R}}$ fast überall, wobei $\tilde{R} := R + \tau |q_R'(R)|$.*

Beweis. Nach Lemma 5.4 und (5.4) ist $q_{\tilde{R}}'(r), q_{\tilde{R}}''(r) \leq 0$ für $r \in [0, \tilde{R}]$. Nach (5.3) und (5.6) ist

$$\begin{aligned}\rho_{\tilde{R}}(r) &\geq \frac{1 - \tau q_{\tilde{R}}''(r)}{1 + \tau \tilde{G}(q_{\tilde{R}}(r))} \cdot (s^*)' \left(q_{\tilde{R}}(r) - \frac{\tau}{2} |q_{\tilde{R}}'(r)|^2 \right) \\ &\geq (s^*)' \left(q_{\tilde{R}}(r) - \frac{\tau}{2} |q_{\tilde{R}}'(r)|^2 \right).\end{aligned}$$

Da $\tilde{\rho}$ durch (5.7) definiert ist und $(s^*)'$ nicht-fallend ist, reicht es aus zu zeigen, dass für alle $r \in [0, R]$ gilt

$$q_{\tilde{R}}(r + \tau |q_R'(r)|) - \frac{\tau}{2} |q_{\tilde{R}}'(r + \tau |q_R'(r)|)|^2 \geq q_R(r) - \frac{\tau}{2} |q_R'(r)|^2.$$

Nach Lemma 5.4 ist $q_{\tilde{R}}$ eine monoton fallende Funktion, während $|q_{\tilde{R}}'|$ und $|q_R'|$ monoton wachsen. Also gilt

$$\begin{aligned}&q_{\tilde{R}}(r + \tau |q_R'(r)|) - \frac{\tau}{2} |q_{\tilde{R}}'(r + \tau |q_R'(r)|)|^2 \\ \geq\ & q_{\tilde{R}}(r + \tau |q_R'(R)|) - \frac{\tau}{2} |q_{\tilde{R}}'(r + \tau |q_R'(R)|)|^2 \\ =\ & q_R(r) - \frac{\tau}{2} |q_R'(r)|^2.\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus (5.4) und der Definition von $\tilde{R}$. □

Nun können wir den Beweis von Proposition 5.1 formulieren.

Beweis von Proposition 5.1. Sei ρ die neue optimale Dichte, erhalten durch das ursprüngliche diskrete Schema (1.2) mit ρ_R statt ρ^n, und sei $\tilde{\rho}$ erzeugt aus dem ursprünglichen Problem, bezogen auf das duale Problem (5.1).

Aus der Definition von $\tilde{G}$ und der Monotonie von $G(\cdot, x)$ folgert man $\partial_z \tilde{f}(z) \leq \partial_z f(z, x)$. Nach Proposition 4.3 ist $\rho \leq \tilde{\rho}$ fast überall. Somit folgt aus Lemma 5.5 und $|q_R'(R)| = c_*$, dass $\rho \leq \rho_{R + c_* \tau}$. □

6 Gleichgradige Stetigkeit der Dichtefunktionen

In den folgenden Kapiteln wollen wir zeigen, dass ρ^τ, μ^τ und p^τ, definiert wie in (1.8), gegen eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, die das Tumorwachstum modelliert, konvergieren, wenn τ gegen null geht.

Dafür nehmen wir an, dass die Anfangsbedingung $\rho_0 \in X$ (1.9) erfüllt. Für ein $T > 0$, das den zu untersuchenden Zeitabschnitt beschränkt, wissen wir aus dem vorherigen Kapitel, dass man das zu betrachtende Gebiet groß genug wählen kann, sodass es keinen Einfluss auf die Lösung hat. Man wähle Ω also so, dass

$$B_{R_0+CT} \subset \Omega,$$

wobei hier R_0 und C nur von ρ_0, G und s abhängen, und zusätzlich soll gelten

(i) die Interpolationen $(\rho^\tau, \mu^\tau, p^\tau)$ aus (1.8) haben einen kompakten Träger in B_{R_0+CT};

(ii) ρ^τ erfüllt (3.2) für $0 \leq t \leq T$.

R_0 und C existieren nach Proposition 5.2. Außerhalb von Ω setzen wir die zeitdiskreten Lösungen auf null. Nach Proposition 5.3 erzeugt jedes Ω, das die oberen Anforderungen erfüllt, die selben zeitdiskreten Lösungen für $0 \leq t \leq T$. Im Folgenden werden wir die über Ω hinaus erweiterten diskreten Lösungen in $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ benutzen.

Nun wenden wir uns dem Ziel dieses Kapitels zu, gleichgradige Stetigkeit der Dichtefunktionen in Raum und Zeit zu zeigen. Diese Eigenschaft wird dann später für den Beweis der starken Konvergenz der Dichten (siehe Korollar 6.7) nach einem ähnlichen Vorgehen wie in [JKT20b] benutzt.

6.1 Die Energieverlust-Ungleichung, BV-Grenzen und gleichgradige Stetigkeit in der Zeit

Wir beginnen die Energieverlust-Ungleichung zu beweisen, mit dessen Hilfe wir dann BV-Grenzen und gleichgradige Stetigkeit in der Zeit zeigen.

Lemma 6.1. *Sei $T > 0$ und ρ^τ, μ^τ und p^τ definiert wie in (1.8). Dann haben wir für $T' := \left(\lfloor \frac{T}{\tau} \rfloor + 1\right)\tau$*

$$E(\rho^\tau(\cdot, T)) + \frac{1}{2}\int_0^{T'} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla p^\tau|^2 \rho^\tau \, dx \, dt \leq E(\rho_0) + \int_0^{T'} \int_{\mathbb{R}^d} p^\tau \mu^\tau \, dx \, dt.$$

Beweis. Es gilt $s(\rho) + s^*(p) = s(\rho) + \sup_{\tilde{\rho} \in \mathbb{R}}\{\tilde{\rho} p - s(\tilde{\rho})\} \geq \rho p$. Mit dieser Ungleichung und Lemma 2.9, angewandt auf $(\rho^{n+1,\tau}, p_{n+1,\tau})$, folgt

$$\begin{aligned}
&E(\rho^{n+1,\tau}) - E(\rho^{n,\tau}) = E(\rho^{n+1,\tau}) + E^*(p_{n+1,\tau}) - (E(\rho^{n,\tau}) + E^*(p_{n+1,\tau})) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} p_{n+1,\tau}(x) \left(\rho^{n+1,\tau}(x) - \rho^{n,\tau}(x)\right) dx.
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile kann man auch schreiben als

$$\int_{\mathbb{R}^d} p_{n+1,\tau}(x)\rho^{n+1,\tau}(x) - \left(p_{n+1,\tau}(x)\left(\rho^{n,\tau}(x) + \tau\mu^{n+1,\tau}(x)\right)\right) + \tau\mu^{n+1,\tau}(x)p_{n+1,\tau}(x)\,dx.$$

Mit der ersten Formel in (3.4) erhält man dann

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho^{n+1,\tau}(x)\left(p_{n+1,\tau}(x) - p_{n+1,\tau}\left(T^{-1}_{p_{n+1,\tau}}(x)\right)\right) + \tau\mu^{n+1,\tau}(x)p_{n+1,\tau}(x)\,dx.$$

Mit der Konvexität der Abbildung $y \mapsto p_{n+1,\tau}(y) + \frac{1}{2\tau}|y-x|^2$ erhalten wir

$$p_{n+1,\tau}\left(T^{-1}_{p_{n+1,\tau}}(x)\right) + \frac{1}{2\tau}\left|T^{-1}_{p_{n+1,\tau}}(x) - x\right|^2 \geq p_{n+1,\tau}(x) + \left(\nabla p_{n+1,\tau}(x), T^{-1}_{p_{n+1,\tau}}(x) - x\right).$$

Aus dieser Ungleichung und der zweiten Formel in (3.4) folgt

$$p_{n+1,\tau}(x) - p_{n+1,\tau}\left(T^{-1}_{p_{n+1,\tau}}(x)\right) \leq -\frac{\tau}{2}\left|\nabla p_{n+1,\tau}(x)\right|^2.$$

Somit gilt

$$E(\rho^{n+1,\tau}) - E(\rho^{n,\tau}) + \frac{\tau}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \rho^{n+1,\tau}\left|\nabla p_{n+1,\tau}(x)\right|^2\,dx \leq \tau\int_{\mathbb{R}^d} \mu^{n+1,\tau}(x)p_{n+1,\tau}(x)\,dx.$$

Wenn nun man über n von 0 bis $\lfloor \frac{T}{\tau} \rfloor$ summiert, erhält man die Behauptung. □

Für ein $\rho_0 \in X$, das (1.9) erfüllt, ist p^τ gleichmäßig beschränkt durch das, in Lemma 3.5 definierte, P_1. Nach (3.4), (3.5) und der Annahme (G4) gilt $\rho^\tau(t,\mathbb{R}^d) \leq e^{B(t+\tau)}\rho_0(\mathbb{R}^d)$ für jedes $t \in [0,T]$, denn für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $t \in [n\tau,(n+1)\tau)$ ist $\rho^\tau(t,\mathbb{R}^d) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho^{n+1,\tau}(x)\,dx$ und

