



Eine Phasenfeldapproximation von Transportnetzwerken

A phase field approximation of transport networks

Bachelorarbeit

vorgelegt von:

Alexander Menke

Matrikelnummer: 418722

Studiengang: Mathematik EFB

Thema gestellt von:

Prof. Dr. Benedikt Wirth

Arbeit betreut durch:

Prof. Dr. Benedikt Wirth

Münster, 30. September 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Grundidee	3
1.2	Verzweigter Transport	4
1.3	Diskretes Modell	4
1.3.1	Gewichteter orientierter Graph	4
1.3.2	Energieerhaltungsgleichung	5
1.3.3	Gilbert Energie	5
1.4	Phasenfeldansatz	5
1.5	Phasenfeldmodell von Modica-Mortola	6
1.6	Γ -Konvergenz	7
1.6.1	Definition der Γ -Konvergenz	7
1.6.2	Folgen der Γ -Konvergenz	8
1.6.3	Konvergenz der Minimierer	8
1.7	Slicing	9
2	Hauptteil	11
2.1	Mathematische Formulierung des Problems	11
2.2	Schreibweisen	13
2.2.1	$BV(\Omega)$ Funktionen	13
2.3	Lokales Ergebnis	16
2.4	Ergebnis der Γ -Konvergenz	22
2.4.1	Equikoerzivitat	22
2.4.2	\liminf -Abschatzung	24
2.4.3	\limsup -Abschatzung	24
2.5	Numerische Ergebnisse	32
2.5.1	Gleichungen	32
2.5.2	Diskretisierung	33
2.6	SteinerProblemSolver	34
2.6.1	Eigene Simulation	44
3	Zusammenfassung	47

1 Einleitung

1.1 Grundidee

Die Bachelorarbeit behandelt den Artikel „A simple phase-field approximation of the Steiner problem in dimension two“ von A. Chambolle, B. Merlet und L. Ferrari, herausgegeben am 02.09.2016 ¹. Das Ziel des Artikels ist, das Steiner Problem zu lösen, welches darin besteht, zu einem gegebenen Netzwerk aus Punkten in der Ebene den kürzesten Graphen zu finden, der alle Punkte miteinander verbindet. Zur Lösung dieses Problems betrachtet man ein äquivalentes Problem des verzweigten Transports, weil zu Transportproblemen bereits Lösungsansätze bekannt sind.

Das Ziel bei solchen Transportproblemen ist, einen optimalen Transportplan in Form eines Vektormaßes zu finden, das eine fest gegebene Energie beziehungsweise die Kosten des Transports minimiert. Im Folgenden wird für die Kosten des Transports „Energie“ geschrieben, und der optimale Transportplan wird durch das Vektormaß σ dargestellt, welches die gegebene Energie \mathcal{E}_α minimiert. Da man die topologischen Eigenschaften von σ vorab nicht kennt und man erwartet, dass σ singulär ist, approximiert man die Transportenergie durch Funktionale \mathcal{F}_ε . Diese Funktionale basieren auf dem Ambrosio-Tortorelli-Funktional und sind in der Praxis einfacher zu optimieren. Für die Approximation \mathcal{F}_ε wird später Equikoerzivität und Γ -Konvergenz gegen die zu minimierende Energie \mathcal{E}_α für $\varepsilon \rightarrow 0$ bewiesen. Hieraus folgt dann, wie man später sieht, dass die Minimierer σ_ε zu den Funktionalen \mathcal{F}_ε für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen den Minimierer σ der ursprünglich zu optimierenden Energie \mathcal{E}_α konvergieren. Auf diese Weise kann man durch Berechnung der σ_ε das gesuchte σ finden.

Im Fall zur Lösung des Steiner Problems betrachtet man $N + 1$ verschiedene Punkte x_0, \dots, x_N im \mathbb{R}^2 . Ein beliebiger Punkt x_0 stellt eine Quelle dar und die anderen N Punkte sind Ziele, zu denen die Masse aus der Quelle transportiert werden soll. Durch diesen Aufbau mit nur einer Quelle erreicht man, dass wirklich alle Punkte miteinander verbunden werden und nicht zwei oder mehr unabhängige Graphen entstehen, weil alle Punkte mit x_0 verbunden sein müssen.

Durch die Hilfsfunktion ϕ , die die Energie erhöht, wenn Masse über längere Wege transportiert wird, findet man den optimalen Transportplan, der mit dem kürzesten Graphen, der alle Punkte verbindet, übereinstimmt. Also finden wir auf diesem Weg die Lösung zu dem Steiner Problem.

¹[2]

1.2 Verzweigter Transport

Der verzweigte Transport beschreibt im Allgemeinen Transportprobleme, bei denen die Kostenfunktion durch $\sum_i l_i m_i^\alpha$ gegeben ist. Die Kosten hängen von der transportierten Masse m und der Distanz l ab, über welche die Masse transportiert werden soll. Die Masseverteilungen der Quellen und Ziele sind in Form von Maßen vorab gegeben und man sucht den Transportplan, zu dem die Kosten minimal sind.

Die Kostenfunktion $\sum_i l_i m_i^\alpha$ ist bei dem verzweigten Transport proportional zu der Distanz. Das bedeutet, dass für den Transport einer festen Masse über die x -fache Distanz die x -fachen Kosten anfallen. Weiterhin ist die Kostenfunktion in Abhängigkeit von der bewegten Masse, wie im folgenden bei m^α mit $0 < \alpha < 1$, konkav. Das heißt, dass es kostengünstiger ist, Masse zu sammeln, zusammen zu transportieren und dann an die Ziele zu verteilen. Aufgrund dieser Eigenschaft nennt man den entstehenden Transportplan „verzweigt“.

Für $\alpha = 0$ erhalten wir das Steiner Problem, welches unabhängig von der Masse die minimale Distanz eines Transportnetzes sucht. Die Energie zum Steiner Problem ist dann gegeben durch $\sum_i l_i$, also durch die Summe der einzelnen Längen. Allerdings wird in der Praxis $\alpha > 0$ benötigt, wie man später in dem Beweis der Equikoerzivität sieht.

In unserem Fall wird die Energie durch eine lineare Kostenfunktion ausgedrückt und nicht durch eine konkave. Allerdings wird durch die Definition von \mathcal{F}_ε mit der Hilfsfunktion ϕ auch ein verzweigter Transportplan gefunden, da ϕ in der Definition von \mathcal{F}_ε dafür sorgt, dass der Transportplan so kurz wie möglich sein muss.²

1.3 Diskretes Modell

Im diskreten Modell sind die Quellen durch das Vektormaß $\mu = \sum_{i=1}^m a_i \delta_{x_i}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ und die Ziele durch das Vektormaß $\nu = \sum_{j=1}^n b_j \delta_{y_j}$ mit $b_j \in \mathbb{R}$ in einer kompakten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gegeben. Hierbei ist δ_y das Dirac-Maß im Punkt y . Man versucht, diese beiden Maße durch einen gewichteten orientierten Graph zu verbinden.

1.3.1 Gewichteter orientierter Graph

Ein gewichteter orientierter Graph in \mathbb{R}^d ist gegeben durch ein System $G = (s_k, \theta_k)_k$. Hierbei sind s_k Paare von Punkten (p_k, q_k) , die ein orientiertes Segment beschreiben, und $\theta_k \in \mathbb{R}_+$ ist das Gewicht, das dem Segment s_k zugeordnet wird. Wir schreiben $\hat{s}_k = \frac{q_k - p_k}{|q_k - p_k|}$ für die Richtung des Segments s_k und $|s_k| = |q_k - p_k|$ für die Länge.

²Vergleiche zu diesem Kapitel [3].

1.3.2 Energieerhaltungsgleichung

Wir sagen, dass G ν aus μ irrigiert, und schreiben hierfür $G \in \mathcal{G}(\mu, \nu)$, wenn für jeden Knoten des Graphen gilt, dass die hereinströmende gleich der herausströmenden Masse ist. Die hereinströmende Masse in x_i ist gegeben durch $\sum_{\{k:\exists s_k \text{ mit } q_k=x_i\}} \theta_k + a_i$ und die herausströmende Masse von x_j durch $\sum_{\{k:\exists s_k \text{ mit } q_k=x_j\}} \theta_k + b_j$.

1.3.3 Gilbert Energie

Für $\alpha \in (0, 1)$ sind die Kosten für die α -Entwicklung eines Graphen G , auch bekannt als Gilbert Energie, durch

$$\mathcal{E}_\alpha(G) = \sum_{k=1}^n \theta_k^\alpha |s_k|$$

gegeben.

Also addieren wir die Kosten auf den einzelnen Segmenten. Diese sind gegeben durch das Produkt der Masse hoch α , die über das Segment transportiert wird, mit der Länge des Segments.

Mit gegebenen diskreten Maßen μ und ν soll diese Energie minimiert werden:

$$\min\{\mathcal{E}_\alpha(G) : G \in \mathcal{G}(\mu, \nu)\}.$$

Dies sind nun die optimalen Transportkosten im diskreten Fall, die benötigt werden, um von μ zu ν zu gelangen.

Das diskrete Modell ist interessant zu betrachten, da es gut verständlich ist und hier wie bei unserer später zu approximierenden Zielenergie \mathcal{E}_α Masse auf einzelnen \mathcal{H}^1 messbaren Mengen beziehungsweise Segmenten betrachtet wird.

In unserem Fall betrachten wir ein Maß, welches bei x_0 den positiven Wert $N \in \mathbb{N}$ besitzt und an den anderen N Punkten die negativen Werte -1 . Durch den Transportplan soll die Masse dann so transportiert werden, dass die Werte später überall 0 sind.³

1.4 Phasefeldansatz

Der Phasefeldansatz ist eine numerische Methode, um Prozesse aus der Physik oder anderen Naturwissenschaften durch verschiedene Phasen und Phasenübergänge zu simulieren. Man betrachtet eine sogenannte Phasefeldfunktion, die von einem Parameter ε abhängt und verschiedene Phasen bildet. Dann versucht man das Verhalten dieser Phasen vorherzusehen, um ein mögliches Gleichgewicht durch die Lösung eines einfacheren Problems approximieren zu

³Vergleiche [4].

1 Einleitung

können. So ein Gleichgewicht erhält man, indem man den Minimierer zu einer gegebenen Energie berechnet. Meistens geschieht dies unter weiteren Einschränkungen und Bedingungen, die unnatürliche Vorgänge ausschließen sollen, wie zum Beispiel der Massebedingung, die sicherstellt, dass keine Masse hinzukommt oder verschwindet.

Bei der Lösung des Steiner Problems approximiert man ein Minimierungsproblem, welches nicht von ε abhängt, durch eines, das ε als Parameter enthält.

Als ein Beispiel kann man die Konzentration einer homogenen isothermischen Flüssigkeit in einem beschränkten Bereich $\Omega \in \mathbb{R}^2$ betrachten. Wir nehmen an, dass die Konzentration durch eine Funktion $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$ dargestellt werden kann. Dann wird ein entstehendes Gleichgewicht durch die Minimierung der Energie $E(u)$ unter der Voraussetzung von gleichbleibender Masse $C \in \mathbb{R}$ berechnet:

$$\min\{E(u) : u : \Omega \rightarrow [0, 1], \int_{\Omega} u dx = C\}.$$

Beim Phasenfeldansatz wird die Energie durch Funktionen der Form $E(u) = \int_{\Omega} W(u) dx$ beschrieben, wobei $W : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die Energiedichte darstellt. Um das Problem besser erklären zu können, ändert man diese Energiedichte zu $W'(u) = W(u) + c_1 u + c_2$, mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dies hat keinen Effekt auf das Minimierungsproblem, da nur der konstante Term $\int_{\Omega} (c_1 u + c_2) dx = c_1 C + c_2 |\Omega|$ zu der Energie $E(u)$ hinzugefügt wird und der Minimierer der ursprünglichen Energie so auch der Minimierer der geänderten Energie ist. Die Konstanten c_1 und c_2 sollen im Folgenden so gewählt werden, dass $W'(u)$ nicht-negativ ist und genau zwei Nullstellen bei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ hat. Nun ist offensichtlich, dass die Energie von allen Funktionen minimiert wird, die nur die Werte α und β annehmen und die Massebedingung erfüllen. Da in solchen Gleichgewichtsproblemen die Phasenübergänge meist regulär sind, ergänzt man einen weiteren Term in der Energie, der die Ableitung von u enthält, und fügt einen weiteren Parameter $\varepsilon > 0$ ein, um irreguläre Phasenübergänge auszuschließen. Nun erhalten wir als Minimierungsproblem:

$$\min \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{W(u)}{\varepsilon} + \varepsilon |Du| \right) dx : \int_{\Omega} u dx = C \right\}.$$

4

1.5 Phasenfeldmodell von Modica-Mortola

Bei dem Phasenfeldansatz von Modica-Mortola betrachtet man Probleme der Form $\min \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int W(u) dx + \varepsilon \int |Du|^2 dx \right\}$ wie oben. W hat hierbei Nullstellen

⁴Dieses Kapitel basiert auf [1] S.1-7.

bei $\alpha = 0$ und $\beta = 1$. Durch verschiedene Berechnungen hat man herausgefunden, dass dieses Problem für $\varepsilon \rightarrow 0$ mit dem folgenden Problem approximiert werden kann:

$$\min \left\{ \text{Per}(\{u = \alpha\}, \Omega) : u : \Omega \rightarrow \{\alpha, \beta\}, \int_{\Omega} u dx = C \right\}.$$

$\text{Per}(A, \Omega)$ bezeichnet hier den Umfang der Menge A in dem Gebiet Ω . Hier wird klar, warum das Steiner Problem mit Hilfe des Phasenfeldes approximiert wird, denn der Umfang der Menge, über die Masse transportiert wird, ist die Länge des Graphen, der alle Punkte verbindet. Damit stimmt die Minimierung der Phasenfeldenergie zu dem verzweigten Transportproblem mit der Minimierung der Länge des Transportnetzwerkes und so mit dem Finden des kürzesten Graphen überein.⁵

1.6 Γ -Konvergenz

Nun definieren wir die Γ -Konvergenz, mit welcher wir später Aussagen über die Minimierer σ_{ε} der approximierten Kosten und den Minimierer σ der Kosten \mathcal{E}_{α} treffen können. Die Minimierer sind die Vektormäße, welche unsere Transportpläne darstellen.⁶

1.6.1 Definition der Γ -Konvergenz

Definition 1.1

In einem metrischen Raum X sei $f_j : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine Funktionsfolge. Wir definieren die beiden unterhalb stetigen Funktionen f^- und f^+ durch

$$f^-(x) = \Gamma - \liminf_j(x) := \inf \{ \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x_j) : x_j \rightarrow x \},$$

$$f^+(x) = \Gamma - \limsup_j(x) := \inf \{ \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j(x_j) : x_j \rightarrow x \}.$$

Wenn f^+ und f^- übereinstimmen, dann sagt man, dass f_j gegen $f_{\infty} = \Gamma - \lim_j := f^+ = f^-$ Γ -konvergiert.

Alternativ kann man auch schreiben:

$$\forall x_j \rightarrow x \text{ gilt } \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x_j) \geq f(x),$$

$$\forall x_j \rightarrow x \text{ gilt } \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j(x_j) \leq f(x).$$

Denn dann folgt

$$f(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x_j) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j(x_j) \leq f(x)$$

⁵Vergleiche [3].