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \rho^{n+1,\tau}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \rho^{n,\tau}(x)\left(1 + \tau G\left(p^c_{n+1,\tau}(x), x\right)\right)\,dx \\
&\leq (1+\tau B)\int_{\mathbb{R}^d} \rho^{n,\tau}(x)\,dx \leq (1+\tau B)^{n+1}\int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x)\,dx \\
&\leq e^{(n+1)(\tau B)}\rho_0(\mathbb{R}^d) = e^{B(n\tau+\tau)}\rho_0(\mathbb{R}^d) \leq e^{B(t+\tau)}\rho_0(\mathbb{R}^d).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\int_0^{T'}\int_{\mathbb{R}^d} p^\tau\mu^\tau\,dx\,dt \leq P_1 B\left(\tau\rho_0(\mathbb{R}^d) + \int_0^{T'-\tau} \rho^\tau(\mathbb{R}^d,t)\,dt\right) \leq P_1 e^{BT'}\rho_0(\mathbb{R}^d).$$

Hieraus folgt mit Lemma 6.1, und weil $T' \leq T + \tau$ ist,

Korollar 6.2. *Sei $\tau \leq 1/B$ und T' definiert wie in Lemma 6.1. Dann ist*

$$\frac{1}{2}\int_0^{T'}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla p^\tau|^2\rho^\tau\,dx\,dt \leq E(\rho_0) + M\rho_0(\mathbb{R}^d), \tag{6.1}$$

wobei das M von T, G, s und $\|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ abhängig ist.

Mithilfe von Lemma 3.7 und (6.1) kann man nun das Wachstum der BV-Norm der Dichte abschätzen.

Korollar 6.3. *Sei $\tau \leq (2B)^{-1}$ und $\rho_0 \in BV$. Dann existiert eine Konstante M, die von T, G, s und $\|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ abhängig ist, sodass für alle $t \in [0,T]$ gilt*

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \rho^\tau(x,t)|\, dx \leq e^{Bt} \Big((1+\tau B)F(0) + 2E(\rho_0) + M\rho_0(\mathbb{R}^d) \Big).$$

Beweis. Sei T' definiert wie in Lemma 6.1. Nach Lemma 3.7 und (6.1) gilt für jedes $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \rho^\tau(x,t)|\, dx \quad &\leq \quad B\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \rho^\tau(x,s)|\, dx\, ds + (1+\tau B)\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \rho_0|\, dx \\
&\quad + \int_0^{T'} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla p^\tau|^2 \rho^\tau\, dx\, ds + M_2 \left(\int_0^t \rho^\tau(\mathbb{R}^d, s)\, ds + \tau\rho_0(\mathbb{R}^d) \right) \\
&\leq \quad B\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \rho^\tau(x,s)|\, dx\, ds + (1+\tau B)\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \rho_0|\, dx \\
&\quad + 2M_1 + M_2 B^{-1} e^{B(t+\tau)} \rho_0(\mathbb{R}^d)
\end{aligned}$$

mit $M_1 := E(\rho_0) + M\rho_0(\mathbb{R}^d)$ und $M_2 := \frac{1}{2}g_0^2 + g_0$.

In dem ersten Schritt haben wir Lemma 3.7 iterativ angewendet und die Summen als Integrale zusammengefasst. Die zweite Ungleichung folgt aus $\rho^\tau(\mathbb{R}^d, t) \leq e^{B(t+\tau)}\rho_0(\mathbb{R}^d)$ und (6.1). Mit Grönwalls Lemma erhält man nun die Behauptung. □

Als nächstes erhalten wir eine Abschätzung für die gleichgradige Stetigkeit der Dichte in der Zeit.

Lemma 6.4. *Sei $\tau \leq 1/B$ und definiere $\rho^\tau(x,t) := \rho_0(x)$ für $t < 0$. Dann gilt für alle $T > 0$*

$$\int_0^T \left\| \frac{\rho^\tau(\cdot,t) - \rho^\tau(\cdot, t-\tau)}{\tau} \right\|^2_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leq M,$$

wobei M nur von T, G, s und ρ_0 abhängt.

Beweis. Sei ϕ eine glatte Funktion. Mit (3.4) gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\rho^{n+1,\tau}(x) - \rho^{n,\tau}(x)}{\tau}\phi(x)\, dx \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\phi(x) - \phi\left(x + \tau\nabla p_{n+1,\tau}(x)\right)}{\tau}\rho^{n+1,\tau}(x) \\
&\quad + \mu^{n+1,\tau}(x)\phi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Nach dem Fundamentalsatz der Analysis ist dieser Ausdruck gleich

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 \nabla\phi\left(x + \tau\theta\nabla p_{n+1,\tau}(x)\right) \cdot \nabla p_{n+1,\tau}(x)\rho^{n+1,\tau}(x) + \mu^{n+1,\tau}(x)\phi(x)\, d\theta\, dx.$$

Mithilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und der Hölderschen Ungleichung erhält man die Schranke

$$\|\nabla\phi\|_{L^2(\tilde\rho^{n+1,\tau})} \|\nabla p_{n+1,\tau}\|_{L^2(\rho^{n+1,\tau})} + \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} B \|\rho^{n,\tau}\|^{1/2}_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \rho^{n,\tau}(\mathbb{R}^d)^{1/2}.$$

Hierbei ist

$$\tilde\rho^{n+1,\tau} := \int_0^1 \rho_\theta^{n+1,\tau}\, d\theta \quad \text{ und } \quad \rho_\theta^{n+1,\tau} := (id + \tau\theta\nabla p_{n+1,\tau})_\# \rho^{n+1,\tau}.$$

Es gilt $\|\tilde{\rho}^{n+1,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \int_0^1 \|\rho_\theta^{n+1,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\, d\theta$. Außerdem ist $\rho_0^{n+1,\tau} = \rho^{n+1,\tau}$ und $\rho_1^{n+1,\tau} = T^{-1}_{p_{n+1,\tau}\#}\rho^{n+1,\tau} = \rho^{n,\tau} + \tau\mu^{n+1,\tau}$ nach (3.4). Laut [San15] gilt

$$\|\rho_\theta^{n+1,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \max\left(\|\rho_0^{n+1,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}, \|\rho_1^{n+1,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right),$$

also

$$\|\tilde{\rho}^{n+1,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \max\left(\|\rho^{n+1,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}, \|\rho^{n,\tau} + \tau\mu^{n+1,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\rho^{n+1,\tau}(x) - \rho^{n,\tau}(x)}{\tau}\phi(x)\, dx \\
\leq\ & \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \max\left(\|\rho^{n+1,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}, \|\rho^{n,\tau} + \tau\mu^{n+1,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right)^{1/2} \|\nabla p_{n+1,\tau}\|_{L^2(\rho^{n+1,\tau})} \\
& + \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \left(\|\rho^{n,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\rho^{n,\tau}(\mathbb{R}^d)\right)^{1/2} B.
\end{aligned}$$

Durch Division der beiden Seiten durch $\|\phi\|_{H^1(\Omega)}$ folgt

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\rho^{n+1,\tau} - \rho^{n,\tau}}{\tau}\right\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \\
\leq\ & \max\left(\|\rho^{n+1,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}, \|\rho^{n,\tau} + \tau\mu^{n+1,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right)^{1/2} \|\nabla p_{n+1,\tau}\|_{L^2(\rho^{n+1,\tau})} \\
& + \left(\|\rho^{n,\tau}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\rho^{n,\tau}(\mathbb{R}^d)\right)^{1/2} B.
\end{aligned}$$

Die Behauptung erhält man nun mit Lemma 3.5 und Korollar 6.2. □

6.2 Gleichgradige Stetigkeit im Raum

Mithilfe der Vergleichsprinzipien und der BV-Abschätzung in Lemma 3.7 zeigen wir gleichgradige Stetigkeit von ρ^τ im Raum.

Proposition 6.5. *Seien ρ_0 und ρ^τ gegeben wie oben. Dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}^d$*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup_{0<\tau\leq(2B)^{-1}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\rho^\tau(x+\epsilon y, t) - \rho^\tau(x,t)\, dx\, dt = 0.$$

Für $\rho_0 \in BV$ folgt diese Aussage direkt aus Korollar 6.3. Wir werden die allgemeine Aussage zeigen, indem wir die Anfangsdichte durch Dichten in BV approximieren. Dafür benutzen wir das folgende Lemma.

Lemma 6.6. *Seien $\rho_0, \rho_1 \in X$, wobei diese (1.9) erfüllen, und sei ρ_i^τ gegeben durch (1.8) mit Anfangsdichte ρ_i für $i = 0, 1$. Dann gilt für alle $0 \leq t \leq T$*

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1^\tau(x,s) - \rho_0^\tau(x,s)|\, dx\, ds \leq \frac{1}{B}(e^{Bt} - 1)(1+\tau B)\|\rho_1 - \rho_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \tag{6.2}$$

wobei B durch (G4) gegeben ist.

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass $\rho_0 \le \rho_1$. Für $i \in \{0,1\}$ seien (ρ_i^n, μ_i^n) und p_i^n aus (1.2) beziehungsweise (1.5) durch die Anfangsdichte ρ_i erzeugt. Nach Proposition 4.3 gilt $\rho_0^k \le \rho_1^k$ fast überall, wenn $1 \le k \le T/\tau$. Mit (3.4) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1^{n+1}(x) - \rho_0^{n+1}(x)| &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_1^{n+1}(x) - \rho_0^{n+1}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_1(x) - \rho_0(x) + \tau \sum_{k=0}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} (\mu_1^{k+1}(x) - \mu_0^{k+1}(x))\, dx.\end{aligned}$$

Nach (3.5) ist

$$\mu_1^{k+1}(x) - \mu_0^{k+1}(x) = \rho_1^k(x) G(q_1^{k+1}(x), x) - \rho_0^k(x) G(q_0^{k+1}(x), x),$$

wobei $q_i^{k+1} = (p_i^{k+1})^c$. Wir behaupten nun, dass

$$q_0^{k+1}(y) \le q_1^{k+1}(y) \text{ für fast alle } y \in \operatorname{supp} \rho_1^k. \tag{6.3}$$

Diese Aussage gilt, denn wenn dies nicht der Fall wäre, dann hätte man für ein $y \in \operatorname{supp} \rho_1^k$

$$q_1^{k+1}(y) = p_1^{k+1}(T_{p_1^{k+1}}(y)) + \frac{1}{2\tau}|T_{p_1^{k+1}}(y) - y|^2 < p_0^{k+1}(T_{p_0^{k+1}}(y)) + \frac{1}{2\tau}|T_{p_0^{k+1}}(y) - y|^2 = q_0^{k+1}(y).$$

Nach dem Vergleichsprinzip ist $p_0^{k+1}(x) \le p_1^{k+1}(x)$ für fast alle $x \in \operatorname{supp} \rho_1^{k+1}$. Da $T_{p_1^{k+1}}(y) \in \operatorname{supp} \rho_1^{k+1}$ für fast alle $y \in \operatorname{supp} \rho_1^k$, folgt, dass $p_0^{k+1}(T_{p_1^{k+1}}(y)) \le p_1^{k+1}(T_{p_1^{k+1}}(y))$ für fast alle $y \in \operatorname{supp} \rho_1^k$. Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} p_0^{k+1}(T_{p_1^{k+1}}(y)) + \frac{1}{2\tau}|T_{p_1^{k+1}}(y) - y|^2 &\le p_1^{k+1}(T_{p_1^{k+1}}(y)) + \frac{1}{2\tau}|T_{p_1^{k+1}}(y) - y|^2 \\ &< p_0^{k+1}(T_{p_0^{k+1}}(y)) + \frac{1}{2\tau}|T_{p_0^{k+1}}(y) - y|^2. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von $T_{p_0^{k+1}}$. Es gilt also (6.3). Da G nicht wächst, ist

$$\rho_1^k(x) G(q_1^{k+1}(x), x) - \rho_0^k(x) G(q_0^{k+1}(x), x) \le \left(\rho_1^k(x) - \rho_0^k(x)\right) G(q_1^{k+1}(x), x).$$

Somit erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1^{n+1}(x) - \rho_0^{n+1}(x)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1(x) - \rho_0(x)| + \tau B \sum_{k=0}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1^k(x) - \rho_0^k(x)|$$

oder für ρ_i^τ

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1^\tau(x,t) - \rho_0^\tau(x,t)|\, dx \le (1 + \tau B)\|\rho_1 - \rho_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + B \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1^\tau(x,s) - \rho_0^\tau(x,s)|\, dx\, ds.$$

Nun folgt die Behauptung für diesen Fall mit Grönwalls Lemma.

Für den Beweis des allgemeinen Falls sei $\rho_\dagger(x) := \min(\rho_0(x), \rho_1(x))$. Wegen den Annahmen an s erfüllt $\rho_\dagger$ (1.9) und $\rho_\dagger \in X$. Durch (6.2), angewandt auf die Paare ρ_i und $\rho_\dagger$, erhält man

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1^\tau(x,s) - \rho_0^\tau(x,s)|\, dx\, ds \le \frac{1}{B}(e^{Bt} - 1)(1 + \tau B) \left(\|\rho_1 - \rho_\dagger\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|\rho_0 - \rho_\dagger\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\right).$$

Nach der Definition von $\rho_\dagger$ ist die rechte Seite gleich der gewünschten Schranke. $\square$

Beweis von Proposition 6.5. Für jedes $\delta > 0$ kann man ein $\rho_1 \in BV(\mathbb{R}^d)$ finden, sodass $\rho_1 \in X$ (1.9) erfüllt und $\|\rho_0 - \rho_1\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \delta$.

Seien ρ^τ und ρ_1^τ wie in (1.8) mit den Anfangsdichten ρ_0 beziehungsweise ρ_1 gegeben. Mit Lemma 6.6 erhält man

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\rho^\tau(x+\epsilon y, t) - \rho^\tau(x,t)|\, dx\, dt \\
\leq\ & 2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\rho^\tau(x,t) - \rho_1^\tau(x,t)|\, dx\, dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1^\tau(x+\epsilon y,t) - \rho_1^\tau(x,t)|\, dx\, dt \\
\leq\ & \frac{2}{B}(e^{Bt}-1)(1+\tau B)\|\rho_0 - \rho_1\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + T\epsilon|y| \sup_{0\leq t\leq T} \|\rho_1^\tau(\cdot,t)\|_{BV(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

In dem letzten Schritt haben wir die L^1-Lipschitzeigenschaft von BV-Funktionen angewandt. Aus Korollar 6.3 folgt

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup_{0<\tau\leq(2B)^{-1}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\rho^\tau(x+\epsilon y,t) - \rho^\tau(x,t)|\, dx\, dt \leq C\delta,$$

wobei C von B und T abhängt. Daraus folgt die Behauptung. □

Nun folgern wir die starke Konvergenz von ρ^τ in $L^1(\mathbb{R}^d \times [0,T])$.

Korollar 6.7. *Eine Teilfolge von ρ^τ konvergiert stark gegen ein ρ in $L^1(\mathbb{R}^d \times [0,T])$.*

Beweis. Die Aussage folgt aus Proposition 5.6 in [JKT20b], die auf den Abschätzungen der gleichgradigen Stetigkeit aus Lemma 6.4 und Proposition 6.5 basiert. □

7 Grenzwert der Lösung

Wir wollen nun zeigen, dass unsere Lösung sehr schwach gegen die kontinuierliche Lösung (P) konvergiert. Dafür beschränken wir den betrachteten Zeitraum durch ein $T > 0$ und behalten die Annahmen an ρ_0 und Ω aus dem Kapitel 6. Aufgrund der Unabhängigkeit der Lösungen von Ω können und werden wir die erweiterte Definition der Lösungen (ρ^τ, p^τ) mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}^d \times [0,T]$, die außerhalb von Ω gleich null sind, verwenden.

Das folgende Lemma zeigt, dass die diskrete Lösung die kontinuierliche Gleichung (P) bis auf einen Fehlerterm löst.

Lemma 7.1. *Sei $T > 0$ und $\tau \leq \min\{1/B, T/2\}$. Das Paar (ρ^τ, p^τ) löst näherungsweise die kontinuierliche Gleichung im schwachen Sinne, das heißt für alle $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ und $t_0 \in [2\tau, T]$ gilt*

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \rho^\tau \partial_t \phi \, dx \, dt + \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mu^\tau \phi - \rho^\tau \nabla p^\tau \cdot \nabla \phi \, dx \, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho^\tau(x,t_0)\phi(x,t_0) - \rho_0(x)\phi(x,0) \, dx + \epsilon_\tau.
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Hier erfüllt der Fehler ϵ_τ die Ungleichung $|\epsilon_\tau| \leq \tau^{1/2} M$, wobei M eine Konstante ist, die von T, G, s, ρ_0 und ϕ abhängt.