⁶Die folgenden Definitionen, die Proposition und das Theorem sind [1] S.22,28 und 29 entnommen.

1 Einleitung

und damit gilt Gleichheit. Weiter kann man die *limsup*-Abschätzung umschreiben zu

$$\forall x \exists x_j \text{ mit } x_j \rightarrow x \text{ und } f(x) = \lim_j f_j(x_j).$$

So eine Folge nennen wir Wiederherstellungsfolge von x .

1.6.2 Folgen der Γ -Konvergenz

Aus der Definition von Γ -Konvergenz kann man folgern, dass aus Γ -Konvergenz bezüglich des stetigen Parameters $j \rightarrow 0$ die Konvergenz gegen denselben Grenzwert bezüglich jeder Teilfolge $j_k \rightarrow 0$ folgt, denn es gilt

$$\begin{aligned} \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x_j) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f_{j_k}(x_{j_k}), \\ \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j(x_j) &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} f_{j_k}(x_{j_k}). \end{aligned}$$

Einsetzen liefert die Behauptung.

Also kann man bei der Berechnung ε durch eine andere Nullfolge ersetzen. Dies wird benötigt, da man bei der Berechnung ε nicht stetig gegen 0 gehen lassen kann, sondern einfach kleiner werdende ε betrachtet.

1.6.3 Konvergenz der Minimierer

Proposition 1.2

Seien $f_j, f_\infty : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ Funktionen.

- (i) Wenn die *lim inf*-Abschätzung für alle $x \in X$ gilt und $K \subset X$ eine kompakte Menge ist, gilt

$$\inf_K f_\infty \leq \liminf_j \inf_K f_j;$$

- (ii) Wenn die *lim sup*-Abschätzung für alle $x \in X$ gilt und $U \subset X$ eine offene Menge ist, gilt

$$\inf_U f_\infty \geq \limsup_j \inf_U f_j.$$

Beweis

(i) Sei (\tilde{x}_j) so, dass $\liminf_j \inf_K f_j = \liminf_j f_j(\tilde{x}_j)$. Nach dem Extrahieren einer Teilfolge erhält man (\tilde{x}_{j_k}) , sodass

$$\lim_k f_{j_k}(\tilde{x}_{j_k}) = \liminf_j \inf_K f_j, \text{ und } x_{j_k} \rightarrow \bar{x} \in K.$$

$$\text{Wenn } x_j = \begin{cases} \tilde{x}_{j_k} & \text{wenn } j = j_k \\ \bar{x} & \text{wenn } j \neq j_k \text{ für alle } k, \end{cases}$$

dann gilt wie gefordert

$$\inf_K f_\infty \leq f_\infty(\bar{x}) \leq \liminf_j f_j(x_j) \leq \liminf_k f_{j_k}(x_{j_k}) = \lim_k f_{j_k}(\tilde{x}_{j_k}) = \liminf_j \inf_K f_j.$$

(ii) Mit fixiertem $\delta > 0$, sei $x \in U$, sodass $f_\infty(x) \leq \inf_U f_\infty + \delta$. Dann, wenn (x_j) eine Wiederherstellungssequenz für x ist, gilt

$$\inf_U f_\infty + \delta \geq f_\infty(x) \geq \limsup_j f_j(x_j) \geq \limsup_j \inf_U f_j,$$

und die Behauptung folgt mit der Willkürlichkeit von δ .

Definition 1.3

Eine Funktion $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ist koerziv, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, dass die Menge $\{f \leq t\}$ präkompakt ist, das heißt wenn der Abschluss dieser Menge kompakt ist. Eine Funktion $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt leichtkoerziv, wenn eine nicht-leere kompakte Menge $K \subset X$ existiert, sodass $\inf_X f = \inf_K f$ ist. Eine Folge (f_j) heißt equi-leicht koerziv, wenn eine nicht-leere kompakte Menge $K \subset X$ existiert, sodass $\inf_X f_j = \inf_K f_j$ für alle j gilt.

Theorem 1.4

Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei (f_j) eine Folge von equi-leicht koerziven Funktionen auf X , und sei $f_\infty = \Gamma - \lim_j f_j$; dann gilt

$$\exists \min_X f_\infty = \lim_j \inf_X f_j.$$

Außerdem, wenn (x_j) eine präkompakte Folge ist, sodass $\lim_j f_j(x_j) = \lim_j \inf_X f_j$, dann ist jeder Grenzwert einer Teilfolge von (x_j) ein Minimierer von f_∞ .

Beweis

Der Beweis folgt dem von Proposition 1.2. Wenn \bar{x} wie in dem Beweis von Proposition 1.2 ist, folgt mit der Proposition 1.2, der Definition 1.3 der Equikoerzivität mit $U = X$ sowie der equi-leichten Koerzivität

$$\inf_X f_\infty \leq \inf_K f_\infty \leq f_\infty(\bar{x}) \leq \liminf_j \inf_K f_j \leq \liminf_j \inf_X f_j \leq \limsup_j \inf_X f_j \leq \inf_X f_\infty.$$

Hiermit ist nun bewiesen, dass die Minimierer σ_ϵ der approximierten Energie auch wirklich gegen den Minimierer σ der zu minimierenden Energie konvergieren.

1.7 Slicing

Mithilfe des Slicing teilt man später die Funktion u auf mehrere Scheiben auf. Auf diesen einzelnen Scheiben findet man dann die unteren Abschätzungen der

1 Einleitung

Energie für die Γ -Konvergenz. Durch Integrieren über ein ganzes Segment und Anwenden des Satzes von Fubini erhält man die gesuchte untere Abschätzung.

Sei $\xi \in S^{d-1}$ und sei

$$\Pi_\xi := \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, \xi \rangle = 0\}$$

mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im \mathbb{R}^d .

Wenn $y \in \Pi_\xi$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, definiert man die Scheibe

$$\Omega_{\xi,y} := \{t \in \mathbb{R} : y + t\xi \in \Omega\}.$$

Für $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, wird $u_{\xi,y} : \Omega_{\xi,y} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$u_{\xi,y}(t) := u(y + t\xi), \quad t \in \Omega_{\xi,y}$$

definiert.⁷

⁷Siehe hierzu [2]

2 Hauptteil

2.1 Mathematische Formulierung des Problems

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei eine konvexe zusammenhängende offene Menge. Es werden im Folgenden Maße $\sigma \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ gegeben durch $\sigma = \theta \xi \cdot \mathcal{H}^1|_M$ betrachtet. $\mathcal{M}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ sind die Maße von $\bar{\Omega}$ nach \mathbb{R}^2 und \mathcal{H}^1 ist das 1-dimensionale Hausdorff-Maß, mit dem man auch im \mathbb{R}^2 über die 1-dimensionale rektifizierbare Menge M integrieren kann. Die Richtung, in die Masse transportiert wird, wird durch $\xi : M \rightarrow S^1$ mit dem Einheitskreis S^1 im \mathbb{R}^2 dargestellt, also einem Vektor (v_1, v_2) mit Länge 1. $\theta : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist in der obigen Definition eine Borel-messbare Funktion, die die Multiplizität, also die transportierte Masse, darstellt. Diese Maße werden rektifizierbare Vektormäße genannt und man schreibt hierfür $\sigma = U(M, \theta, \xi)$.

Als einfaches Beispiel zum besseren Verständnis kann man den Weg zwischen zwei Punkten $x, y \in \Omega$ betrachten. Dieser sei definiert durch $r(t) := x + t \frac{y-x}{|x-y|}$ für $t \in [0, |x-y|]$. Ein zugehöriges Maß $\gamma \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ist gegeben durch

$$(\phi, \gamma) := \int \langle \phi(r(t)), \dot{r}(t) \rangle dt \text{ für jedes } \phi \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2).$$

Dann erhält man $\gamma = U([x, y], 1, \xi)$ mit $\xi = \frac{y-x}{|y-x|}$. Man hat also das eindimensionale Segment $[x, y]$, auf dem die Masse 1 in Richtung ξ transportiert wird. Außerdem sieht man leicht, dass $\nabla \cdot \gamma = \delta_x - \delta_y$ ist. Auf dieselbe Weise finden wir Maße, die die Bedingungen erfüllen, indem wir r durch einen beliebigen Lipschitz-Weg zwischen x und y ersetzen (Vgl. [2]).

Für eine gegebene Kostenfunktion $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ führt man das auf $M(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ definierte Funktional $\mathcal{E}_f(\sigma)$ ein als

$$\mathcal{E}_f(\sigma) = \begin{cases} \int_M f(\theta) d\mathcal{H}^1 & \text{wenn } \sigma = U(M, \theta, \xi), \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies ist im Folgenden die zu minimierende Energie. Wenn σ kein rektifizierbares Vektormäß ist, wird die Energie auf $+\infty$ gesetzt, also kann die Energie für solch ein σ nicht minimal werden und es sind nur rektifizierbare Vektormäße zulässig. Falls σ rektifizierbar ist, wird die Energie berechnet, indem man die Kostenfunktion auf die Masse anwendet, die transportiert wird, und bezüglich des Hausdorff-Maßes über die 1-dimensionale Menge M integriert.

Nun werden, wie in der Einleitung schon angemerkt, $N + 1$ verschiedene Punkte $S = (x_0, \dots, x_N) \in \Omega^{N+1}$ betrachtet, wobei in x_0 die Quelle ist und

2 Hauptteil

die anderen x_i die Ziele darstellen. Die Minimierung von $\mathcal{E}_f(\sigma)$ soll dann die folgende Energieerhaltungsgleichung erfüllen:

$$\nabla \cdot \sigma = N\delta_{x_0} - \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2). \quad (2.1)$$

Der Gradient von σ soll also erfüllen, dass genau die Masse aus der Quelle an die Ziele verteilt wird und keine Masse hinzukommt oder verloren geht.

Da die σ_ε nicht-singulär sein sollen, können sie auch die obige Energieerhaltungsgleichung (2.1) nicht erfüllen. Deshalb wird nun eine Glättung der Energieerhaltungsgleichung durchgeführt. Hierzu sei $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$ ein klassischer radialer Glättungskern mit $\text{supp } \rho \subset B_1(0)$ und $\int \rho = 1$. Für $\varepsilon \in (0, 1]$ setzt man $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}\rho(\varepsilon^{-1}x)$ und definiert den Raum $V_\varepsilon(\Omega)$ der quadratisch integrierbaren Vektorfelder, deren schwache Ableitungen die folgende Bedingung erfüllen:

$$\nabla \cdot \sigma_\varepsilon = \left(N\delta_{x_0} - \sum_{j=1}^N \delta_{x_j} \right) * \rho_\varepsilon. \quad (2.2)$$

Für $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, bezeichnet man

$$W_\varepsilon(\Omega) = \{ \phi \in H^1(\Omega) : \eta \leq \phi \leq 1 \text{ in } \Omega, \phi \equiv 1 \text{ auf } \partial\Omega \}.$$

Dann wird die Energie $\mathcal{F}_\varepsilon : \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^1(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ definiert durch

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma, \phi) := \begin{cases} \int_\Omega \frac{1}{2\varepsilon} \phi^2 |\sigma|^2 dx + \int_\Omega \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{(1-\phi)^2}{2\varepsilon} dx, & \text{wenn } (\sigma, \phi) \in V_\varepsilon(\Omega) \times W_\varepsilon(\Omega), \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Das erste Integral in der Energie nennt man die Bedingungskomponente und den zweiten Teil Modica-Mortola-Komponente.

Als Auswirkungen dieser Definition auf das Minimierungsproblem lässt sich feststellen, dass σ gezwungen wird, auf einer Menge, die S verbindet, nicht 0 zu sein, weil $\sigma \in V_\varepsilon(\Omega)$ sein soll. In der Bedingungskomponente wird $\phi^2 |\sigma|^2$ durch $\frac{1}{2\varepsilon}$ stärker gewichtet, sodass ϕ dort klein sein muss, wo $|\sigma|$ groß ist. Weiterhin wird das Verhalten von ϕ durch den Modica-Mortola-Term kontrolliert, welcher ϕ dazu zwingt, für $\varepsilon \rightarrow 0$ außerhalb von einer eindimensionalen Menge nahe bei 1 zu sein. Als Konsequenz wird erwartet, dass der Support von σ und die Energie auf einer eindimensionalen Menge konzentriert sind. Weiterhin führt die Definition des Raumes $W_\varepsilon(\Omega)$ und von η dazu, dass überall $\phi > 0$ gilt und dass dementsprechend σ nirgendwo ∞ werden kann. Ab jetzt wird angenommen, dass ein $\alpha \geq 0$ existiert, sodass

$$\frac{\eta}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \alpha. \quad (2.4)$$

Der Einfachheit halber wird später $\eta = \varepsilon\alpha$ gewählt. Die Konvergenz wird später verwendet, um die Energie nach unten abzuschätzen, denn mit $\phi \in W_\varepsilon(\Omega)$ folgt, dass $\frac{\phi}{\varepsilon} \geq \frac{\eta}{\varepsilon} \rightarrow \alpha$ für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Mit $\mathcal{M}_S(\bar{\Omega})$ wird die Menge der \mathbb{R}^2 -wertigen Maße $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit Support in $\bar{\Omega}$ bezeichnet, die die Energieerhaltungsgleichung erfüllen.

Die Grenzwert-Energie $\mathcal{E}_\alpha : \mathcal{M}_S(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2) \times L^1(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ wird somit definiert durch

$$\mathcal{E}_\alpha(\sigma, \phi) = \begin{cases} \int_M (1 + \alpha\theta) d\mathcal{H}^1 & \text{wenn } \phi \equiv 1, \sigma \in \mathcal{M}_S(\bar{\Omega}) \text{ und } \sigma = U(M, \theta, \xi), \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Nun beginnen wir damit, die Vektorfelder σ_ε durch die Phasenfeldfunktionen u_ε zu approximieren. Hierbei wird benötigt, dass man die Vektorfelder σ_ε lokal als rotierte Gradienten der Funktionen u_ε schreiben kann. Deshalb wird in dem Artikel in Dimension 2 gearbeitet und der Operator \perp eingeführt. Dieser schickt einen Vektor $v = (v_1, v_2)$ auf den Vektor $v^\perp = (-v_2, v_1)$, den man durch Drehen um 90° gegen den Uhrzeigersinn erhält. So werden divergenzfremde \mathbb{R}^2 -Maße auf rotationsfreie \mathbb{R}^2 -Maße geschickt.

Später wird gezeigt, dass die u_ε stückweise konstant sind. Die Sprünge zwischen den Phasen bei u_ε charakterisieren dann, wo der Fluss der Vektorfelder σ_ε verläuft, und die Höhe der Sprünge zeigt an, wie viel Masse dort fließt.