Beweis. Aus der Definition unserer Interpolationen ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_0-\tau} \int_{\mathbb{R}^d} \rho^\tau(x,t) \frac{\phi(x,t+\tau) - \phi(x,t)}{\tau} \, dx \, dt \\
&= -\int_\tau^{t_0-\tau} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\rho^\tau(x,t) - \rho^\tau(x,t-\tau)}{\tau} \phi(x,t) \, dx \, dt \\
&\quad + \frac{1}{\tau} \int_{t_0-\tau}^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \rho^\tau(x,t-\tau)\phi(x,t) \, dx \, dt - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \rho^\tau \phi \, dx \, dt.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Wir betrachten nun die linke Seite dieser Gleichung. Mit der Taylor-Formel erhält man

$$\phi(x,t+\tau) = \phi(x,t) + \tau \partial_t \phi(x,t) + \int_t^{t+\tau} (t+\tau-s) \partial_t^2 \phi(x,s) \, ds,$$

wobei $\int_t^{t+\tau} (t+\tau-s)\partial_t^2 \phi(x,s) \, ds \leq \frac{\tau^2}{2} \|\partial_t^2 \phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])}$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^{t_0-\tau} \int_{\mathbb{R}^d} \rho^\tau(x,t) \frac{\phi(x,t+\tau) - \phi(x,t)}{\tau} \, dx \, dt - \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \rho^\tau \partial_t \phi \, dx \, dt \right| \\
\leq\ & \int_0^{t_0-\tau} \rho^\tau(\mathbb{R}^d, t) \cdot \frac{\tau}{2} \|\partial_t^2 \phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])} \, dt + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \rho^\tau(\mathbb{R}^d, t) \|\partial_t \phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])} \, dt \\
\leq\ & \int_0^{t_0-\tau} e^{B(T+\tau)} \frac{\tau}{2} \|\phi\|_{C^2(\mathbb{R}^d \times [0,T])} \, dt + \int_{t_0-\tau}^{t_0} e^{B(T+\tau)} \|\phi\|_{C^2(\mathbb{R}^d \times [0,T])} \, dt \\
\leq\ & \tau \left(\frac{T}{2} + 1 \right) e^{B(T+\tau)} \rho_0(\mathbb{R}^d) \|\phi\|_{C^2(\mathbb{R}^d \times [0,T])}.
\end{aligned}$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite in (7.2) erhält man mit (3.4)

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau}^{t_0-\tau}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\rho^\tau(x,t)-\rho^\tau(x,t-\tau)}{\tau}\phi(x,t)\,dx\,dt\\
=\;&\int_{\tau}^{t_0-\tau}\int_{\mathbb{R}^d}\rho^\tau(x,t)\frac{\phi(x,t)-\phi\left(x+\tau\nabla p^\tau(x,t),t\right)}{\tau}+\mu^\tau(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

Nach der Taylor-Formel für $\phi\left(x+\tau\nabla p^\tau(x,t),t\right)$ und Korollar 6.2 gilt

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\tau}^{t_0-\tau}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\rho^\tau(x,t)-\rho^\tau(x,t-\tau)}{\tau}\phi(x,t)\,dx\,dt-\int_{\tau}^{t_0-\tau}\int_{\mathbb{R}^d}-\rho^\tau\nabla p^\tau\cdot\nabla\phi+\mu^\tau\phi\,dx\,dt\right|\\
\leq\;&\|\phi\|_{C^2(\mathbb{R}^d\times[0,T])}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\tau}{2}\rho^\tau|\nabla p^\tau|^2\\
\leq\;&\tau M\|\phi\|_{C^2(\mathbb{R}^d\times[0,T])},
\end{aligned}$$

wobei M eine von T, G, s und ρ_0 abhängige Konstante ist. Nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und Korollar 6.2 ist

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\int_0^\tau+\int_{t_0-\tau}^{t_0}\right)\int_{\mathbb{R}^d}-\rho^\tau\nabla p^\tau\cdot\nabla\phi+\mu^\tau\phi\,dx\,dt\right|\\
\leq\;&\left[\left(\int_0^\tau+\int_{t_0-\tau}^{t_0}\right)\rho^\tau(\mathbb{R}^d,t)\,dt\cdot\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\rho^\tau|\nabla p^\tau|^2\,dx\,dt\right]^{1/2}\|\phi\|_{C^1(\mathbb{R}^d\times[0,T])}\\
&+B\|\phi\|_{C(\mathbb{R}^d\times[0,T])}\left(\int_{-\tau}^0+\int_{t_0-2\tau}^{t_0-\tau}\right)\rho^\tau(\mathbb{R}^d,t)\,dt\\
\leq\;&\tau^{1/2}M\|\phi\|_{C^1(\mathbb{R}\times[0,T])}.
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die letzten beiden Terme in (7.2).

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0}\int_{\mathbb{R}^d}\rho^\tau(x,t-\tau)\phi(x,t)\,dx\,dt-\int_{\mathbb{R}^d}\rho^\tau(x,t_0)\phi(x,t_0)\,dx\right|\\
\leq\;&\frac{1}{\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0}\rho^\tau(\mathbb{R}^d,t-\tau)\|\phi(\cdot,t)-\phi(\cdot,t_0)\|_{C(\mathbb{R}^d)}\,dt\\
&+\frac{1}{\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0}\|\rho^\tau(\cdot,t-\tau)-\rho^\tau(\cdot,t_0)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}\|\phi(\cdot,t_0)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\,dt.
\end{aligned}$$

Der erste Term ist durch $\tau e^{BT}\rho_0(\mathbb{R}^d)\|\phi\|_{C^1(\mathbb{R}^d\times[0,T])}$ beschränkt. Nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und der Definition von ρ^τ ist die Schranke des zweiten Terms

$$\begin{aligned}
&C\|\phi\|_{C^1(\mathbb{R}^d\times[0,T])}\tau^{-1/2}\left(\int_{t_0-\tau}^{t_0}\|\rho^\tau(\cdot,t-\tau)-\rho^\tau(\cdot,t_0)\|^2_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}\,dt\right)^{1/2}\\
\leq\;&C\|\phi\|_{C^1(\mathbb{R}^d\times[0,T])}\\
&\left(\|\rho^\tau(\cdot,t_0-2\tau)-\rho^\tau(\cdot,t_0-\tau)\|^2_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}+\|\rho^\tau(\cdot,t_0-\tau)-\rho^\tau(\cdot,t_0)\|^2_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Hier hängt das C von der Größe des Trägers von ϕ ab. Mit Lemma 6.4 (mit $T\geq t_0+\tau$) beschränken wir nun den unteren Ausdruck durch $CM\|\phi\|_{C^1(\mathbb{R}^d\times[0,T])}\tau^{1/2}$, wobei M von T, G, s und ρ_0 abhängig ist. Also gilt

$$\left|\frac{1}{\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0}\int_{\mathbb{R}^d}\rho^\tau(x,t-\tau)\phi(x,t)\,dx\,dt-\int_{\mathbb{R}^d}\rho^\tau(x,t_0)\phi(x,t_0)\,dx\right|\leq CM\|\phi\|_{C^1(\mathbb{R}^d\times[0,T])}\tau^{1/2}.$$

Analog zeigt man für den letzten Term in (7.2), dass

$$\left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^d}\rho^\tau(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt-\int_{\mathbb{R}^d}\rho_0(x)\phi(x,0)\,dx\right|\leq CM\|\phi\|_{C^1(\mathbb{R}^d\times[0,T])}\tau^{1/2}.$$

Durch das Zusammenfassen der oberen Abschätzungen erhält man die Behauptung. □

Nun untersuchen wir das Konvergenzverhalten von μ^τ für $\tau\to 0$.

Lemma 7.2. *Sei $T>0$. Dann gilt für jedes $\phi\in L^\infty([0,T];W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))$*

$$\lim_{\tau\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\left(\mu^\tau(x,t)-\rho^\tau(x,t)G(p^\tau(x,t),x)\right)\phi(x,t)\,dx\,dt=0.$$

Beweis. Man nehme an, dass $\tau\leq 1/B$. Sei $0\leq n\leq\lfloor\frac{T}{\tau}\rfloor$ und $\varphi\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ eine beliebige Testfunktion. Aufgrund von (3.4) und (3.5) haben wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)(\rho^n+\tau\mu^{n+1})G(p^c_{n+1}(x),x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d}\rho^{n+1}(x)\varphi(T^{-1}_{p_{n+1}}(x))\\ &\quad G\left(p^c_{n+1}(T^{-1}_{p_{n+1}}(x)),T^{-1}_{p_{n+1}}(x)\right)\,dx,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\left(\rho^n(x)G(p^c_{n+1}(x),x)-\rho^{n+1}(x)G(p_{n+1}(x),x)\right)\,dx\\ =&\int_{\mathbb{R}^d}\rho^{n+1}(x)\left(\varphi(T^{-1}_{p_{n+1}}(x))G\left(p^c_{n+1}(T^{-1}_{p_{n+1}}(x)),T^{-1}_{p_{n+1}}(x)\right)-\varphi(x)G\left(p_{n+1}(x),x\right)\right)\,dx\\ &-\tau\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\mu^{n+1}(x)G(p^c_{n+1}(x),x)\,dx.\end{aligned}\tag{7.3}$$

Der letzte Term ist durch $\tau B^2e^{B(T+\tau)}\rho_0(\mathbb{R}^d)\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ beschränkt.

Um den ersten Term abzuschätzen, benutzen wir die Gleichung

$$p^c_{n+1}(T^{-1}_{p_{n+1}}(x))=p_{n+1}(x)+\frac{1}{2\tau}|x-T^{-1}_{p_{n+1}}(x)|^2=p_{n+1}(x)+\frac{\tau}{2}|\nabla p_{n+1}(x)|^2,$$

die aus der Definition von $T_{p_{n+1}}$ und der c-Transformation folgt.
Mit dem $g_0:=\|G\|_{W^{1,\infty}\left([0,P_1]\times\mathbb{R}^d\right)}$ aus Lemma 3.7 haben wir somit

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^d}\rho^{n+1}(x)\left(\varphi(T^{-1}_{p_{n+1}}(x))G\left(p^c_{n+1}(T^{-1}_{p_{n+1}}(x)),T^{-1}_{p_{n+1}}(x)\right)-\varphi(x)G\left(p_{n+1}(x),x\right)\right)\,dx\right|\\ =&\left|\int_{\mathbb{R}^d}\rho^{n+1}(x)\right.\\ &\left.\int_0^1\left(\varphi(x+s\tau\nabla p_{n+1}(x))G\left(p_{n+1}(x)+s\frac{\tau}{2}|\nabla p_{n+1}(x)|^2,x+s\tau\nabla p_{n+1}(x)\right)\right)'\,ds\,dx\right|\\ \leq&\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\rho^{n+1}(x)\left(\tau|\nabla p_{n+1}(x)|\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}B+\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\tau|\nabla p_{n+1}(x)|g_0\right)\\ &+\rho^{n+1}(x)\left(\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\frac{\tau}{2}|\nabla p_{n+1}(x)|^2g_0\right)\,dx\,ds\\ \leq&\ \tau\left(B\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}+g_0\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right)(\rho^{n+1}(\mathbb{R}^d))^{1/2}\|\nabla p_{n+1}\|_{L^2(\rho^{n+1})}\\ &+\frac{\tau}{2}g_0\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|\nabla p_{n+1}\|^2_{L^2(\rho^{n+1})}.\end{aligned}$$

Wir schätzen (7.3) nun mit dieser Ungleichung ab, und da $\|\nabla p_{n+1}\|_{L^2(\rho^{n+1})}$ entweder durch 1 oder $\|\nabla p_{n+1}\|^2_{L^2(\rho^{n+1})}$ beschränkt ist, erhalten wir

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \left(\mu^{n+1}(x) - \rho^{n+1}(x) G(p_{n+1}(x), x)\right) dx \right| \leq \tau M \|\varphi\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} \left(1 + \|\nabla p_{n+1}\|^2_{L^2(\rho^{n+1})}\right),$$

wobei M eine von T, G s und ρ_0 abhängige Konstante ist.

Wenn wir die obere Ungleichung bezüglich ρ^τ, μ^τ und p^τ umschreiben, $\varphi(x)$ durch $\phi(x,t)$ ersetzen und das Zeitintegral über $[0,T]$ nehmen, erhalten wir

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\mu^\tau(x,t) - \rho^\tau(x,t) G(p^\tau(x,t), x)) \, \phi(x,t) \, dx \, dt \right| \\ \leq \quad & \tau M \|\phi(t,\cdot)\|_{L^\infty([0,T];W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))} \left(T + \int_0^{T'} \int_{\mathbb{R}^d} \rho^\tau |\nabla p^\tau|^2 \, dx \, dt \right), \end{aligned}$$

wobei $T' = \left(\lfloor \frac{T}{\tau} \rfloor + 1\right) \tau$ wie in Lemma 6.1 definiert ist. Nun folgt die Behauptung aus Korollar 6.2. □

Jetzt können wir Konvergenz für $\tau \to 0$ beweisen. Für den Druck zeigen wir nur die Konvergenz an den positiven Stellen von p^τ. Dies ist ausreichend, da p^τ auf dem Träger von ρ^τ nicht negativ ist.

Proposition 7.3. *$\rho_0 \in X$ erfülle (1.9). Dann ist ρ^τ gleichmäßig beschränkt in $L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ und konvergiert stark in $L^1(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ auf einer Teilfolge gegen ein ρ in $L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])$. Außerdem ist $p^\tau_+ = \max(p^\tau, 0)$ gleichmäßig beschränkt in $L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ und eine Teilfolge konvergiert schwach-* gegen ein p in $L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])$. Zusätzlich konvergiert jeweils eine Teilfolge von $\rho^\tau p^\tau$ und $s^*(p^\tau)$ schwach in $L^1(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ gegen ρp und $s^*(p)$.*

Beweis. p^τ hat nach Lemma 3.5 eine gleichmäßige obere Schranke in $\mathbb{R}^d \times [0,T]$. Somit konvergiert eine Teilfolge von p^τ_+ gegen ein $p \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ in der schwach-*-Topologie. Mit (3.3) und der gleichmäßigen Beschränktheit von p^τ sieht man, dass ρ^τ in $L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ gleichmäßig beschränkt ist. Dies gilt also auch für $\rho^\tau p^\tau$.

Mit Korollar 6.7 folgt nun, dass eine Teilfolge von $\rho^\tau p^\tau = \rho^\tau p^\tau_+$ schwach gegen ρp in $L^1(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ konvergiert.

Nun zeigen wir, dass $p \in \partial s(\rho)$. Nach Lemma 2.9 ist es ausreichend zu zeigen, dass

$$\rho(x,t)p(x,t) = s(\rho(x,t)) + s^*(p(x,t)) \text{ für fast alle } (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T]. \tag{7.4}$$

Wir müssen nur noch zeigen, dass die linke Seite größer oder gleich der rechten Seite ist, da die andere Ungleichung immer gilt. Wir haben $s^*(p) = s^*(p_+)$, weil $s^*(p) = 0$ für $p \leq 0$. In dem diskreten Schema gilt also

$$\rho^\tau(x,t)p^\tau(x,t) = s(\rho^\tau(x,t)) + s^*(p^\tau_+(x,t)) \text{ für fast alle } (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T]. \tag{7.5}$$

Da $\rho^\tau \to \rho$ auf einer Teilfolge in $L^1(\mathbb{R}^d \times [0,T])$, gilt das selbe für $s(\rho^\tau)$, wegen der Stetigkeit von s. Zusammen mit der schwachen Konvergenz einer Teilfolge von $\rho^\tau p^\tau$ gegen ρp in $L^1(\mathbb{R}^d \times [0,T])$, der schwach-*-Konvergenz einer Teilfolge von p^τ_+ in $L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ und der schwachen Unterhalbstetigkeit von s^* folgt die Ungleichung.

Nun können wir die Aussage treffen, dass eine Teilfolge von $s^*(p^\tau) = s^*(p^\tau_+)$ schwach gegen $s^*(p)$ in $L^1(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ konvergiert. Diese folgt aus (7.4), (7.5) und weil $\rho^\tau p^\tau \rightharpoonup \rho p$ und $s(\rho^\tau) \to s(\rho)$ in $L^1(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ entlang einer Teilfolge. □

Nun können wir den Grenzwert als sehr schwache Lösung von (1.7) charakterisieren. Dabei gilt nach Lemma 3.5, dass $p^\tau \leq M_0 := \max(b_1, \inf \partial s(\|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}))$ für alle $\tau > 0$.

Satz 7.4. *Sei entweder $s \in C^1_{loc}([0, +\infty))$ oder $G(\cdot, x)$ affin auf $[0, M_0]$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Für $T > 0$ erfüllt (ρ, p) aus Proposition 7.3 dann die Gleichung*

$$\int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \rho \partial_t \phi + s^*(p)\Delta\phi + G(p,x)\rho\phi \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x,t_0)\phi(x,t_0) \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x)\phi(x,0) \, dx \tag{7.6}$$

für alle $\phi \in C^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ und fast alle $t_0 \in [0,T]$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass für eine Teilfolge mit $\tau \to 0$ gilt

$$\int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} G(p^\tau, x)\rho^\tau \phi \, dx \, dt \to \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} G(p,x)\rho\phi \, dx \, dt \tag{7.7}$$

für alle $\phi \in C_0^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ und alle $t_0 \in [0,T]$. Wenn $s \in C^1_{loc}([0,\infty))$, haben wir $p^\tau_+ = s'(\rho^\tau)$ fast überall. Nach Korollar 6.7 konvergiert eine Teilfolge von p^τ_+ fast überall gegen p auf $\mathbb{R}^d \times [0,T]$. Da G stetig ist, konvergiert $\rho^\tau(x,t)G(p^\tau(x,t),x)$ fast überall gegen $\rho(x,t)G(p(x,t),x)$. Zusammen mit der gleichmäßigen Beschränktheit von G folgt (7.7) aus dem Satz der majorisierten Konvergenz. Falls G affin ist, gilt (7.7) aufgrund der L^1-Konvergenz von ρ^τ gegen ρ und der schwach-*-Konvergenz von p^τ_+ gegen p in $L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])$.