Für diesen Zusammenhang führen wir folgende Funktionenräume ein¹:

2.2 Schreibweisen

2.2.1 BV(Ω) Funktionen

Im Folgenden sei $BV(\Omega)$ der Raum der Funktionen $u \in L^1(\Omega)$, die als Ableitung ein Maß mit endlicher totaler Varianz (bounded variation) haben. Für $u \in BV(\Omega)$ wird mit S_u das Komplement der Lebesgue-Menge von u bezeichnet. Also ist $x \notin S_u$ genau dann, wenn

$$\lim_{\rho \downarrow 0^+} \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - z| dy = 0$$

für ein $z \in \mathbb{R}$. Als approximierte Sprungpunkte von u werden x bezeichnet, wenn ein $\xi \in S^{d-1}$ und unterschiedliche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{|B_\rho^+(x, \xi)|} \int_{B_\rho^+(x, \xi)} |u(y) - a| dy = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{|B_\rho^-(x, \xi)|} \int_{B_\rho^-(x, \xi)} |u(y) - b| dy = 0,$$

wobei $B_\rho^\pm(x, \xi) := \{y \in B_\rho(x) : \langle y - x, \xi \rangle \geq 0\}$. Bis auf eine Vertauschung von a und b und ein Tausch des Zeichens ξ charakterisiert dies das Triplet (a, b, ξ) , welches dann mit (u^+, u^-, ν_u) bezeichnet wird. Für die Menge der approximierten Sprungpunkte wird J_u geschrieben.

¹Vergleiche zu diesem Kapitel [2].

2 Hauptteil

Theorem 2.1

Die Menge S_u ist abzählbar \mathcal{H}^{d-1} -rektifizierbar und $\mathcal{H}^{d-1}(S_u \setminus J_u) = 0$. Weiterhin gilt $Du|_{J_u} = (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{d-1}|_{J_u}$ und $Tan^{d-1}(J_u, x) = \nu_u(x)$ für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in J_u$.

$Tan^{d-1}(J_u, x)$ ist hierbei die $d-1$ -dimensionale Tangentialebene zu J_u im Punkt x , diese stimmt mit ν_u , also der Richtung des Massetransports, überein. Außerdem sieht man hier, dass die Definitionen von S_u und J_u für das Grundproblem äquivalent sind. Das heißt, dass die Punkte, an denen u nicht lokal-konstant ist, mit den Punkten, an denen u von a nach b springt, übereinstimmen.

Man schreibt die Lebesgue-Zerlegung des Maßes Du in ein singuläres und ein absolut stetiges Maß als $Du = \nabla u dx + D^s u$. Wenn man nun $D^c u = D^s u|_{(\Omega \setminus S_u)}$ setzt, erhält man die Zerlegung

$$Du = \nabla u dx + (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{d-1}|_{J_u} + D^c u.$$

Weiterhin ist der Cantor-Teil so, dass, wenn $\mathcal{H}^{d-1}(E) < \infty$ gilt, man $|D^c u|(E) = 0$ erhält. Also bekommt man die folgende hilfreiche Konsequenz:

$$\mathcal{H}^{d-1}(E) = 0 \Rightarrow |Du|(E) = 0. \quad (2.6)$$

Als Notation für die Sprungfunktion $(u^+ - u^-) : J_u \rightarrow \mathbb{R}$ wird $[u]$ benutzt. Man definiert

$$SBV(\Omega) := \{u \in BV(\Omega) : D^c u = 0\},$$

sowie

$$GSBV(\Omega) := \{u \in L^1(\Omega) : \max(-T, \min(u, T)) \in SBV(\Omega) \forall T \in \mathbb{R}\}.$$

Die nun folgende Definition eines Raumes von stückweise konstanten Funktionen wird später noch nützlich sein:

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{u \in GSBV(\Omega) : \nabla u = 0\}.$$

Theorem 2.2

Sei $u \in GSBV(\Omega)$, dann erhält man für alle $\xi \in S^{d-1}$

$$u_{\xi, y} \in GSBV(\Omega_{\xi, y}) \text{ für } \mathcal{H}^{d-1} \text{ fast alle } y \in \Pi_{\xi}.$$

Außerdem erhält man für so ein y

$$u'_{\xi, y}(t) = \langle \nabla u(y + t\xi), \xi \rangle \text{ für fast alle } t \in \Omega_{\xi, y},$$

$$J_{u_{\xi, y}} = \{t \in \mathbb{R} : y + t\xi \in J_u\},$$

und

$$u_{\xi, y}(t^{\pm}) = u^{\pm}(y + t\xi) \text{ oder } u_{\xi, y}(t^{\pm}) = u^{\mp}(y + t\xi),$$

je nachdem ob $\langle \nu_u, \xi \rangle > 0$ oder $\langle \nu_u, \xi \rangle < 0$. Als letztes gilt für jede Borel-Funktion $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dass

$$\int_{\Pi_\xi} \sum_{t \in J_{u_{\xi,y}}} g_{\xi,y}(t) d\mathcal{H}^{d-1}(y) = \int_{J_u} g |\langle \nu_u, \xi \rangle| d\mathcal{H}^{d-1}. \quad (2.7)$$

Umgekehrt, wenn $u \in L^1(\Omega)$ und wenn $u_{\xi,y} \in SBV(\Omega_{\xi,y})$ und

$$\int_{\Pi_\xi} |Du_{\xi,y}|(\Omega_{\xi,y}) d\mathcal{H}^{d-1}(y) < +\infty$$

für alle $\xi \in \{e_1, \dots, e_d\}$ und fast alle $y \in \Pi_\xi$ gilt, erhält man $u \in SBV(\Omega)$.

Um im Folgenden die Energierhaltungsgleichung nicht mehr mitziehen zu müssen, wird das folgende Lemma eingeführt. Es wird ein künstliches Maß γ eingeführt, welches Masse aus den Zielen zu der Quelle transportiert und so die Energierhaltungsgleichung auflöst. Außerdem ist es später für die Triangulierung des Gebietes wichtig, dass man eine Partition finden kann, wo der Fluss auf den Rändern der Partition gleich 0 ist, also $\mathcal{H}^1(M \cap \cup_i \partial\Omega_i) = 0$.

Lemma 2.3

Sei $S = (x_0, \dots, x_N) \in \Omega^{N+1}$ eine Folge von $N + 1$ unterschiedlichen Punkten gegeben, dann existiert ein Vektormaß $\gamma = U(M_\gamma, \theta_\gamma, \xi_\gamma)$ und eine endliche Partition $(\Omega_i) \subset \mathcal{A}(\Omega)$ von Ω , sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- a) $\nabla \cdot \gamma = -N\delta_{x_0} + \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$,
- b) $\theta_\gamma : M_\gamma \rightarrow \{1, N\}$,
- c) jedes Ω_i ist ein Polyeder,
- d) $M_\gamma \subset \cup_i \partial\Omega_i$,
- e) Ω_i ist von endlichem Umfang für jedes i und $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ für $i \neq j$,
- f) $\mathcal{L}(\Omega \setminus \cup_i \Omega_i) = 0$.

Wenn M außerdem eine eindimensional messbare Menge ist, können γ und (Ω_i) so gewählt werden, dass $\mathcal{H}^1(M \cap \cup_i \partial\Omega_i) = 0$.

Beweis:

Man wählt einen Punkt $p \in \Omega \setminus S$ und konstruiert wie in dem Beispiel oben rektifizierbare Vektormäße zwischen den Punkten p und x_i für $i = 1, \dots, N$. Dann erhält man Maße γ_i mit $\nabla \cdot \gamma_i = \delta_{x_i} - \delta_p$ für $i \in \{0, \dots, N\}$. Wir definieren

$$\gamma = -N\gamma_0 + \sum_{i=1}^N \gamma_i.$$

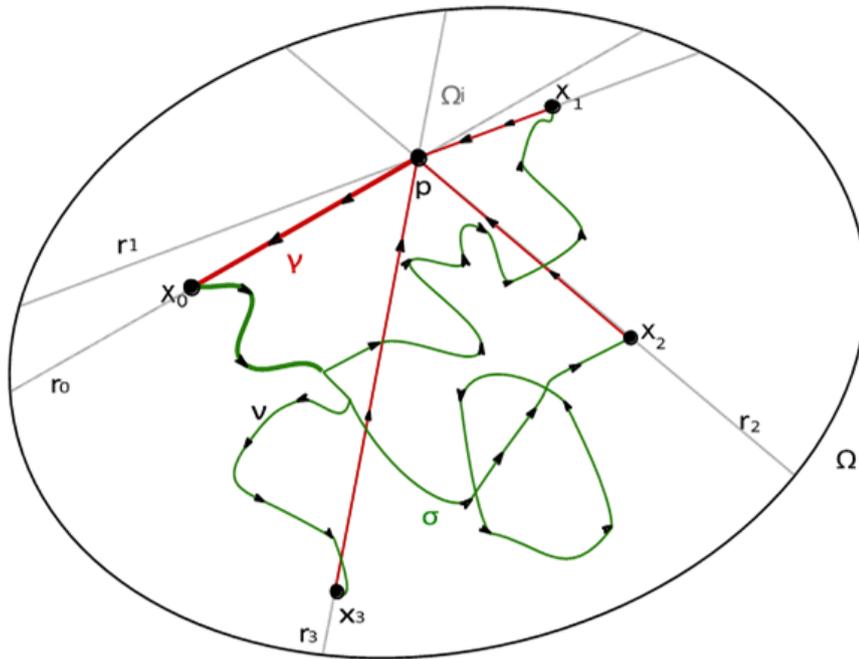


Abbildung 2.1: Beispiel der Konstruktion des \mathcal{H}^1 -rektifizierbaren Maßes γ (rot) und der Partition $\{\Omega_i\}$ (grau) in dem Fall, das σ (grün) ein \mathcal{H}^1 -rektifizierbares Vektormass ist. Siehe [2].

Durch diese Konstruktion wird a) erfüllt, wie man durch Einsetzen der γ_i sieht. Außerdem kann man bis auf eine kleine Verschiebung von p annehmen, dass $[p, x_i] \cap [p, x_j] = \{p\}$ ist, sodass b) erfüllt wird, denn zwischen x_0 und p fließt dann Masse N und ansonsten Masse 1. D_j sei die gerade Linie zwischen p und x_j . Man definiert die Mengen (Ω_i) als die zusammenhängenden Komponenten von $\Omega \setminus (D_0 \cup \dots \cup D_N)$. Dann sieht man, dass c), d), e), f) erfüllt werden.²

2.3 Lokales Ergebnis

³ Nun wird zunächst eine Lokalisation der Funktionale $(\mathcal{F}_\varepsilon)$ durchgeführt. Für diese wird anschließend eine untere Abschätzung gefunden und eine Kompaktheitseigenschaft gezeigt, die in den Beweisen von den Theoremen 2.6 und 2.7 verwendet werden.

Hierzu werden folgende Schreibweisen benutzt: $\Omega \subset\subset \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ sind beschränkte offene konvexe Mengen. Für $X \subset \mathbb{R}^d$ bezeichnet $\mathcal{A}(X)$ die Klasse aller offenen Untermengen von X und $\mathcal{A}_S(X)$ die Klasse aller einfach zusammenhängenden Mengen $O \subset X$ mit $\bar{O} \cap S = \emptyset$. Zur Erinnerung: S war die Menge der Punkte x_0, \dots, x_N .

²Vergleiche zu obigem Vorgehen [2].

³Zu der Lokalisierung und Ihren Ergebnissen siehe [2].

Für $O \in \mathcal{A}(\Omega)$ erhält man durch Ersetzen von Ω durch O in der Definition von \mathcal{F}_ε das Funktional $\mathcal{F}_\varepsilon(\cdot, \cdot; O)$. Genauso wird die lokale Version $\mathcal{E}_\alpha(\cdot, \cdot; O)$ von \mathcal{E}_α definiert.

Sei nun also $O \in \mathcal{A}_S(\Omega)$. Für $u_\varepsilon \in H^1(O)$ und $\phi_\varepsilon \in H^1(O)$ wird

$$\mathcal{LF}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; O) := \mathcal{F}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; O).$$

Man sieht leicht, dass $\nabla \cdot \sigma_\varepsilon \equiv 0$ in O für $\varepsilon < d(O, S)$ und dass $\sigma_\varepsilon \in V_\varepsilon(\Omega)$ gilt. Hierbei stellt $d(O, S)$ die kleinste Distanz zwischen den Mengen O und S dar. $\nabla \cdot \sigma \equiv 0$ gilt in O , da σ_ε nur in einer ε -Umgebung um S herum nicht konstant ist.

Mit dem Stokes-Theorem folgt dann, dass $Du_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^\perp$ gilt. Dann folgt für einige $u \in H^1(O)$, dass

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; O) := \mathcal{LF}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; O).$$

gilt.

Theorem 2.4

Sei $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,1]} \subset H^1(O)$ eine Familie von Funktionen, die den Mittelwert 0 besitzen und sei $(\phi_\varepsilon) \subset H^1(O)$ so, dass $\phi_\varepsilon \in H^1(O, [\eta(\varepsilon), 1])$, also so, dass $\phi_\varepsilon \in W_\varepsilon(\Omega)$. Annahme: $c_0 := \sup_\varepsilon \mathcal{LF}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; O)$ ist endlich. Dann existiert eine Teilfolge ε_j und eine Funktion $u \in BV(\Omega)$, sodass

- a) $\phi_{\varepsilon_j} \rightarrow 1$ in $L^2(O)$,
- b) $u_{\varepsilon_j} \rightarrow u$ bezüglich der schwach-* Konvergenz in $BV(\Omega)$,
- c) $u \in \mathcal{P}(O)$.

Für jedes $u \in \mathcal{P}(O)$ und jede Folge $(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon)$ wie oben, sodass $u_\varepsilon \rightharpoonup^* u$, folgt als untere Abschätzung für die Energie

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{LF}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; O) \geq \int_{J_u \cap O} [1 - \alpha|[u|]] d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Beweis:

Es gilt

$$\int_O (1 - \phi_\varepsilon)^2 dx < \varepsilon \mathcal{LF}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \leq c_0 \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0.$$

Die erste Ungleichung folgt aus der Definition der Energie \mathcal{F}_ε und die zweite aus der Beschränkung der Energie, somit ist a) bereits bewiesen.

Da (u_ε) den Mittelwert 0 hat, genügt es für b) zu zeigen, dass

$$\sup_\varepsilon \{|Du_\varepsilon|(O) : k \in \mathbb{N}\} < +\infty$$

2 Hauptteil

Mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} [|Du_\varepsilon|(O)]^2 &= \left(\int_O |\nabla u_\varepsilon| \right)^2 = \left(\int_O \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\phi_\varepsilon} \frac{\phi_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} |\nabla u_\varepsilon| \right)^2 \leq \left(\int_O \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\phi_\varepsilon} \right)^2 \right) \left(\int_O \left(\frac{\phi_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} |\nabla u_\varepsilon| \right)^2 \right) \\ &= \left(\int_O \frac{\varepsilon}{\phi_\varepsilon^2} \right) \left(\int_O \frac{\phi_\varepsilon^2}{\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 \right) = \left(\varepsilon \int_O \frac{1}{\phi_\varepsilon} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_O \phi_\varepsilon^2 |\nabla u_\varepsilon|^2 \right). \end{aligned}$$

Durch die Annahme ist der rechte Teil durch $2c_0$ beschränkt. Um den ersten Term abschätzen zu können, teilt man das Gebiet O in die beiden Mengen $\{\phi_\varepsilon < 1/2\}$ und $\{\phi_\varepsilon \geq 1/2\}$ auf. Nun erhält man

$$\varepsilon \int_O \frac{1}{\phi_\varepsilon^2} = \varepsilon \int_{\phi_\varepsilon < 1/2} \frac{1}{\phi_\varepsilon^2} + \varepsilon \int_{\phi_\varepsilon \geq 1/2} \frac{1}{\phi_\varepsilon^2}.$$

Da per Definition $\phi_\varepsilon \geq \eta$ und $(1-t)^2$ im Intervall O fallend ist, gilt $\frac{1}{\phi_\varepsilon^2} \leq \frac{1}{\eta^2}$. Außerdem gilt $(1-1/2)^2 \leq (1-\phi_\varepsilon)^2$, da $\phi_\varepsilon < 1/2$. Somit gilt folgende Ungleichung:

$$\varepsilon \int_{\phi_\varepsilon < 1/2} \frac{1}{\phi_\varepsilon^2} \leq \frac{2\varepsilon}{\eta^2(1-1/2)^2} \int_O \frac{(1-\phi_\varepsilon)^2}{2\varepsilon} \leq \frac{8\varepsilon}{\eta^2} c_0.$$

Im zweiten Integral gilt $\frac{1}{\phi_\varepsilon^2} \leq \frac{1}{(1/2)^2}$, da hier $\phi_\varepsilon \geq 1/2$. Also folgt

$$\varepsilon \int_{\phi_\varepsilon \geq 1/2} \frac{1}{\phi_\varepsilon^2} \leq \int_O \frac{1}{(1/2)^2} = 4|O|.$$

Fasst man diese Abschätzungen zusammen, erhält man

$$[|Du_\varepsilon|(O)]^2 \leq \left(\varepsilon \frac{8\varepsilon}{\eta^2} c_0 + \varepsilon 4|O| \right) \cdot 2c_0 = \frac{16\varepsilon^2}{\eta^2} c_0^2 + 8\varepsilon |O| c_0 \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \frac{16c_0^2}{\alpha^2} < \infty. \quad (2.8)$$

Damit ist *b*) bewiesen.

Nun werden zunächst *c*) und eine untere Abschätzung für eindimensionale Scheiben wie in 1.7 gezeigt. Hierzu betrachtet man O als ein Intervall von \mathbb{R} und zeigt, dass u stückweise konstant ist, also dass $u \in \mathcal{P}(O)$ ist. Die Idee hierbei ist, dass ϕ Kosten verursacht, wenn ϕ einen Übergang von 0 nach 1 macht. Da die Energie beschränkt ist, kann ϕ nur endlich viele dieser Übergänge durchlaufen. Und da u genau an diesen Stellen springt, hat u nur endlich viele Sprünge und ist deshalb stückweise konstant.

Definiere

$$B_\varepsilon := \left\{ x \in O : \phi_\varepsilon(x) < \frac{3}{4} \right\} \supset A_\varepsilon := \left\{ x \in O : \phi_\varepsilon(x) < \frac{1}{2} \right\}, \quad (2.9)$$

und sei

$$C_\varepsilon := \{I \text{ zusammenhängende Komponente von } B_\varepsilon : I \cap A_\varepsilon \neq \emptyset\}. \quad (2.10)$$

Man zeigt, dass die Kardinalität von C_ε unabhängig von ε beschränkt ist. Dann gibt es, wie oben behauptet, nur endlich viele Übergänge. Sei also ε fest und man betrachte ein Intervall $I \in C_\varepsilon$. Seien $a, b \in \bar{I}$ so, dass $\{\phi_\varepsilon(a), \phi_\varepsilon(b)\} = \{1/2, 3/4\}$. Mit dem Modica-Mortola-Trick gilt dann

$$\mathcal{L}\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; I) \geq \int_I \varepsilon |\phi'_\varepsilon|^2 + \frac{(1 - \phi_\varepsilon)^2}{4\varepsilon} dx \geq \int_{(a,b)} |\phi'_\varepsilon| (1 - \phi_\varepsilon) dx \geq \int_{1/2}^{3/4} (1-t) dt = \frac{3}{2^5}.$$

Die zweite Ungleichung folgt mit der Youngschen-Ungleichung, zunächst gilt

$$\left((\sqrt{\varepsilon} |\phi'_\varepsilon|) - \left(\frac{(1 - \phi_\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) \right)^2 \geq 0,$$

und damit durch Anwenden der Binomischen Formel und Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} (\sqrt{\varepsilon} |\phi'_\varepsilon|)^2 + \left(\frac{(1 - \phi_\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}} \right)^2 &\geq 2 (\sqrt{\varepsilon} |\phi'_\varepsilon|) \left(\frac{(1 - \phi_\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) \\ \Leftrightarrow (\varepsilon |\phi'_\varepsilon|^2) + \left(\frac{(1 - \phi_\varepsilon)^2}{4\varepsilon} \right) &\geq |\phi'_\varepsilon| (1 - \phi_\varepsilon). \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung entsteht durch die Transformation $\phi_\varepsilon = t$, es folgt $dt = d\phi_\varepsilon = |\phi'_\varepsilon| dx$. Außerdem gilt $(\phi_\varepsilon(a), \phi_\varepsilon(b)) = (1/2, 3/4)$.

Da die Elemente aus C_ε alle disjunkt sind, folgert man aus der Annahme, dass

$$c_0 = \#C_\varepsilon \mathcal{L}\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; I) \leq \#C_\varepsilon \left(\frac{3}{2^5} \right), \quad \#C_\varepsilon \leq 2^5 c_0 / 3,$$

wobei $\#C_\varepsilon$ die Kardinalität von C_ε ausdrückt. Die Elemente aus C_ε werden als $I_i^\varepsilon = (m_i^\varepsilon - w_i^\varepsilon, m_i^\varepsilon + w_i^\varepsilon)$ für $i = 1, \dots, N$ geschrieben. Da $\phi_\varepsilon \rightarrow 1$ in $L^1(O)$, folgt

$$\sum_{I_i^\varepsilon \in C_\varepsilon} |I_i^\varepsilon| = \sum_i 2w_i^\varepsilon \rightarrow 0.$$

Dies bedeutet, dass die Integrale I , die den Phasenübergang darstellen, für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 laufen, also dass der Phasenübergang wie gewünscht verschwindet.

Man nimmt an, dass jede Folge (m_i^ε) in \bar{O} konvergiert und nennt die Grenzwerte $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_N$. Dann wird gezeigt, dass u nur an diesen Punkten springt und sonst konstant ist, also dass $|Du|(O \setminus \{m_i\}_{i=1}^N) = 0$. Hierfür wird $x \in O \setminus \{m_i\}_{i=1}^N$ fest gewählt. Dann findet man eine Nachbarschaft $B_\delta(x)$ von x , für welche $|Du|(B_\delta(x)) = 0$ gilt. Sei $0 < \delta < 1/2 \min_i |x - m_i|$. Aus der obigen Formel folgt, dass die Intervalllängen der Intervalle in C_ε für $\varepsilon \rightarrow 0$ immer kleiner werden. Also gilt für ε klein genug $B_\delta(x) \cap C_\varepsilon = \emptyset$. Außerdem folgt mit den obigen Definitionen, dass $\phi_\varepsilon \geq 1/2$ außerhalb von C_ε gilt. Also

2 Hauptteil

$\phi_\varepsilon^2 \geq 1/4$. Nun kann man mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgern

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_\delta(x)} |u'_\varepsilon| dx \right)^2 &= \left(\int_{B_\delta(x)} 1 \cdot |u'_\varepsilon| dx \right)^2 \leq \left(\int_{B_\delta(x)} 1^2 \right) \left(\int_{B_\delta(x)} |u'_\varepsilon|^2 dx \right) \\ &= 2\Pi\delta \left(\int_{B_\delta(x)} |u'_\varepsilon|^2 dx \right) \leq (2\Pi\delta)4(2\varepsilon) \left(\frac{1}{2\varepsilon} \left(\int_{B_\delta(x)} \phi_\varepsilon^2 |u'_\varepsilon|^2 dx \right) \right) \\ &\leq 16\Pi c_0 \varepsilon \delta \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Mithilfe von unterhalb Stetigkeit der totalen Variation auf offenen Mengen folgt $|Du|(B_\delta(x)) = 0$. Dies zeigt $u \in \mathcal{P}(O)$ mit $J_u \subset \{m_1, \dots, m_N\}$. Hiermit ist also c) bewiesen.

Nun wird die untere Abschätzung auf den Scheiben bewiesen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit zeigt man die untere Abschätzung in dem Fall $J_u = \{0\}$ und $D := u(0^+) = -u(0^-) > 0$. Für jedes $0 < d < D$ existieren die sechs Punkte $y_1 < x_\varepsilon^1 \leq \tilde{x}_\varepsilon^1 < \tilde{x}_\varepsilon^2 \leq x_\varepsilon^2 < y_2$, sodass

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(y_1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(y_2) = 1, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(x_\varepsilon^1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(x_\varepsilon^2) = 0, \\ u_\varepsilon(\tilde{x}_\varepsilon^1) &= -D + d, \\ u_\varepsilon(\tilde{x}_\varepsilon^2) &= D - d. \end{aligned}$$

Wendet man den Modica-Mortola-Trick auf die Intervalle (y_1, x_ε^1) und (x_ε^2, y_2) an, erhält man

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon, (y_1, x_\varepsilon^1) \cup (x_\varepsilon^2, y_2)) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{y_1}^{x_\varepsilon^1} (1 - \phi_\varepsilon) |\phi'_\varepsilon| dx + \int_{x_\varepsilon^2}^{y_2} (1 - \phi_\varepsilon) |\phi'_\varepsilon| dx \geq 1. \quad (2.11)$$

Für die Berechnung des Intervalls $I_\varepsilon = (\tilde{x}_\varepsilon^1, \tilde{x}_\varepsilon^2)$ werden weitere Definitionen benötigt:

$$\begin{aligned} G_\varepsilon &:= \{w \in H^1(I_\varepsilon) : w(\tilde{x}_\varepsilon^1) = -D + d, w(\tilde{x}_\varepsilon^2) = D - d\}, \\ Z_\varepsilon &:= \{z \in H^1(I_\varepsilon) : \eta \leq z \leq 1 \text{ fast überall auf } I_\varepsilon\}, \\ H_\varepsilon(w, z) &:= \int_{I_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\varepsilon} z^2 |w'|^2 + \frac{(1-z)^2}{2\varepsilon} \right) dx, \\ h_\varepsilon(z) &:= \inf_{w \in W_\varepsilon} H_\varepsilon(w, z) \text{ für } z \in Z_\varepsilon. \end{aligned}$$

Da $w \in G_\varepsilon$ ist, liefert Anwenden der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\int_{I_\varepsilon} z^2 |w'|^2 dx \geq \left(\int_{I_\varepsilon} |w'| dx \right)^2 \left(\int_{I_\varepsilon} \frac{1}{z^2} dx \right)^{-1} \geq 4(D-d)^2 \left(\int_{I_\varepsilon} \frac{1}{z^2} dx \right)^{-1}.$$

Man findet die untere Abschätzung

$$h_\varepsilon(z) \geq 4(D-d)^2 \left(2\varepsilon \int_{I_\varepsilon} \frac{1}{z^2} dx \right)^{-1} + \int_{I_\varepsilon} \left(\frac{(1-z)^2}{2\varepsilon} \right) dx. \quad (2.12)$$

Für $0 < \lambda < 1$ gelten folgende Ungleichungen:

$$\int_{x \in I_\varepsilon; \phi_\varepsilon \geq \lambda} \frac{1}{\phi_\varepsilon^2} dx \leq \frac{\mathcal{L}^1(I_\varepsilon)}{\lambda^2},$$

$$\int_{x \in I_\varepsilon; \phi_\varepsilon < \lambda} \frac{1}{\phi_\varepsilon^2} dx \leq \frac{1}{(1-\lambda)^2} \frac{2\varepsilon}{\eta^2} \left(\int_{I_\varepsilon} \frac{(1-\phi_\varepsilon)^2}{2\varepsilon} dx \right).$$

Einsetzen von diesen beiden für $\left(\int_{I_\varepsilon} \frac{1}{z^2} dx \right)$ in Ungleichung 2.12 liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{LF}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; I_\varepsilon) &\geq h_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \geq \frac{2(D-d)^2}{\frac{\varepsilon \mathcal{L}^1(I_\varepsilon)}{\lambda^2} + \frac{1}{(1-\lambda)^2} \frac{2\varepsilon^2}{\eta^2} \left(\int_{I_\varepsilon} \frac{(1-\phi_\varepsilon)^2}{2\varepsilon} dx \right)} + \int_{I_\varepsilon} \left(\frac{(1-\phi_\varepsilon)^2}{2\varepsilon} \right) dx \\ &\geq 2(1-\lambda) \frac{\eta}{3} (D-d) - (1-\lambda)^2 \frac{\eta^2}{2\varepsilon} \frac{\mathcal{L}^1(I_\varepsilon)}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

wobei man die letzte Ungleichung durch Minimieren folgender Funktion erhält

$$t \mapsto \frac{2(D-d)^2}{\frac{\varepsilon \mathcal{L}^1(I_\varepsilon)}{\lambda^2} + \frac{1}{(1-\lambda)^2} \frac{2\varepsilon^2}{\eta^2} t} + t.$$

Deshalb können wir in der obigen Ungleichung den Grenzwert annehmen und erhalten

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{LF}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; I_\varepsilon) \geq (1-\lambda)\alpha 2(D-d).$$

Nun schickt man λ und d gegen 0 und mit Abschätzung 2.11 gilt

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{LF}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon, (y_1, y_2)) \geq 1 + \alpha 2D = 1 + \alpha |U(0^+) - u(0^-)|. \quad (2.13)$$

Als letzter Schritt in dem Beweis folgt nun die Übertragung auf mehrere Dimensionen mit Hilfe von Fubini. Zunächst kann man mit Fubini die Energie für jedes $\xi \in S^{d-1}$ auf die folgende Weise umschreiben:

$$\mathcal{LF}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; O) \geq \int_{\Pi_\xi} \left(\int_{O_y^\xi} \frac{1}{2\varepsilon} (\phi_\varepsilon^2)_y^\xi | (u'_\varepsilon)_y^\xi |^2 + \frac{\varepsilon}{2} | (\phi'_\varepsilon)_y^\xi |^2 + \frac{(1 - (\phi_\varepsilon)_y^\xi)^2}{2\varepsilon} dt \right) d\mathcal{H}^{d-1}(y).$$

Da $\mathcal{LF}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; O)$ für \mathcal{H}^{d-1} fast jedes $y \in \Pi_\xi$ beschränkt ist, ist auch das innere Integral in dem äußeren Integral beschränkt. Außerdem stimmt es mit dem Funktional auf den eindimensionalen Scheiben O_y^ξ überein, welche bereits untersucht und auf dem Paar $((u_\varepsilon)_y^\xi, (\phi_\varepsilon)_y^\xi)$ ausgewertet wurden. Damit folgt

$$\int_{\Pi_\xi} \sum_{m_i \in (J_u)_y^\xi} [1 + \alpha |u_y^\xi(m_i^+) - u_y^\xi(m_i^-)|] d\mathcal{H}^{d-1}(y) \leq \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{LF}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; O).$$

2 Hauptteil

Also hat man nach Theorem 2.2 $u \in SBV(O)$. Außerdem gilt $(u')_y^\xi = 0$ auf jeder Scheibe und damit $u \in \mathcal{P}(O)$. Es folgt

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{L}\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; O) \geq \int_{J_u \cap O} |\nu_u \cdot \xi| [1 + \alpha|[u|]] d\mathcal{H}^{d-1}. \quad (2.14)$$

Lemma 2.5

Sei $\mu : \mathcal{A}(X) \rightarrow [0, +\infty)$ eine superadditive Mengenfunktion und sei λ ein positives Maß auf X . Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei ψ_i eine Borel Funktion auf X , sodass $\mu(A) \geq \int_A \psi_i d\lambda$ für alle $A \in \mathcal{A}(X)$. Dann gilt

$$\mu(A) \geq \int_A \psi d\lambda$$

wobei $\psi := \sup_i \psi_i$.