Wir behaupten nun, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho^\tau \nabla p^\tau \cdot \nabla\phi \, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} s^*(p^\tau)\Delta\phi \, dx. \tag{7.8}$$

Falls $s^* \in C^1_{loc}(\mathbb{R})$, folgt diese Behauptung aus (3.3) durch partielle Integration. Angenommen $s^* \notin C^1_{loc}(\mathbb{R})$. Wir konstruieren $\{s^*_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ als eine nicht-negative Folge aus C^1-Approximationen von s^* wie folgt. Sei $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ so definiert, dass $\zeta \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \zeta = 1$ und $\operatorname{supp}\zeta \subset [0,1]$. Definiere $\zeta_\epsilon(x) := \epsilon^{-1}\zeta(x/\epsilon)$ und sei $s^*_\epsilon = s^* * \zeta_\epsilon$ die Faltung. Wir betrachten nun s^*_ϵ. Es gilt

$$\begin{aligned} s^*_\epsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}} s^*(t)\epsilon^{-1}\zeta\left(\frac{x-t}{\epsilon}\right) dt = \int_{x-\epsilon}^{x} s^*(t)\epsilon^{-1}\zeta\left(\frac{x-t}{\epsilon}\right) dt, \text{ da } \operatorname{supp}\zeta \subset [0,1] \\ &= \int_0^1 s^*(x-\epsilon t)\zeta(t) \, dt \text{ durch Substitution.} \end{aligned}$$

Nun sieht man, dass s^*_ϵ monoton fallend ist bezüglich ϵ, da s^* monoton wächst. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 s^*(x-\epsilon t)\zeta(t) \, dt &\leq s^*(x) \int_0^1 \zeta(t) \, dt = s^*(x), \\ \int_0^1 s^*(x-\epsilon t)\zeta(t) \, dt &\geq s^*(x-\epsilon) \int_0^1 \zeta(t) \, dt = s^*(x-\epsilon), \end{aligned}$$

also $s^*(x-\epsilon) \leq s^*_\epsilon(x) \leq s^*(x)$. Aufgrund der lokalen Lipschitzstetigkeit von s^* gilt für ein genügend kleines ϵ, dass $|s^*_\epsilon(x) - s^*(x)| \leq L\epsilon$, wobei L die Lipschitzkonstante ist. Daraus folgt nun $s^*_\epsilon \to s^*$ lokal gleichmäßig für $\epsilon \to 0$.

Wir betrachten nun die Ableitung von s^*_ϵ. Es gilt $(s^*_\epsilon)'(x) = \int_0^1 (s^*)'(x-\epsilon t)\zeta(t) \, dt$. Mit der

Konvexität von s^* sieht man, dass auch $(s^*_\epsilon)'$ monoton fallend ist bezüglich ϵ und in jedem differenzierbaren Punkt von s^* gilt $(s^*_\epsilon)' \nearrow (s^*)'$ für $\epsilon \to 0$. Sei $\rho^\tau_\epsilon := (s^*_\epsilon)'(p^\tau)$. Dann haben wir für ein Ω, das konvex, glatt, ausreichend groß ist und $\operatorname{supp} \rho^\tau$ und $\operatorname{supp} \rho^\tau_\epsilon$ enthält,

$$\int_\Omega \rho^\tau_\epsilon \nabla p^\tau \nabla \phi \, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} s^*_\epsilon(p^\tau)\Delta\phi \, dx \to -\int_{\mathbb{R}^d} s^*(p^\tau)\Delta\phi \, dx \tag{7.9}$$

für $\epsilon \to 0$.

Die Konvergenz folgt aus der lokalen gleichmäßigen Konvergenz von s^*_ϵ gegen s^*. Da s^* konvex ist, hat es nur abzählbar viele nicht-differenzierbare Stellen, die wir als $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ bezeichnen. Sei $A_i = \{x \in \Omega : p^\tau = a_i\}$ und $A = \cup_{i=1}^\infty A_i$. Es ist bekannt, dass $\nabla p^\tau = 0$ fast überall in A_i für alle i. Somit gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega (\rho^\tau_\epsilon - \rho^\tau)\nabla p^\tau \nabla\phi \, dx \right| &\leq \int_{\Omega\setminus A} |\rho^\tau_\epsilon - \rho^\tau||\nabla p^\tau||\nabla\phi| \, dx \\ &\leq \|\nabla p^\tau\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{\Omega\setminus A} |(s^*_\epsilon)'(p^\tau) - (s^*)'(p^\tau)| \, dx. \end{aligned}$$

Da p^τ c-konkav ist, hat $\|\nabla p^\tau\|_{L^\infty(\Omega)}$ nach Lemma 2.4 eine gleichmäßige Schranke. Da $(s^*_\epsilon)'(p^\tau) \nearrow (s^*)'(p^\tau)$ auf $\Omega\setminus A$, geht die rechte Seite für $\epsilon \to 0$ gegen null. Damit und mit (7.9) beenden wir den Beweis von (7.8).

Nun erhalten wir mit Proposition 7.3, dass für alle $0 < t_0 \leq T$ und alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ gilt

$$\int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \rho^\tau \nabla p^\tau \cdot \nabla\phi \, dx \, dt \to -\int_0^{t_o} \int_{\mathbb{R}^d} s^*(p)\Delta\phi \, dx \, dt \tag{7.10}$$

entlang einer Teilfolge für $\tau \to 0$.

Außerdem gilt nach Korollar 6.7 und dem Satz von Fubini, dass $\rho^\tau(t_0,\cdot) \to \rho(t_0,\cdot)$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ für fast alle $t_0 \in [0,T]$.

Daher folgt (7.6) aus Lemma 7.1, Lemma 7.2, Proposition 7.3, (7.7) und (7.10). □

Bemerkung 7.5. Mit Lemma 7.2 und (7.7) erhalten wir die Aussage, dass $\mu^\tau \rightharpoonup \rho G(p,x)$ in $L^1([0,T]; W^{-1,1}(\mathbb{R}^d))$ entlang einer Teilfolge für $\tau \to 0$.

Wenn $s = s_\infty$, erhalten wir die starke Konvergenz von p^τ mithilfe der Monotonieeigenschaft aus Korollar 4.5.

Satz 7.6. *Sei $s = s_\infty$ und $\rho_0(x) \in [0,1]$. Dann ist $\{\rho^\tau\}_{\tau>0}$ gleichmäßig beschränkt in $L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ und konvergiert gegen ein ρ in $L^1(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ entlang einer Teilfolge. Außerdem existiert ein $p \in \partial s(\rho)$, sodass $p^\tau_+ \to p$ in $L^1(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ und $p^\tau_+ \rightharpoonup p$ in $L^2([0,T]; H^1(\mathbb{R}^d))$ entlang einer Teilfolge. Zusätzlich erfüllt (ρ, p), dass $(\rho-1)p = 0$ fast überall und*

$$\int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \rho\partial_t\phi - \nabla p \cdot \nabla\phi + G(p,x)\rho\phi \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x,t_0)\phi(x,t_0) \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x)\phi(x,0) \, dx \tag{7.11}$$

für jedes $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$ und fast alle $t_0 \in [0,T]$.

Beweis. Wir wissen nach Lemma 3.5 bereits, dass p^τ_+ gleichmäßig beschränkt in $L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ ist. Nach (3.3) ist $(\rho^\tau - 1)p^\tau_+ = 0$ fast überall, weil $p^\tau_+ = \partial s(\rho^\tau) = 0$ fast überall für $\rho^\tau \in (0,1)$ und falls $\rho^\tau = 0$, gilt $p^\tau \leq 0$ fast überall, weil $\partial s^*(p^\tau)$ für $p^\tau > 0$ keine null enthält. Somit hat p_+^τ für $t \in [0,T]$ einen kompakten Träger, der gleichmäßig bezüglich τ ist (siehe Kapitel 5). Außerdem gilt für jedes $t_0 \in [0,T]$

$$\int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla p_+^\tau|^2 \, dx = \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \rho^\tau |\nabla p_+^\tau|^2 \, dx, \tag{7.12}$$

wobei dieser Ausdruck nach Korollar 6.2 gleichmäßig beschränkt ist. (7.12) gilt, weil $\nabla p_+^\tau = 0$ fast überall, wenn $\rho^\tau < 1$.

Nun betrachten die lineare Interpolation

$$\tilde{p}^\tau(x,(n-1+\theta)\tau) := \theta p_+^\tau(x,n\tau) + (1-\theta)p_+^\tau(x,(n-1)\tau) \text{ für } 0 \le \theta < 1 \text{ und } n \in \mathbb{N}_+.$$

Man erhält für alle $N \le T/\tau + 1$

$$\begin{aligned} \int_0^{N\tau} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t \tilde{p}^\tau| \, dx \, dt &= \sum_{n=1}^N \tau \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{p_+^\tau(x,n\tau) - p_+^\tau(x,(n-1)\tau)}{\tau} \right| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (p_+^\tau(x,N\tau) - p_+^\tau(x,0)) \, dx, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus der Monotonie von p_+^τ in der Zeit folgt (siehe Korollar 4.5). Somit ist $\partial_t \tilde{p}^\tau \in L^1(\mathbb{R}^d \times [0,T])$. Mit (7.12) treffen wir nun die Aussage, dass $\tilde{p}^\tau$ gleichmäßig beschränkt in $W^{1,1}(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ ist. Mit dem Satz von Rellich-Kondrachov folgt nun, dass $\tilde{p}^\tau$, und somit auch p_+^τ, entlang einer Teilfolge stark gegen p in $L^1(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ konvergiert. Da p_+^τ, also auch p, gleichmäßig in $L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ beschränkt ist, gilt die Konvergenz auch in $L^2(\mathbb{R}^d \times [0,T])$. Mit der gleichmäßigen Beschränktheit von ∇p_+^τ in $L^2(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ aus (7.12) folgt, dass $\nabla p_+^\tau \rightharpoonup \nabla p$ in $L^2(\mathbb{R}^d \times [0,T])$.