Dieses Lemma soll nun angewendet werden. Also wird die superadditive wachsende Mengenfunktion μ auf $\mathcal{A}(O)$ definiert durch

$$\mu(A) := \Gamma - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; A), \text{ für jedes } A \in \mathcal{A}(O)$$

und λ soll ein Radonmaß sein, definiert durch

$$\lambda := [1 + \alpha|u(x^+) - u(x^-)|] \mathcal{H}^{d-1}|_{J_u}.$$

Nun wird eine dichte Folge $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in S^{d-1} fest gewählt. Mit 2.14 folgt

$$\mu(O) \geq \int_O \psi_i d\lambda, i \in \mathbb{N},$$

wobei

$$\psi_i(x) := \begin{cases} |\langle \nu_u(x), \xi_i \rangle| & \text{wenn } x \in J_u, \\ 0 & \text{wenn } x \in O \setminus J_u. \end{cases}$$

Durch Lemma 2.5 folgt also

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon; O) \geq \int_O \sup_i \psi_i(x) d\mu = \int_{J_u \cap O} [1 + \alpha|[u|]] d\mathcal{H}^{d-1}.$$

2.4 Ergebnis der Γ -Konvergenz

2.4.1 Equikoerzivität

⁴Theorem 2.6

⁴Der folgende Beweis der Γ -Konvergenz folgt dem Artikel [2]

2.4 Ergebnis der Γ -Konvergenz

Angenommen $\alpha > 0$. Für jede Folge $(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,1]} \subset \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^1(\Omega)$ mit gleichmäßig beschränkten Energien, d.h.

$$\sup_{\varepsilon} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon) < +\infty,$$

existiert eine Teilfolge $\varepsilon_j \downarrow 0$ und ein Maß $\sigma \in \mathcal{M}_S(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, sodass $\sigma_{\varepsilon_j} \rightarrow \sigma$ bezüglich der schwach-* Konvergenz von Maßen und $\phi_{\varepsilon_j} \rightarrow 1$ in $L^1(\Omega)$. Weiterhin ist σ ein rektifizierbares Vektormass.

Beweis:

Sei die Folge $(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ gleichmäßig beschränkt in der Energie durch $c_0 < \infty$,

$$0 \leq \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \leq c_0 \text{ für } \varepsilon \in (0, 1]. \quad (2.15)$$

Zuerst sieht man, dass man durch die Gleichungen 2.3 und 2.15 $\sigma_\varepsilon \in V_\varepsilon(\Omega)$ und $\phi_\varepsilon \in W_\varepsilon(\Omega)$ bekommt, denn sonst wäre die Energie $+\infty$. Nun wird $|\nabla u_\varepsilon|$ durch $|\sigma_\varepsilon|$ ersetzt. Da $\alpha > 0$ ist, folgt mit Ungleichung 2.8

$$|\sigma_\varepsilon|(\Omega) \leq \sqrt{16 \frac{\varepsilon^2}{\eta^2} c_0^2 + 8\varepsilon |\Omega| c_0} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \frac{4c_0}{\alpha} < \infty.$$

Also ist die totale Variation von (σ_ε) gleichmäßig beschränkt und es existiert $\sigma \in \mathcal{M}(\bar{\Omega})$, sodass bis auf Extraktion $\sigma_\varepsilon \rightarrow \sigma$ schwach-* in $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$ gilt. Außerdem gilt

$$\int_{\Omega} (1 - \phi_\varepsilon)^2 dx \leq 2\varepsilon \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \leq 2\varepsilon c_0 \rightarrow 0.$$

Also $\phi_\varepsilon \rightarrow 1$ in $L^2(\Omega)$.

Nun wird die Struktur des Grenzmaßes σ untersucht, da man für den Beweis zeigen muss, dass es ein rektifizierbares Vektormass ist. $\hat{\Omega}$ sei eine beschränkte konvexe offene Menge, sodass $\bar{\Omega} \subset \hat{\Omega}$. σ_ε wird auf $\hat{\Omega} \setminus \bar{\Omega}$ durch 0 fortgesetzt und ϕ_ε durch 1. Daraus folgt, dass $\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; \hat{\Omega}) = \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; \Omega)$. Also kann man zu jedem $O \in \mathcal{A}_S(\hat{\Omega})$, das die Lokalisierung von oben erfüllt, zu jedem σ_ε eine Funktion $u_\varepsilon \in H^1(O)$ finden mit Mittelwert 0 und $\sigma_\varepsilon = \nabla^\perp u_\varepsilon$ in O . Durch Theorem 2.4 folgt, dass ein $u \in \mathcal{P}(O)$ existiert, sodass bis auf Extraktion $u_\varepsilon \rightharpoonup^* u$. Man erhält

$$\sigma|_O = -[u] \nu_{J_u}^\perp \mathcal{H}^1|_{(J_u \cap O)}.$$

Da man $\bar{\Omega} \setminus S$ durch endlich viele Mengen $O \in \mathcal{A}_S(\hat{\Omega})$ überdecken kann, gilt

$$\sigma = U(M_\sigma, \theta_\sigma, \xi_\sigma) + \sum_{j=0}^N c_j \delta_{x_j}.$$

Mit Lemma 2.3 existiert ein rektifizierbares Vektormass $\gamma = U(M_\gamma, \theta_\gamma, \xi_\gamma)$, sodass $\nabla \cdot (\sigma + \gamma) = 0$ und $\mathcal{H}^1(M_\gamma, M_\sigma) = 0$. Dann existiert $u \in BV(\Omega)$, sodass $Du = \sigma^\perp + \gamma^\perp$. Aus Gleichung 2.6 folgern wir, dass $|Du|(S) = 0$, was $|\mu|(S) = \sum |c_j| = 0$ impliziert. Also $c_j = 0$ für $j = 0, \dots, N$ und σ schreibt sich in der Form $U(M_\sigma, \theta_\sigma, \xi_\sigma)$.

2.4.2 lim inf-Abschätzung

Theorem 2.7

Für jede Folge $(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \subset \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^1(\Omega)$, sodass $\sigma_\varepsilon \rightharpoonup^* \sigma$ und $\phi_\varepsilon \rightarrow \phi$ in der $L^1(\Omega)$ Topologie mit $(\sigma, \phi) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^1(\Omega)$ gilt, ist folgende Ungleichung erfüllt:

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \geq \mathcal{E}_\alpha(\sigma, \phi).$$

Beweis:

Sei $(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon)$ wie in dem Theorem. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass $\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon) < +\infty$. Das obige Theorem 2.6 sichert dann die Existenz eines rektifizierbaren Vektormaßes $\sigma = U(M_\sigma, \theta_\sigma, \xi_\sigma)$ mit $\text{supp}(\sigma) \subset \bar{\Omega}$, sodass $\sigma_\varepsilon \rightharpoonup^* \sigma$. Sei $\hat{\Omega}$ wie in dem obigen Beweis und seien μ und λ definiert durch $\mu := \Gamma - \liminf_\varepsilon \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon)$ und $\lambda := \alpha|\sigma| + \mathcal{H}^1|_{M_\sigma}$. Man betrachtet die abzählbare Familie von Mengen $\{O_i\} \subset \mathcal{A}_S(\hat{\Omega})$ bestehend aus den offenen Rechtecken $O_i \subset \hat{\Omega} \setminus S$ mit Ecken in \mathbb{Q}^2 und sei $\psi_i := 1_{O_i}$. Das lokale Ergebnis aus 2.3 liefert für jedes $i \in \mathbb{N}$

$$\mu(A) \geq \mu(O_i \cap A) \geq \lambda(O_i \cap A) = \int_A \psi_i d\lambda.$$

Somit liefert Lemma 2.5

$$\mu(\hat{\Omega}) \geq \lambda(\hat{\Omega}),$$

also

$$\Gamma - \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon) = \mu(\hat{\Omega}) \geq \lambda(\hat{\Omega}) = \alpha|\sigma|(\hat{\Omega}) + \mathcal{H}^1(M_\sigma),$$

da $\sup_i \psi_i$ die konstante Funktion 1 ist.

2.4.3 lim sup-Abschätzung

Zuerst wird an dieser Stelle ein Dichtheitslemma bewiesen. Man zeigt, dass Maße, die ihren Support auf einer endlichen Vereinigung von Mengen haben, dicht in der Energie sind. Im Beweis des Theorems 2.10 betrachtet man dann eine Zerlegung ähnlich derer in Lemma 2.3 und schätzt die Energie auf jeder Teilmenge ab. Dann fasst man diese mithilfe des folgenden Lemmas zusammen und erhält die obere Abschätzung für den gesamten Bereich Ω .

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass $\sigma \in \mathcal{M}_S(\bar{\Omega})$ ist, sodass $\mathcal{E}_\alpha(\sigma) < \infty$ ist. Insbesondere ist $\sigma = U(M_\sigma, \theta_\sigma, \xi_\sigma)$ ein \mathcal{H}^1 -rektifizierbares Vektormaß. Mit Lemma 2.3 erhält man ein \mathcal{H}^1 -rektifizierbares Vektormaß $\gamma = U(M_\gamma, \theta_\gamma, \xi_\gamma)$ und eine Partition von Ω bestehend aus Polyedern $\{\Omega_i\}$, sodass $M_\gamma \subset \cup_i \partial\Omega_i$, $\mathcal{H}^1(M_\sigma \cap \cup_i \partial\Omega_i) = 0$ und $\sigma + \gamma$ divergenzfrei.

Durch diese Eigenschaften gilt

$$\sigma^\perp + \gamma^\perp = Du$$

für einige $u \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Lemma 2.8

Es existiert eine Folge $(w_j) \subset \mathcal{P}(\bar{\Omega})$ mit den folgenden Eigenschaften:

- a) $w_j \rightarrow u$ schwach in $BV(\hat{\Omega})$,
- b) $\text{supp } w_j \subset \bar{\Omega}$,
- c) $\limsup_{j \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\alpha(w_j, 1) \leq \mathcal{E}_\alpha(u, 1)$,
- d) J_{w_j} ist enthalten in einer endlichen Vereinigung von Segmenten für jedes $j \in \mathbb{N}$,
- e) $|Dw_j - Du|(\cup \partial \Omega_i) \rightarrow 0$.

Beweis:

Zuerst müssen u und die Energie leicht abgeändert werden. Man schreibt die Energiedichtefunktion $f(t) = 1 + \alpha t$ und für $k \geq 0$ und $t \geq 0$ wird die Approximation

$$f_k(t) := \min \left\{ (2^{k/2} + \alpha 2^{-k/2}) \sqrt{t}, f(t) \right\}$$

eingeführt. Es gilt $0 \leq f_k \leq f$ und $f_k \equiv f$ auf $[2^{-k}, +\infty)$. f_k ist außerdem stetig, sub-additiv und monoton wachsend auf $[0, +\infty)$ und $f_k(0) = 0$ mit $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_k(t)}{t} = +\infty$. Die dazugehörige Energie für Funktionen $v \in \mathcal{P}(\hat{\Omega})$ wird durch $\mathcal{E}_{f_k}(v, \hat{\Omega}) := \int_{J_v \cap \hat{\Omega}} f_k([v]) d\mathcal{H}^1$ definiert.

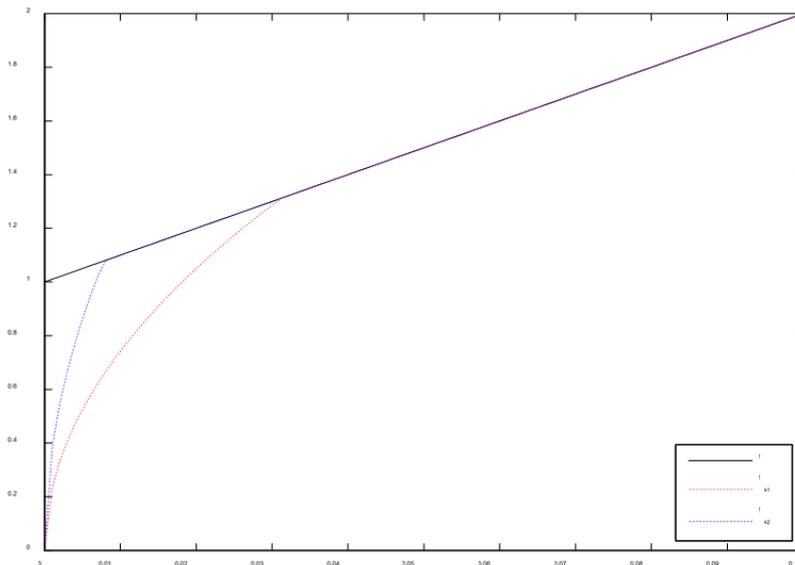


Abbildung 2.2: Graph von f und zwei Approximationen f_{k_1} (rot) und f_{k_2} (blau) mit $k_1 < k_2$. Siehe [2].

2 Hauptteil

Für die Menge der Funktionen $v \in \mathcal{P}(\hat{\Omega})$ mit $v(\hat{\Omega}) \subset 2^{-k}\mathbb{Z}$ schreibt man $\mathcal{P}_k(\hat{\Omega})$. Für diese Funktionen erhält man $|v^+(x) - v^-(x)| \geq 2^{-k}$ für \mathcal{H}^1 -fast jedes $x \in J_v$. Es gilt

$$\mathcal{E}_{f_k}(v) = \mathcal{E}_f(v).$$

Für jedes feste $k \geq 0$ definiert man die approximierte Funktion u_k von u als

$$u_k = 2^{-k} \lfloor 2^k u \rfloor,$$

wobei $\lfloor t \rfloor$ den ganzzahligen Wert des echten t darstellt.

Nun gilt $u_k \in \mathcal{P}_k(\hat{\Omega})$ mit $J_{u_k} \subset J_u$ und $\|u - u_k\|_\infty \leq 2^{-k}$. Außerdem, da $|(u_k^+ - u_k^-) - (u^+ - u^-)| \leq 2^{-k}$ ist, folgt

$$|Du_k - Du|(\hat{\Omega}) \leq 2^{-k} \mathcal{H}^1(J_u). \quad (2.16)$$

Insbesondere ist $u_k \rightarrow u$ streng in $BV(\hat{\Omega})$ und

$$\mathcal{E}_{f_k}(u_k) = \mathcal{E}_f(u_k) \leq \mathcal{E}_f(u) + \alpha 2^{-k} \mathcal{H}^1(J_u). \quad (2.17)$$

Nun wird die Funktion u_k approximiert. Seien $k \geq 0$ und Ω_i fest gewählt. Man wendet ein Lemma auf die Funktion $u_k|_{\Omega_i}$ und die Energie $\mathcal{E}_{f_k}(\cdot, \Omega_i)$ an und erhält eine Folge (w_j^i) mit den folgenden Eigenschaften:

- $w_j^i(\Omega_i) \subset u_k(\Omega_i) \subset 2^{-k}\mathbb{Z}, \forall j \in \mathbb{N}$, da $w_j^i \in \mathcal{P}_k(\hat{\Omega})$,
- $w_j^i \rightarrow u_k$ in $L^1(\Omega_i)$ für $j \rightarrow +\infty$,
- $\lim_{j \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_{f_k}(w_j^i, \Omega_i) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_f(w_j^i, \Omega_i) = \mathcal{E}_f(u_k, \Omega_i)$,
- $J_{w_j^i}$ ist enthalten in einer endlichen Vereinigung von Segmenten für jedes $j \in \mathbb{N}$,
- $\int_{\partial\Omega_i} |T w_j^i - T u_k| d\mathcal{H}^1 \rightarrow 0$, wobei $T : BV(\Omega_i) \rightarrow L^1(\partial\Omega_i)$ den Spuroperator darstellt.