Als nächstes folgt die duale Relation $p(\rho - 1) = 0$ aus der diskreten Version $p_+^\tau \rho^\tau = p_+^\tau$ und von der starken Konvergenz von p_+^τ und ρ^τ in $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d \times [0,T])$. Abschließend wird (7.11) wie in Satz 7.4 bewiesen. □

8 Eindeutigkeit der Lösungen

In diesem Kapitel zeigen wir, dass die Grenzwerte der Interpolationen in vielen Fällen, insbesondere für $s = s_m$ und $s = s_\infty$ mit allgemeinem G, dem noch zu definierenden Begriff von eindeutigen Lösungen entsprechen.

8.1 Reguläre Energie

Definition 8.1. (ρ, p) ist eine sehr schwache Lösung von (1.7), wenn die beiden Funktionen jeweils nicht-negativ, beschränkt und mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ sind, sodass $s^*(p) \in L^2(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ und sie (7.4) und (7.6) erfüllt.

Satz 8.2. *Sei $s \in C^1_{loc}([0,\infty))$ und nehme an, dass für jedes $C > 0$ eine Konstante $M = M_C$ existiert, sodass*

$$x|s'(x) - s'(y)| \leq M|x - y| \text{ für alle } x, y \in [0, C]. \tag{8.1}$$

Dann ist das Paar (ρ, p), wie in Satz 7.4 gegeben, die eindeutige sehr schwache Lösung von (1.7).

Bemerkung 8.3. Für $s(\rho) = \rho^m$ mit $m > 1$ sind die Voraussetzungen erfüllt.

Beweis. Analog zu den Beweisen von Satz 6.5 und Satz 6.6 in [Vaz07] erhalten wir die Ungleichung

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\rho_1(x,t_0) - \rho_2(x,t_0))_+ \, dx \leq \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} (\rho_1 G(p_1,x) - \rho_2 G(p_2,x))_+ \, dx \, dt,$$

wobei $p_i = s'(\rho_i)$. Da $G(z,x)$ beschränkt und lipschitzstetig in z ist, gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1(x,t_0) - \rho_2(x,t_0)| \, dx &\leq \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1 G(p_1,x) - \rho_2 G(p_2,x)| \, dx \, dt \\ &\leq \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1 (G(p_1,x) - G(p_2,x)) + (\rho_1 - \rho_2) G(p_2,x)| \, dx \, dt \\ &\leq A \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} (\rho_1 |p_1 - p_2| + |\rho_1 - \rho_2|) \, dx \, dt\end{aligned}$$

mit $A = \max(L, B)$, wobei L die Lipschitzkonstante ist. Mit (8.1) und der Beschränktheit von ρ_1 (siehe Lemma 3.5) erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_1(x,t) |p_1(x,t) - p_2(x,t)| \, dx \leq M \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1(x,t) - \rho_2(x,t)| \, dx,$$

wobei M eine gleichmäßige Konstante für $0 \leq t \leq T$ ist. Insgesamt gilt also

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1(x,t_0) - \rho_2(x,t_0)| \, dx \leq (A + \max(1, M)) \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1 - \rho_2| \, dx \, dt.$$

Mit Grönwalls Lemma folgt

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1(x,t_0) - \rho_2(x,t_0)|\, dx \leq 0,$$

also $\rho_1 = \rho_2$ fast überall auf $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ und wegen $p_i = s'(\rho_i)$ fast überall gilt auch $p_1 = p_2$ fast überall auf $\mathbb{R}^d \times [0,T]$. □

8.2 Tumorwachstumsmodell

Für $s = s_\infty$ kann man den oberen Beweis nicht verwenden, weil (8.1) nicht gilt. Vor der Aussage zur Eindeutigkeit von Lösungen definieren wir zuerst einen stärkeren Begriff von schwachen Lösungen mit Informationen zu den Zeitableitungen.

Definition 8.4. (ρ, p) ist eine schwache Lösung von (P) mit $s = s_\infty$, wenn die beiden Funktionen jeweils einen kompakten Träger in $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ haben, sodass $0 \leq \rho \leq 1$, $p \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T]) \cap L^2([0,T]; H^1(\mathbb{R}^d))$, (7.4) und (7.11) gelten und zusätzlich sind

$$\rho_t, p_t \in L^1(\mathbb{R}^d \times [0,T]). \tag{8.2}$$

Das Paar (ρ, p) aus Satz 7.6 ist eine schwache Lösung von (P), wobei (8.2) aufgrund der Monotonie von ρ und p in der Zeit gemäß Korollar 4.5 erfüllt ist.

Wir erhalten den folgenden Satz aus [PQV14]. Hier wird der Beweis nur skizziert.

Satz 8.5. *Sei $G(\cdot, x)$ lokal gleichmäßig C^2. Dann hat das Paar (ρ, p) aus Satz 7.6 eine eindeutige schwache Lösung von (1.7) mit $s = s_\infty$.*

Beweis. Wir betrachten zwei Paare schwacher Lösungen $(\rho_i, p_i)_{i=1,2}$ von (P) mit $s = s_\infty$. Definiere $\Omega_T := \Omega \times [0,T]$, wobei Ω ausreichend groß ist, sodass Ω_T die Träger von (ρ_i, p_i) für $i = 1, 2$ enthält. Wie in Abschnitt 3 von [PQV14] betrachten wir zwei Lösungen von (7.11). Für jede Testfunktion $\psi \in C_0^\infty(\Omega_T)$ mit $\psi(\cdot, T) = 0$ erhalten wir mit partieller Integration

$$\int\int_{\Omega_T} (\rho_1 - \rho_2)\partial_t\psi + (p_1 - p_2)\Delta\psi + (\rho_1 G(p_1, x) - \rho_2 G(p_2, x))\psi = 0. \tag{8.3}$$

Durch Umschreiben bekommt man

$$\int\int_{\Omega_T} (\rho_1 - \rho_2 + p_1 - p_2)[A\partial_t\psi + B\Delta\psi + AG(p_1, x)\psi - CB\psi] = 0,$$

wobei, wegen $\rho_i = 1$, wenn $p_i > 0$, und sonst $\rho_i \leq 1$,

$$A = \frac{\rho_1 - \rho_2}{(\rho_1 - \rho_2) + (p_1 - p_2)}, \quad B = \frac{p_1 - p_2}{(\rho_1 - \rho_2) + (p_1 - p_2)} \in [0,1]$$

und

$$0 \leq C = -\rho_2 \frac{G(p_1, x) - G(p_2, x)}{p_1 - p_2} \leq M < \infty.$$

Man definiert $A = 0$, wenn $\rho_1 = \rho_2$, und $B = 0$, wenn $p_1 = p_2$. Als nächstes möchte man das duale Problem

$$\begin{cases} A\partial_t\psi + B\Delta\psi + AG(p)\psi - CB\psi = A\Phi \text{ in } \Omega_T, \\ \psi = 0 \text{ in } \partial\Omega \times (0,T), \quad \psi(\cdot, T) = 0 \text{ in } \Omega, \end{cases}$$

für ein glattes Φ lösen. Daraus würde $\int\int_{\Omega_T}(\rho_1 - \rho_2)\Phi = 0$, also auch die Eindeutigkeit der Dichte folgen. Die Eindeutigkeit des Drucks zeigt man dann mit (8.3). Da die Koeffizienten des dualen Problems nicht glatt und auch A und B nicht strikt positiv sind, benötigen wir Approximationen der Koeffizienten, damit wir dieses Problem mit einem Fehlerterm lösen können.

Dieser Fehlerterm kann sehr klein werden, wenn die Koeffizienten bestimmte Eigenschaften erfüllen. Zuerst erwarten wir, dass diese in $L^2(\Omega_T)$ liegen, was auch zutrifft, weil sie beschränkt sind. Zusätzlich soll $\nabla[G(p_i,x)] \in L^2(\Omega_T)$, $G(p_i,x) \in L^\infty(\Omega_T)$ und $\partial_t C \in L^1(\Omega_T)$ gelten. Da die p_i's beschränkt sind, müssen wir nur noch zeigen, dass

$$\nabla[G(p_i,x)] \in L^2(\Omega_T) \text{ und } \partial_t C \in L^1(\Omega_T). \tag{8.4}$$

Da G lipschitzstetig ist, kann man ∇G durch eine Konstante beschränken. Somit folgt die erste Bedingung aus $\nabla p_i \in L^2(\Omega_T)$. Für die zweite Voraussetzung schreiben wir

$$\frac{G(p_1,x) - G(p_2,x)}{p_1 - p_2} = \int_0^1 G_p((1-s)p_1 + sp_2, x)\, ds.$$

Also

$$C_t = -\rho_t \int_0^1 G_p((1-s)p_1 + sp_2, x)\, ds - \rho \int_0^1 G_{pp}((1-s)p_1 + sp_2, x)((1-s)(p_1)_t + s(p_2)_t)\, ds.$$

Der erste Term ist integrierbar, da $\rho_t \in L^1(\Omega_T)$ und $\int_0^1 G_{pp}((1-s)p_1 + sp_2, x)\, ds$ durch die Beschränktheit der p_i's selbst beschränkt ist.