Jetzt wird w_j global definiert durch

$$W_j := \sum_j w_j^i 1_{\Omega_i}.$$

Aus den oberen Eigenschaften folgt $w_j \rightharpoonup^* u_k$ und

$$\lim \mathcal{E}_f(w_j^i, \hat{\Omega}) = \mathcal{E}_f(u_k, \Omega_i) \quad (2.18)$$

sowie

$$|Dw_j - Du_k|(\cup_i \partial\Omega_i) \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty. \quad (2.19)$$

Nun sind a), ..., e) bewiesen.

Zurück zu den \mathcal{H}^1 -rektifizierbaren Maßen $\sigma = U(M_\sigma, \theta_\sigma, \xi_\sigma)$, definiert man die Folge

$$\sigma_j := -Dw_i^\perp - \gamma.$$

$\gamma = U(M_\gamma, \theta_\gamma, \xi_\gamma)$ sei wie oben mit $M_\gamma \subset \cup \partial\Omega_i$. Insbesondere $\gamma = -Du^\perp|_{(\cup_i \partial\omega_i)}$.

Aus obigem Lemma folgert man:

Lemma 2.9

Es existiert eine Folge $(\sigma_j) \in \mathcal{M}_S(\bar{\Omega})$ mit den Eigenschaften

- $\sigma_j \rightarrow \sigma$ bezüglich der schwach $-^*$ Konvergenz von Maßen,
- $\sigma_j = U(M_{\sigma_j}, \theta_{\sigma_j}, \xi_{\sigma_j})$ mit M_{σ_j} enthalten in einer endlichen Vereinigung von Segmenten,
- $\limsup_{j \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\alpha(\sigma_j, 1) \leq \mathcal{E}_\alpha(\sigma, 1)$.

Theorem 2.10

Für jedes $(\sigma, \phi) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^2) \times L^1(\Omega)$ existiert eine Folge $(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon)$, sodass $\sigma_\varepsilon \rightharpoonup^* \sigma$ und $\phi_\varepsilon \rightarrow \phi$ in der $L^1(\Omega)$ -Topologie und

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \leq \mathcal{E}_\alpha(\sigma, \phi). \quad (2.20)$$

Beweis:

Wenn $\mathcal{E}_\alpha(\sigma, \phi) = +\infty$ wäre, ist die Ungleichung für alle Folgen erfüllt. Da in der Definition 2.5 $\mathcal{E}_\alpha = +\infty$ gesetzt wird, falls $\phi \neq 1$ oder $\sigma \neq U(M, \theta, \xi)$ gilt, kann man nun annehmen, dass $\phi = 1$ und $\sigma = U(M, \theta, \xi)$ gelten. Außerdem folgt aus Lemma 2.9, dass es ausreicht, Maße der Form

$$\sigma = \sum_{i=1}^n U(M_i, \theta_i, \xi_i) \quad (2.21)$$

zu betrachten, wobei M_i ein Segment, $\theta_i \in \mathbb{R}_+$ \mathcal{H}^1 -fast überall konstant und ξ_i die Richtung von M_i ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass für jedes Paar von Segmenten M_i, M_j mit $i \neq j$ der Schnitt $M_i \cap M_j$ ein Punkt ist, der nicht zu dem relativen Inneren von M_i und M_j gehört. Diesen Punkt nennt man Verzweigungspunkt. Zuerst zeigt man die Ungleichung aus dem Theorem für ein σ , das nur aus einem einzelnen Segment zusammengesetzt ist. Außerdem ändert man die Richtung des Segments zu e_1 , was den ersten Einheitsvektor in 2 Dimensionen darstellt, also $e_1 = (1, 0)$. Dies soll später die Betrachtung des einzelnen Segments vereinfachen. Sei nun $\sigma = \theta e_1 \cdot \mathcal{H}^1|_{(0,l) \times \{0\}}$.

Man fixiert folgende Werte:

$$a_\varepsilon := \begin{cases} \frac{\theta \alpha \varepsilon}{2} & \text{wenn } \alpha > 0 \\ \varepsilon & \text{wenn } \alpha = 0, \end{cases} \quad b_\varepsilon := \varepsilon \ln \left(\frac{1 - \eta}{\varepsilon} \right) \quad \text{und} \quad r_\varepsilon = \max\{\varepsilon, a_\varepsilon\}.$$

2 Hauptteil

Sei $d_\infty(x, S)$ die Distanzfunktion von x zu der Menge $S \subset \Omega$ relativ zu der Unendlichnorm auf \mathbb{R}^2 und $Q_r(P) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(x, P) \leq r\}$ das Quadrat zentral in P der Größe $2r$ und mit den Seiten parallel zu den Achsen. Man definiert die Mengen

$$\begin{aligned} R_\varepsilon &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(x, [0, l] \times \{0\}) \leq a_\varepsilon\}, \\ I_{a_\varepsilon} &:= R_\varepsilon \cup Q_{r_\varepsilon}(0, 0) \cup Q_{r_\varepsilon}(l, 0), \\ I_{b_\varepsilon} &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(x, I_{a_\varepsilon}) \leq b_\varepsilon\}, \\ I_{c_\varepsilon} &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(x, (I_{a_\varepsilon} \cup I_{b_\varepsilon})) \leq \varepsilon\}, \\ I_{d_\varepsilon} &:= \Omega \setminus (I_{a_\varepsilon} \cup I_{b_\varepsilon} \cup I_{c_\varepsilon}), \\ \Sigma^\pm &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \pm 1, |x_2| \leq \frac{\theta\alpha}{2} \right\}. \end{aligned}$$

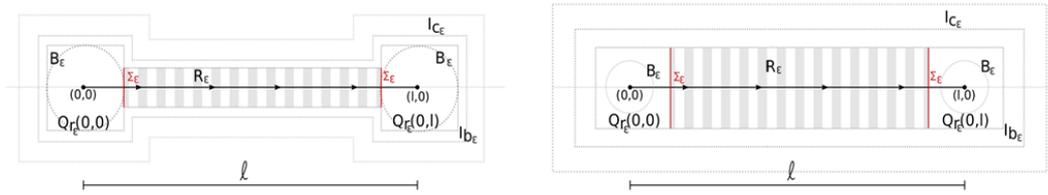


Abbildung 2.3: Beispiel der Nachbarschaften des Segments $[0, l] \times \{0\}$. Links mit $r_\varepsilon = \varepsilon$, rechts mit $r_\varepsilon = a_\varepsilon > \varepsilon$. Der gestreifte Bereich ist jeweils R_ε . Siehe [2].

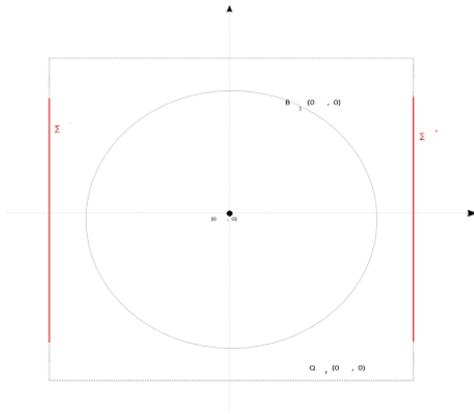


Abbildung 2.4: Σ^+ und Σ^- . Siehe [2].

Konstruktion von σ_ε

Man konstruiert σ_ε als ein Vektorfeld mit Support auf I_{a_ε} . Genauer werden drei verschiedene Konstruktionen auf den Teilen R_ε , $Q_{r_\varepsilon}(0, 0)$ und $Q_{r_\varepsilon}(l, 0)$

durchgeführt und diese werden später zusammengefügt. Sei $r = r_\varepsilon/\varepsilon$ und man betrachte das Problem

$$\begin{cases} \Delta u = \pm\theta\delta_{x_0} * \rho & \text{auf } Q_r(0,0), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\pm\theta}{\mathcal{H}^1(\Sigma)} & \text{auf } \Sigma^\pm. \end{cases}$$

Sei u^+ die Lösung zu dem Problem, in dem für \pm jeweils $+$ eingesetzt wird und u^- analog mit $-$ anstatt \pm . Dann setzt man

$$\sigma_\varepsilon = \begin{cases} \frac{\nabla u^+(x/\varepsilon)}{\varepsilon} & \text{auf } Q_{r_\varepsilon}(0,0), \\ \frac{\theta}{2a_\varepsilon} & \text{auf } R_\varepsilon, \\ \frac{\nabla u^-((x-(l,0))/\varepsilon)}{\varepsilon} & \text{auf } Q_{r_\varepsilon}(l,0). \end{cases} \quad (2.22)$$

Durch diese Konstruktion erreicht man, dass $\nabla \cdot \sigma_\varepsilon = \theta(\delta_{(0,0)} - \delta(l,0)) * \rho_\varepsilon$ und $\sigma_\varepsilon \rightharpoonup^* \sigma$ gelten. Außerdem existiert eine Konstante $c(\alpha, \theta)$, sodass

$$c(\alpha, \theta) := \int_{Q_{r_\varepsilon}(l,0)} |\sigma_\varepsilon|^2 dx = \int_{Q_{r_\varepsilon}(0,0)} |\sigma_\varepsilon|^2 dx = \int_{Q_r(0,0)} |\nabla u^+(x)|^2 dx = \int_{Q_r(0,0)} |\nabla u^-(x)|^2 dx. \quad (2.23)$$

Konstruktion von ϕ_ε

Die meisten Eigenschaften von ϕ_ε werden bereits durch die Ungleichungen in Theorem 2.4 und der Struktur von σ_ε erfüllt. Auf I_{a_ε} muss ϕ_ε möglichst kleine Werte annehmen, da σ_ε dort konzentriert ist. Andererseits muss der optimale Übergang von diesem kleinen Wert zu 1 gefunden werden, weil ϕ_ε außerhalb von I_{a_ε} nahe bei 1 sein soll. Daraus lässt sich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} w'_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(1 - w_\varepsilon), \\ w_\varepsilon(0) = \eta \end{cases} \quad (2.24)$$

herleiten. Die Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch $w_\varepsilon = 1 - (1 - \eta) \exp(\frac{-t}{\varepsilon})$. Dann setzt man

$$\phi_\varepsilon(x) := \begin{cases} \eta & \text{wenn } x \in I_{a_\varepsilon}, \\ w_\varepsilon(d_\infty(x, I_{a_\varepsilon})) & \text{wenn } x \in I_{b_\varepsilon}, \\ d_\infty(x, I_{b_\varepsilon}) - \varepsilon + 1 & \text{wenn } x \in I_{c_\varepsilon}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.25)$$

Die Wahl im Bereich I_{c_ε} wird so getroffen, damit der Wert 1 nicht erst bei $+\infty$ erreicht wird. Also nimmt man die kleinen Kosten in Kauf, die benötigt werden, um den Wert 1 durch den linearen Term auf I_{c_ε} zu erreichen.

Auswertung von $\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon)$

Da die Mengen $I_{a_\varepsilon}, I_{b_\varepsilon}, I_{c_\varepsilon}$ und I_{d_ε} disjunkt sind, lässt sich die Energie in

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon) = \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; I_{a_\varepsilon}) + \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; I_{b_\varepsilon}) + \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; I_{c_\varepsilon}) + \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; I_{d_\varepsilon}) \quad (2.26)$$

2 Hauptteil

aufteilen. Nun wertet man jede Komponente einzeln aus. Die letzte Komponente ist gleich 0, da σ_ε auf I_{d_ε} gleich 0 ist und ϕ_ε konstant gleich 1.

Für die anderen Abschätzungen benutzt man die obigen Definitionen von σ_ε und ϕ_ε auf den einzelnen Bereichen. Man teilt die Energie auf I_{a_ε} weiter auf:

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; I_{a_\varepsilon}) = \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; R_\varepsilon) + \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; Q_{r_\varepsilon}(0, 0)) + \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; Q_{r_\varepsilon}(l, 0))$$

Nun führt 2.23 zu der Abschätzung

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; Q_{r_\varepsilon}(0, 0)) = \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; Q_{r_\varepsilon}(l, 0)) = \frac{\eta^2}{2\varepsilon} c(\alpha, \theta) + \frac{(1 - \eta^2)}{2\varepsilon} r_\varepsilon^2$$

und mit 2.22 und 2.25 folgt durch Einsetzen

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon, R_\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon} \eta^2 \left| \frac{\theta}{2a_\varepsilon} \right| + \frac{(1 - \eta)^2}{2\varepsilon} \right] |R_\varepsilon| \leq \left[\frac{(\theta\eta)^2}{8\varepsilon a_\varepsilon^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \right] 2a_\varepsilon l.$$

Durch den Übergang zum limsup erhält man

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; I_{a_\varepsilon}) \leq \theta\alpha l = \theta\alpha \mathcal{H}^1([0, l] \times \{0\}), \quad (2.27)$$

da

$$\frac{1}{2\varepsilon} 2a_\varepsilon l = \frac{1}{2\varepsilon} 2(\theta\alpha\varepsilon)l = \theta\alpha l$$

gilt und der Rest mit $\eta = \alpha\varepsilon$ gegen 0 geht.