Da $(p_1)_t, (p_2)_t \geq 0$, schließen wir mit dem Satz von Fubini, dass

$$\int_{\Omega_T} |C_t| \leq M \int_{\Omega_T} [(p_1)_t + (p_2)_t] \leq 2M \sum_{i=1,2} \|p_i\|_{L^1(\Omega)},$$

wobei

$$M = \sup_{|p| \leq \max\{\|p_1\|_{L^\infty}, \|p_2\|_{L^\infty}\}, x \in \Omega} (|\partial_p G(p,x)| + |\partial_{pp} G(p,x)|).$$

Der Rest des Beweises ist analog zu dem in [PQV14]. □

9 Vergleich mit einem anderen Vorgehen

Wir vergleichen nun unser Vorgehen mit dem in [CM17] und gehen dann anhand der Ergebnisse auf die Vor- und Nachteile ein.

Zuerst beschreiben wir das Vorgehen in [CM17]. In dem Artikel wird eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \nabla \cdot (\rho \nabla p) = 4(\lambda - p)_+ \rho \\ p(1-\rho) = 0 \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ \rho(0,\cdot) = \rho_0 \end{cases} \tag{9.1}$$

mit $\lambda > 0$ gesucht. Man betrachtet ρ als Maß und zeigt, dass es ein Gradientenfluss einer Funktion ist. Um die Dichte zu erhalten, wird ähnlich wie bei uns vorgegangen. Als erstes wird eine zeitdiskrete Lösungen des Gradientenflusses definiert. Für diesen Schritt benötigt man eine Metrik in dem Raum der nicht-negativen Maße. Die Wasserstein-Metrik kann dabei nicht verwendet werden, da das Maß der Dichte über ganz Ω nicht konstant in der Zeit ist. Stattdessen benutzt man eine modifizierte Version der Wasserstein-Metrik. Anschließend wird eine in der Zeit abschnittsweise konstante Interpolation, ähnlich wie in (1.8), definiert. Zum Schluss zeigt man dann, dass diese Interpolation unter bestimmten Bedingungen eine schwache Lösung von (9.1) ist. Zu beachten ist hier, dass der Ausdruck der schwachen Lösung anders definiert ist als bei uns. (ρ, p) ist eine schwache Lösung von (9.1), wenn für alle $\phi \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$ die Funktion $t \mapsto \int_\Omega \phi(x)\, d\rho(x,t)$ wohldefiniert und absolut stetig auf $[0, +\infty)$ ist und für fast alle $t \geq 0$ gilt

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \phi(x)\, d\rho(x,t) = \int_\Omega (-\nabla\phi \nabla p(x,t) + \phi 4(\lambda - p(x,t))_+)\, d\rho(x,t). \tag{9.2}$$

Bei dem Vergleich zwischen unserem Vorgehen und dem in [CM17] fällt auf, dass man im letzteren Artikel einen Spezialfall von uns behandelt mit $s = s_\infty$, $G(z,x) = 4(\lambda - z)_+$ und $0 \leq \rho_0 \leq 1$ für alle $x \in \Omega$.

Wir erwarten für Ω, dass es glatt, beschränkt und konvex ist. Diese Anforderungen sind in [CM17] etwas schwächer. Glattheit und Konvexität wird nicht erwartet, dafür allerdings, dass Ω ein H^1-erweitertes Gebiet ist. Nach Satz 7 in [HKT08] ist dies äquivalent zu der Forderung, dass Ω lokal gleichmäßig quasikonvex ist. Wenn Ω also konvex ist, liegt insbesondere ein H^1-erweitertes Gebiet vor. Mit Satz 1 in [CM17] erhält man dann auch eine eindeutige schwache Lösung. Diese ist allerdings stärker als bei uns (Vergleiche (9.2) mit Satz 1.2 (e')). Ein weiterer Vorteil der Vorgehensweise in [CM17] ist, dass man immer noch Aussagen zur Existenz von Lösungen treffen kann, wenn Ω Löcher hat, solange es ein H^1-erweitertes Gebiet ist. Dies ist bei uns nicht möglich, weil die Konvexität dadurch verloren geht.

Bei uns ist es jedoch vorteilhaft, dass wir mit Satz 1.3 Aussagen über unsere Lösungen treffen können, die nicht in dem anderen Artikel gezeigt werden.

Zusammengefasst ist es in dem oben angesprochenen Spezialfall häufig besser wie in [CM17] vorzugehen, da man eine stärkere Lösung als bei uns bekommt und es weniger Voraussetzungen an Ω gibt. Wenn man jedoch Eigenschaften wie die Ausbreitung des Trägers der Dichtefunktion betrachten möchte, ist unsere Vorgehensweise besser geeignet. Zusätzlich haben wir, anders als in [CM17], die Möglichkeit G und s zu verändern. Also können wir allgemeinere Fälle betrachten und wir können außerdem untersuchen wie sich die Lösung verändert, wenn man beispielsweise die Wachstumsfunktion G modifiziert.

Literaturverzeichnis

[Bre91] BRENIER, Yann: Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 44 (1991), Nr. 4, 375-417. http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1002/cpa.3160440402. – DOI https://doi.org/10.1002/cpa.3160440402

[CM17] CHIZAT, Lénaïc ; MARINO, Simone D.: *A tumor growth model of Hele-Shaw type as a gradient flow.* 2017

[DPMSV16] DE PHILIPPIS, Guido ; MÉSZÁROS, Alpár R. ; SANTAMBROGIO, Filippo ; VELICHKOV, Bozhidar: BV Estimates in Optimal Transportation and Applications. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 219 (2016), Feb, Nr. 2, 829-860. http://dx.doi.org/10.1007/s00205-015-0909-3. – DOI 10.1007/s00205–015–0909–3. – ISSN 1432–0673

[EG15] EVANS, Lawrence C. ; GARIEPY, Ronald F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Edition.* Chapman and Hall/CRC, 2015. http://dx.doi.org/10.1201/b18333. http://dx.doi.org/10.1201/b18333

[Gan94] GANGBO, Wilfrid: An elementary proof of the polar factorization of vector-valued functions. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 128 (1994), Dec, Nr. 4, 381-399. http://dx.doi.org/10.1007/BF00387715. – DOI 10.1007/BF00387715. – ISSN 1432–0673

[Gan95] GANGBO, Wilfrid, Université de Metz, Habilitationsschrift, 1995

[GM96] GANGBO, Wilfrid ; MCCANN, Robert J.: The geometry of optimal transportation. In: *Acta Mathematica* 177 (1996), Sep, Nr. 2, 113-161. http://dx.doi.org/10.1007/BF02392620. – DOI 10.1007/BF02392620. – ISSN 1871–2509

[HKT08] HAJŁASZ, Piotr ; KOSKELA, Pekka ; TUOMINEN, Heli: Sobolev embeddings, extensions and measure density condition. In: *Journal of Functional Analysis* 254 (2008), Nr. 5, 1217-1234. http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.11.020. – DOI https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.11.020. – ISSN 0022–1236

[JKT20a] JACOBS, Matt ; KIM, Inwon ; TONG, Jiajun: Darcy's Law with a Source Term. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 239 (2020), Nov, Nr. 3, 1349–1393. http://dx.doi.org/10.1007/s00205-020-01595-3. – DOI 10.1007/s00205–020–01595–3. – ISSN 1432–0673

[JKT20b] JACOBS, Matt ; KIM, Inwon ; TONG, Jiajun: *The L^1-contraction principle in optimal transport.* 2020

[Per14] PERTHAME, Benoît: Some mathematical aspects of tumor growth and therapy. In: *ICM 2014 - International Congress of Mathematicians*. Seoul, South Korea, August 2014

[PQV14] PERTHAME, Benoît ; QUIRÓS, Fernando ; VÁZQUEZ, Juan L.: The Hele–Shaw Asymptotics for Mechanical Models of Tumor Growth. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 212 (2014), Apr, Nr. 1, 93-127. http://dx.doi.org/10.1007/s00205-013-0704-y. – DOI 10.1007/s00205–013–0704–y. – ISSN 1432–0673

[San15] SANTAMBROGIO, Filippo: *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Bd. 87: *Optimal Transport for Applied Mathematicians*. Birkhäuser Basel, 2015. – 353 S.

[Sim84] SIMON, Leon: *Lectures on Geometric Measure Theory.* Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, 1984

[Tie84] TIEL, J. van: *Convex Analysis: An Introductory Text.* Wiley, 1984

[Vaz07] VAZQUEZ, Juan L.: *The Porous Medium Equation.* Oxford University Press, 2007