Um die Abschätzungen auf I_{b_ε} und I_{c_ε} zu finden, benutzt man die Coarea-Formel⁵

$$\int_\Omega g(x) |\nabla u(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{u^{-1}(t)} g(x) d\mathcal{H}_{n-1}(x) \right) dt.$$

Hierzu benötigt man, dass $|\nabla d_\infty(x, \cdot)| = 1$ für $d_\infty(x, I_{a_\varepsilon})$ und $d_\infty(x, I_{b_\varepsilon})$ und für fast jedes $x \in \Omega$ gilt und dass eine Konstante $k = k(\alpha, \theta)$ existiert, sodass die Levellinien $\{d_\infty(x, \cdot) = t\}$ eine \mathcal{H}^1 Länge haben, die durch $2l + kt$ begrenzt wird. Dann erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; I_{b_\varepsilon}) &= \int_{I_{b_\varepsilon}} \left[\frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi_\varepsilon|^2 + \frac{(1 - \phi_\varepsilon)^2}{2\varepsilon} \right] |\nabla d_\infty(x, I_{a_\varepsilon})| dx \\ &= \int_0^{b_\varepsilon} \left[\frac{(1 - w_\varepsilon(t))^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} |w'_\varepsilon(t)|^2 \right] \mathcal{H}^1(\{d_\infty(\cdot, I_{a_\varepsilon}) = t\}) dt \\ &\leq (2l + k\varepsilon) \left[\frac{1}{2} (1 - w_\varepsilon(t))^2 \right]_0^{b_\varepsilon} \\ &= \left(l - \frac{k\varepsilon}{2} \right) [(1 - \eta)^2 - \varepsilon^2] \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} l = \mathcal{H}^1([0, l] \times \{0\}) \end{aligned}$$

⁵Vergleiche [5]

und

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon; I_{c_\varepsilon}) &= \int_{I_{c_\varepsilon}} \left[\frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi_\varepsilon|^2 + \frac{(1 - \phi_\varepsilon)^2}{2\varepsilon} \right] |\nabla d_\infty(x, I_{b_\varepsilon})| dx \\
 &= \int_0^\varepsilon \left[\frac{(1 - t + \varepsilon - 1)^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \right] \mathcal{H}^1(\{d_\infty(\cdot, I_{b_\varepsilon} \cup I_{a_\varepsilon}) = t\}) dt \\
 &\leq (2l + k\varepsilon) \left[\frac{(t - \varepsilon)^3}{6\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \right]_0^\varepsilon \\
 &= (2l + k\varepsilon) \varepsilon^2 \frac{2}{3} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0.
 \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassen der obigen Abschätzungen folgt

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \leq (1 + \alpha\theta) \mathcal{H}^1([0, l] \times \{0\}).$$

Sei σ wie in der Definition 2.21. Seien $\sigma_\varepsilon^i, \phi_\varepsilon^i$ die obigen Funktionen für jedes $\sigma_i = \theta_i \xi_i \mathcal{H}^1|_{M_i}$ und setze

$$\sigma_\varepsilon = \sum_{i=1}^n \sigma_\varepsilon^i, \quad \phi_\varepsilon = \min_i \phi_\varepsilon^i.$$

Durch die lokale Konstruktion an den Endpunkten der Segmente und das σ für jedes ε 1.1 erfüllt, gilt

$$\nabla \cdot \sigma_\varepsilon = \left(N \delta_{x_0} - \sum_{j=1}^N \delta_{x_j} \right) * \rho_\varepsilon.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon) &= \int_\Omega \frac{1}{2\varepsilon} \left| \min_i \phi_\varepsilon^i \right|^2 \left| \sum_{i=1}^n \sigma_\varepsilon^i \right|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \left| \nabla(\min_i \phi_\varepsilon^i) \right|^2 + \frac{(1 - \min_i \phi_\varepsilon^i)^2}{2\varepsilon} dx \\
 &\leq \int_\Omega \frac{1}{2\varepsilon} \left| \min_i \phi_\varepsilon^i \right|^2 \left| \sum_{i=1}^n \sigma_\varepsilon^i \right|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi_\varepsilon^i|^2 + \frac{(1 - \phi_\varepsilon^i)^2}{2\varepsilon} dx.
 \end{aligned}$$

Für ε klein genug kann angenommen werden, dass die R_ε^i paarweise disjunkt sind, dann wird das Verhalten in den Quadraten untersucht. Seien $M_{i_1}, \dots, M_{i_{m_P}}$ die Segmente, die sich in dem Verzweigungspunkt P treffen. Für $j = i_1, \dots, i_{m_P}$ wird mit $Q_{r_\varepsilon^j}(P)$ die quadratische Nachbarschaft von P bezüglich dem Segment M_j bezeichnet, die wie oben konstruiert wird. Durch die Definition ist

2 Hauptteil

ϕ_ε konstant und gleich η auf $\cup_{j=i_1}^{m_P} Q_{r_\varepsilon^j}(P)$, sodass folgt

$$\begin{aligned} \int_{\cup_{j=i_1}^{m_P} (R_\varepsilon^j \cup Q_{r_\varepsilon^j}(P))} \frac{\phi_\varepsilon^2}{2\varepsilon} |\sigma_\varepsilon|^2 dx &= \sum_{j=i_1}^{m_P} \int_{R_\varepsilon^j} \frac{\phi_\varepsilon^2}{2\varepsilon} |\sigma_\varepsilon|^2 dx + \int_{\cup_{j=i_1}^{m_P} Q_{r_\varepsilon^j}(P)} \frac{\phi_\varepsilon^2}{2\varepsilon} \left| \sum_{j=i_1}^{m_P} \sigma_\varepsilon^j \right|^2 dx \\ &\leq \sum_{j=i_1}^{m_P} \int_{R_\varepsilon^j} \frac{\phi_\varepsilon^2}{2\varepsilon} |\sigma_\varepsilon|^2 dx + m_P \frac{\eta^2}{2\varepsilon} \sum_{j=i_1}^{m_P} \int_{Q_{r_\varepsilon^j}(P)} |\sigma_\varepsilon^j|^2 dx \\ &\leq \sum_{j=i_1}^{m_P} \int_{(R_\varepsilon^j \cup Q_{r_\varepsilon^j}(P))} \frac{1}{2\varepsilon} |\phi_\varepsilon^j|^2 |\sigma_\varepsilon^j|^2 dx + (m_P - 1) \left(\sum_{j=i_1}^{i_{m_P}} c(\alpha, \theta_j) \right) \frac{\eta^2}{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Die Konstante am Ende der Ungleichung bezeichnet man mit $c(n, \alpha, \theta_i, \dots, \theta_n)$. Wenn man diese Abschätzung nun auf jeden Verzweigungspunkt anwendet und in die obige Abschätzung von $\mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon)$ einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon, \phi_\varepsilon) &\leq \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathcal{F}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon^i, \phi_\varepsilon^i) + nc(n, \alpha, \theta_i, \dots, \theta_n) \varepsilon \\ &\leq \sum_{i=1}^n (1 + \alpha \theta_i) \mathcal{H}^1(M_i) \\ &= \int_{\text{supp}(\sigma)} (1 + \alpha \theta) d\mathcal{H}^1 = \mathcal{E}_\alpha(\sigma, 1). \end{aligned}$$

Hiermit haben wir das Theorem 2.10 bewiesen und damit Γ -Konvergenz von \mathcal{F}_ε gegen \mathcal{E}_α gezeigt.

2.5 Numerische Ergebnisse

2.5.1 Gleichungen

Nun werden die numerischen Ergebnisse⁶ dargestellt, die auf der obigen Approximation beruhen. Als erstes muss man die Energieerhaltungsgleichung behandeln. Hierzu führt man folgende Notationen ein:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon &:= \left(N\delta_{x_0} - \sum_{j=1}^N \delta_{x_j} \right) * \rho_\varepsilon, \\ G_\varepsilon(\sigma, \phi) &:= \begin{cases} \int_\Omega \left[\frac{1}{2\varepsilon} |\phi|^2 |\sigma|^2 \right] dx & \text{wenn } \sigma \in V_\varepsilon, \\ +\infty & \text{sonst in } L^2(\Omega, \mathbb{R}^2), \end{cases} \\ \Lambda_\varepsilon(\phi) &:= \begin{cases} \int_\Omega \left[\frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{(1-\phi^2)}{2\varepsilon} \right] dx & \text{wenn } \phi \in W_\varepsilon, \\ +\infty & \text{sonst in } L^1\Omega. \end{cases} \end{aligned}$$

⁶Vergleiche [2].

Dann gilt

$$\min_{\sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)} G_\varepsilon(\sigma, \phi) = \inf_{\sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)} \left\{ \sup_{u \in H^1(\Omega)} \int_{\Omega} \frac{1}{2\varepsilon} |\phi|^2 |\sigma|^2 + u(\nabla \cdot \sigma - f_\varepsilon) dx \right\}.$$

Nun wendet man das Von Neumann min-max-Theorem an und erhält

$$\begin{aligned} \min_{\sigma} G_\varepsilon(\sigma, \phi) &= \sum_u \inf_{\sigma} \int_{\Omega} \frac{1}{2\varepsilon} |\phi|^2 |\sigma|^2 - (\nabla u \sigma + u f_\varepsilon) dx \\ &= \min_u \int_{\Omega} \frac{\varepsilon |\nabla u|^2}{2|\phi|^2} + u f_\varepsilon dx = - \min_u G'_\varepsilon(u, \phi). \end{aligned}$$

Mit der Relation $\sigma = \frac{\varepsilon \nabla u}{\phi^2}$ führt dies zu dem Minimierungsproblem

$$\begin{aligned} \sigma_j &:= \frac{\varepsilon \nabla u_j}{\phi_j^2} \quad \text{mit} \quad u_j := \operatorname{argmin} G'_\varepsilon(u, \phi_j), \\ \phi_{j+1} &:= \operatorname{argmin} G_\varepsilon(\sigma_j, \phi) + \Lambda_\varepsilon(\phi). \end{aligned}$$

Das alternative Minimierungsproblem wird durch eine Optimierung der Komponente Λ_ε bezüglich einer Änderung des Gebietes vervollständigt. Für $T : \Omega \rightarrow \Omega$ einem glatten Plan definiert man

$$\phi_T := \phi \circ T(x) \quad \text{und} \quad \Lambda_\varepsilon(T) := \Lambda_\varepsilon(\phi_T).$$

Durch einen Tausch dieser Variablen erhalten wir

$$\Lambda_\varepsilon(T) = \int_{\Omega} \left[\frac{\varepsilon}{2} |(\nabla T \circ T^{-1}) \nabla \phi|^2 + \frac{(1 - \phi^2)}{2\varepsilon} \right] \det(\nabla T^{-1}) dy$$

Genauer wird T in der Form $x + V(x)$ gewählt und der Gradient wie folgt ausgewertet:

$$\langle d\Lambda_\varepsilon(T), W \rangle = \int_{\Omega} \left[\varepsilon (\nabla \phi_T; \nabla W \nabla \phi_T) - \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi_T|^2 \nabla \cdot W - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \phi_T)^2 \nabla \cdot W \right] dx.$$

Dargestellt in $H^1(\Omega, \Omega)$ liefert der Gradient des Funktionals Λ_ε ausgewertet auf $T(x) = x$ das elliptische Problem

$$\int_{\Omega} (\nabla V, \nabla W) dx + \int_{\Omega} \left[\varepsilon (\nabla \phi; \nabla W \nabla \phi) - \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi|^2 \nabla \cdot W - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \phi)^2 \nabla \cdot W \right] dx = 0.$$

2.5.2 Diskretisierung

Man definiert einen runden Wertebereich Ω , der die Punkte aus S in einem gleichmäßigem Netz enthält. Außerdem definiert man die Werte $\alpha, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{end}, N_{iter}$ und einen Gaußschen Faltungskern $\rho_{\varepsilon_{end}}$ um f_ε zu definieren. Für die diskreten Räume werden für u, ϕ und das Vektorfeld V stückweise Polynome des Grades 1 gewählt.

Algorithm 1 Γ -Konvergenz

Input: $S = (x_0, \dots, x_N), \varepsilon_{in}, \varepsilon_{end}, N_{iter}, \alpha, index$
function STEINER($x_0, \dots, x_N, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{end}, N_{iter}, \alpha, \rho$)
 Set $f_\varepsilon = (N\delta_{x_0} - \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}) * \rho_{\varepsilon_{end}}$ und $\phi_0 = 1$
for $j = 1, \dots, N_{iter}$ **do**
 $\varepsilon_j = (\frac{j-N_{iter}}{N_{iter}})\varepsilon_{in} - (\frac{j}{N_{iter}})\varepsilon_{end}$
 $\tilde{\phi}$... L^1 -Projektion von ϕ_{j-1}^2
 Setze u_j der Minimierer von $G'_{\varepsilon_j}(\cdot, \phi_{j-1})$
 Setze $\sigma_j = \frac{\varepsilon_j \nabla u_j}{\phi_{j-1}}$
 Setze ϕ_j der Minimierer von $G_{\varepsilon_j}(\sigma_j, \cdot) + \Lambda_\varepsilon(\cdot)$
 if $j \% 10 == 0 \& j \geq index$ **then**
 Löse $\langle d\Lambda_{\varepsilon_j}(T), W \rangle = 0$
 Setze $\phi_j = \phi_j(x + T)$
 end if
 Setze $\phi_j = \max\{\eta, \phi_j\}$
end for
end function
return $\phi_{N_{iter}}, \sigma_{N_{iter}}$.

2.6 SteinerProblemSolver

```

1 n = 200;
  filename = 'TestResult';
3 epsilon_in = 0.2;
  epsilon_end = 0.05;
5 alpha = 0.05;
  maxIter = 1000;
7 tol = 1e-6;
  visualize = true;
9 randomGrid = false;
  example = zeros(n,n);
11 M = [round(n/2), round(n/2)];
  r = round(n/2) - round(n/6);
13 P1 = round(r * [sin(0), cos(0)]) + M;
  P2 = round(r * [sin(2*pi/3), cos(2*pi/3)]) + M;
15 P3 = round(r * [sin(4*pi/3), cos(4*pi/3)]) + M;
  example(P1(1), P1(2)) = (n-1)^2;
17 example(P2(1), P2(2)) = -0.5*(n-1)^2;
  example(P3(1), P3(2)) = -0.5*(n-1)^2;
19 [phi, sigma] = SteinerProblemSolver ( example, filename, epsilon_in,
  epsilon_end, alpha, maxIter, tol, visualize, randomGrid );

```

Quelltext 2.1: Example

In diesem Kapitel wird eine ähnliche Phasenfeldmethode dargestellt, die bereits in Matlab implementiert wurde. Es folgt eine Erklärung der einzelnen Teilprogramme und wichtigsten Definitionen sowie Vorgehensweisen. In dem obigen Quelltext werden die Grundlegenden Parameter wie `epsilon_in`, `epsilon_end` und `alpha` festgelegt. `example` stellt in Form einer 200×200 Matrix die Massewerte an jedem einzelnen Punkt dar, also die Startverteilung der Masse auf dem gesamten Gebiet. Mit `M` wird der Mittelpunkt des Gebietes bezeichnet und mit Hilfe der Trigonometrischen Funktionen werden die drei Punkte `P1` bis `P3` berechnet, welche im regelmäßigen Abständen auf einem Kreis mit Radius `r` verteilt werden. Dann wird die Funktion `SteinerProblemSolver` aufgerufen.

```

2 function [phi, sigma] = SteinerProblemSolver ( example, filename ,
      epsilon_in , epsilon_end , alpha , maxIter , tol , visualize , randomGrid )
4 n = size( example , 1 );
  x = linspace( 0 , 1 , n );
6 [X, Y] = meshgrid( x , x );
  nodes = [X(:) Y(:) ];
8 XAux = X;
  YAux = Y;
10 if ( randomGrid )
      XAux( 2 : end - 1 , 2 : end - 1 ) = X( 2 : end - 1 , 2 : end - 1 ) + 0.002 * rand( n - 2 , n - 2 )
      ;
12      YAux( 2 : end - 1 , 2 : end - 1 ) = Y( 2 : end - 1 , 2 : end - 1 ) + 0.002 * rand( n - 2 , n - 2 )
      ;
  end
14 elements = delaunay( [XAux(:) , YAux(:) ] );
  numElements = size( elements , 1 );
16 numNodes = n ^ 2;
  initialize ( nodes , elements );

```

Quelltext 2.2: SteinerProblemSolver Teil 1

In den ersten Zeilen werden zwei Matrizen `X` und `Y` definiert, die später die `x`- und `y`-Werte von dem Gitter enthalten sollen. Dieses Gitter stellt dann das diskretisierte Gebiet dar und ist zunächst gleichmäßig. Über den Boolean Parameter `randomGrid` kann man entscheiden, ob ein zufälliges Gitter gewählt werden soll. Die `x`- und `y`-Werte werden zusätzlich in dem Knotenarray `nodes` gespeichert. Dann wird eine Triangulierung des Gitters durchgeführt und man erhält das Konnektivitätsarray `elements`. Jede Zeile von `elements` charakterisiert ein Dreieck in Form der Indizes der Eckpunkte und `numElements` ist die Anzahl der Finiten Elemente. Nun wird die Funktion `initialize` aufgerufen.

2 Hauptteil

```
1  function initialize ( nodes,elements )
3
4  global BinvDQuad;
5  global BinvD;
6  global rows;
7  global cols;
8  global quadPoints;
9  global valCoeffs;
11 I = eye(2);
12 D = [-1 -1;I]';
13 BinvDQuad = cell(size(elements,1),1);
14 BinvD = cell(size(elements,1),1);
15 rows = zeros(9*length(elements),1);
17 cols = rows;
18 counter = 1;
19
20 quadPoints = [1 1]'/3;
21 valCoeffs = [1-quadPoints(1,:)-quadPoints(2,:);quadPoints(1,:);
22             quadPoints(2,:)]';
23 for k = 1:size(elements,1)
24     nodeInds = elements(k, 1:3);
25     x = nodes(nodeInds, 1:2);
26     B = (D * x)';
27     BinvDTmp = (D'/B)';
28     BinvDQuad{k} = BinvDTmp'*BinvDTmp;
29     BinvD{k} = BinvDTmp;
30     rows(counter:counter+8) = repmat(nodeInds(:),3,1);
31     c = repmat(nodeInds,3,1);
32     cols(counter:counter+8) = c(:);
33     counter = counter + 9;
34 end
35 end
```

Quelltext 2.3: initialize

In der for-Schleife werden für jedes Dreieck der Triangulierung die Indizes der Eckpunkte entnommen. Dann werden mit Hilfe von nodes jeweils die Koordinaten der Eckpunkte berechnet und in den Spalten von x gespeichert.....

```

2 feps = example;
SmoothKernel = exp(-(x-.5).^2/(2*(epsilon_end/2)^2));
4 SmoothKernel = fftshift(SmoothKernel) / sum(SmoothKernel);
feps = real(iff2(fft2(feps).*fft2(SmoothKernel'*SmoothKernel)));
6 feps = transform(feps,nodes,1);

```

Quelltext 2.4: SteinerProblemSolver Teil 2

```

1 function B = transform(A,nodes,dir)
3 n = sqrt(size(nodes,1));
nodesPlot = round(nodes*(n-1)+1);
5
if ( dir == 0 )
7     B = zeros(n,n);
for i = 1:n^2
9         B(nodesPlot(i,1),nodesPlot(i,2)) = A(i);
end
11 B = reshape(B,n,n);
B = flip(B);
13 B = B';
elseif ( dir == 1 )
15 Ac = flip(A');
B = zeros(n^2,1);
17 for i = 1:n^2
B(i) = Ac(nodesPlot(i,1),nodesPlot(i,2));
19 end
end
21 end

```

Quelltext 2.5: transform

Nun wird die Energieerhaltungsgleichung aus `example` entnommen und mithilfe von `smoothKernel` geglättet. Dies entspricht wie in 2.4 der Glättung mit dem Faltungskern ρ_ε . Dann wird die Matrix `feps` in Finite Elemente transformiert.

```
M = massStiffMatrix(nodes,elements);
```

Quelltext 2.6: SteinerProblemSolver Teil 3

Im Hauptprogramm `SteinerProblemSolver` wird als nächstes die Funktion `massStiffMatrix` aufgerufen.

2 Hauptteil

```
2 function [M,L] = massStiffMatrix(nodes , elements)
4     global rows;
4     global cols;
6     global BinvDQuad;
8     n = length(nodes);
8     valsM = rows;
10    valsL = rows;
12    I = eye(2);
12    D = [-1 -1;I]';
14
14    counter = 1;
16    for k = 1:size(elements,1)
16        nodeInds = elements(k, 1:3);
18        x = nodes(nodeInds, 1:2);
18        A = (D * x)';
20        vol = abs(det(A)/2);
22
22        valsM(counter:counter+8) = [2,1,1;1,2,1;1,1,2] * (vol/12);
24        valsL(counter:counter+8) = vol*BinvDQuad{k};
24        counter = counter + 9;
26    end
26
26    M = sparse(rows, cols, valsM, n, n);
28    L = sparse(rows, cols, valsL, n, n);
28    end
```

Quelltext 2.7: massStiffMatrix

Hier werden die Massematrix und die Steifigkeitsmatrix der Finiten Elemente Methode berechnet. An jedem Punkt der Triangulierung werden die Werte der Masse- und der Steifigkeitsmatrix berechnet. Mit Hilfe der beiden Arrays cols und rows, werden diese an den richtigen Stellen in den beiden Matrizen M und L eingetragen.

```
1 [massCentersX, massCentersY] = defineMassCenters(nodes, elements);
```

Quelltext 2.8: SteinerProblemSolver Teil 4

Dann folgt das Aufrufen der Funktion defineMassCenters.

```

1 function [MX,MY] = defineMassCenters(nodes , elements)
3 numElements = size(elements,1);
MX = zeros(numElements,1);
5 MY = zeros(numElements,1);
for k = 1:numElements
7     index = elements(k,:);
P1 = nodes(index(1),:);
9     P2 = nodes(index(2),:);
P3 = nodes(index(3),:);
11     a = sqrt((P1(1)-P2(1))^2+(P1(2)-P2(2))^2);
b = sqrt((P2(1)-P3(1))^2+(P2(2)-P3(2))^2);
13     c = sqrt((P1(1)-P3(1))^2+(P1(2)-P3(2))^2);
P = a+b+c;
15     MX(k)= 1/P*(a*P3(1)+b*P1(1)+c*P2(1));
MY(k)= 1/P*(a*P3(2)+b*P1(2)+c*P2(2));
17 end
19 end

```

Quelltext 2.9: defineMassCenters

Man berechnet jeweils die Eckpunkte P1 bis P3 eines Dreiecks. Dann werden die Längen der Seiten bestimmt und mit a,b und c bezeichnet. Der Umfang P des Dreiecks ist dann die Summe dieser Seitenlängen und damit werden die x-Koordinate und die y-Koordinate des Inkreismittelpunktes des Dreiecks berechnet. Diese dienen später als Baryzentren, an denen sigma bei der dargestellt wird.

```

1 b_aux = M*ones(numNodes,1);
sigma = zeros(numElements,2);
3 phi = ones(numNodes,1);
iter = 0;

```

Quelltext 2.10: SteinerProblemSolver Teil 5

2 Hauptteil

```
while ( iter < maxIter )
2
    epsilon = epsilon_in - (epsilon_in - epsilon_end) / (maxIter - 1) * iter
;
4
    eta = alpha * epsilon;

6
    disp(['Iteration ', num2str(iter), ' epsilon = ', num2str(epsilon)
]);
    phiOld = phi;
8
    sigmaOld = sigma;

10
    APhi = matrixPHI ( nodes, elements, sigma, epsilon );
    bPhi = 1/epsilon * b_aux;
12
    phi = APhi \ bPhi;

14
    ALAMBDA = matrixLAMBDA ( nodes, elements, phi, eta, epsilon );
    bLAMBDA = -M * feps;
16
    lambda = ALAMBDA \ bLAMBDA;

18
    sigma = setSigma ( elements, lambda, phi, eta, epsilon );

20
    if ( visualize )
        visualization ( 1, phi, sigma, massCentersX, massCentersY, n );
22
    end
    save ( filename, 'sigma', 'phi', 'lambda', 'epsilon', 'alpha', 'n', '
nodes', 'elements', 'massCentersX', 'massCentersY' );

24
    error = max ( abs ( phiOld (:) - phi (:) ) ) + max ( abs ( sigmaOld (:) - sigma
(:) ) );
26
    if ( error < tol && iter < startIter )
        iter = startIter;
28
    elseif ( error < tol && iter > maxIter + startIter )
        break;
30
    else
        iter = iter + 1;
32
    end

34
end

36
end
```

Quelltext 2.11: SteinerProblemSolver Teil 6

Nun folgt die eigentliche Berechnung. Die while-Schleife wird so oft durchlaufen bis die geforderte Anzahl an Iterationen erreicht ist. Man berechnet das epsilon zu dem jeweiligen Iterationsschritt und setzt wie in Paragraph 2.1 $\eta = \alpha * \epsilon$. Dann berechnet man in einzelnen Schritten phi, lambda und sigma und visualisiert zum Ende jedes Iterationsschrittes phi und sigma.

```

function A = matrixPHI ( nodes , elements , sigma , epsilon )
2
global BinvDQuad;
4 global rows;
global cols;
6
n = length(nodes);
8 valsS = zeros(4*length(elements),1);
valsM = valsS;
10
I = eye(2);
12 D = [-1 -1;I]';
14 counter = 1;
16 for k = 1:size(elements,1)
18     nodeInds = elements(k, 1:3);
x = nodes(nodeInds, 1:2);
20 B = (D * x)';
vol = abs(det(B)/2);
22 sigmaVals = sigma(k,:);
sigmaNrmSqr = sigmaVals(:,1).^2+sigmaVals(:,2).^2;
24
valsS(counter:counter+8) = vol*epsilon*BinvDQuad{k};
26 valsM(counter:counter+8) = [2,1,1;1,2,1;1,1,2] * (vol/12) * 1/
epsilon*(1+sigmaNrmSqr);
28 counter = counter + 9;
30 end
32 A1 = sparse(rows, cols, valsS, n, n);
A2 = sparse(rows, cols, valsM, n, n);
34 A = A1+A2;
36 end

```

Quelltext 2.12: matrixPHI

Bei der Berechnung von phi, wird auch eine for-Schleife ausgeführt. In jedem Schritt werden wieder die Indizes von den Eckpunkten jeweils eines Dreiecks ausgelesen und dann die Koordinaten der Eckpunkte in x gespeichert. Nun wird jeweils eine Zeile von sigma ausgelesen und sigmaNrmSqr berechnet. Dann werden die neuen Arrays valsS und valsM berechnet, mit denen später dünn besetzte Matrizen errechnet werden. Die Summe dieser beiden Matrizen ist dann die neue Matrix PHI. Jetzt wird noch jeder einzelne Eintrag durch epsilon geteilt und man erhält phi.

2 Hauptteil

```
2 function A = matrixLAMBDA ( nodes , elements , phi , eta , epsilon )
4 global BinvDQuad;
4 global rows;
6 global cols;
8 n = length(nodes);
numElements = size(elements,1);
10 vals = zeros(4*length(elements),1);
12 quadPoints = [1 1]'/3;
valCoeffs = [1-quadPoints(1,:)-quadPoints(2,:);quadPoints(1,:);
quadPoints(2,:)]';
14 I = eye(2);
16 D = [-1 -1;I]';
18 counter = 1;
20 for k = 1:numElements
22     nodeInds = elements(k,1:3);
x = nodes(nodeInds,1:2);
24 B = (D * x)';
vol = abs(det(B)/2);
26 phiVals = valCoeffs*phi(nodeInds,:);
phiValsSqrEta = phiVals.^2 + eta.^2;
28 gammaEps = min(phiValsSqrEta);
30 vals(counter:counter+8) = vol*epsilon/gammaEps*BinvDQuad{k};
32 counter = counter + 9;
34 end
36 A = sparse(rows,cols,vals,n,n);
38 end
```

Quelltext 2.13: matrixLAMBDA

In der for-Schleife werden zunächst die gleichen Schritte durchgeführt, wie in den anderen for-Schleifen. Danach wird für phiVals der Durchschnitt der phi-Werte an den Eckpunkten jedes Dreiecks eingesetzt. Man berechnet phiValsSqrEta und setzt gammaEps als das Minimum hiervon. Dann berechnet man die Werte für das neue phi und schreibt sie in eine dünn besetzte Matrix.

```

2 function sigma = setSigma(elements, lambda, phi, eta, epsilon)
4 global BinvD;
4 global valCoeffs;
6
6 numElements = size(elements,1);
8 sigma = zeros(numElements,2);
10
10 for k = 1:size(elements,1)
12
12     nodeInds = elements(k,1:3);
12     lambdaGrad = BinvD{k} * lambda(nodeInds, :);
14
14     phiVals = valCoeffs*phi(nodeInds, :);
16     phiValsSqrEta = phiVals.^2+eta.^2;
16     gammaEps = min(phiValsSqrEta);
18
18     sigma(k,1) = epsilon*lambdaGrad(1, :)./gammaEps;
20     sigma(k,2) = epsilon*lambdaGrad(2, :)./gammaEps;
22
22 end
24
24 end

```

Quelltext 2.14: setSigma

Zuletzt wird in der while-Schleife von SteinerProblemExample sigma bestimmt. Hierzu berechnet man in einer for-Schleife für jedes Dreieck lambdaGrad und übernimmt phiVals aus dem phi. Dann berechnet man phiValsSqrEta und gammaEps auf die gleiche Weise wie in matrixLAMBDA. Zuletzt werden jeweils die Zeilen des Arrays von sigma gefüllt.

```

2 function visualization(numFigure, phi, sigma, massCentersX,
2     massCentersY, n)
4 figure(numFigure);
4 subplot(1,2,1);
4 imagesc(reshape(phi, n, n));
6 colorbar; axis image; caxis([0,1]);
6 subplot(1,2,2);
8 quiver(massCentersX, massCentersY, sigma(:,1), sigma(:,2));
8 axis image;
10 drawnow;
10 end

```

Quelltext 2.15: SteinerProblemSolver Teil 7

Am Ende der Funktion SteinerProblemSolver werden phi und sigma geplottet.

2.6.1 Eigene Simulation

Zuletzt habe ich noch eine eigene Simulation durchgeführt, hierbei habe ich eine Quelle und drei Ziele betrachtet. Diese sind die Eckpunkte eines Quadrates mit Seitenlänge 100 zentriert in dem gesamten Bereich. Die Auswertung folgt in der Zusammenfassung.

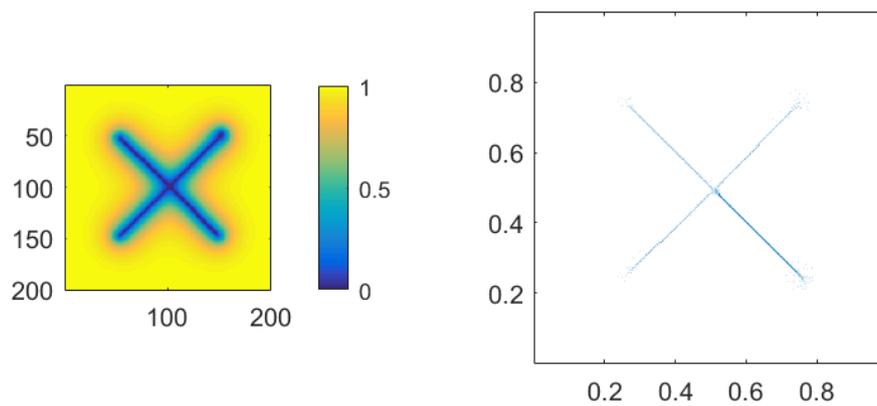


Abbildung 2.5: Ergebnis der eigenen Simulation. Links ist die Annäherung an ϕ dargestellt und rechts die Approximation an das Vektorfeld σ .

```
clear all; close all; clc;
2
n = 200;
4 filename = 'TestResult';
epsilon_in = 0.2;
6 epsilon_end = 0.05;
alpha = 0.05;
8 maxIter = 1000;
tol = 1e-6;
10 visualize = true;
randomGrid = false;
12
example = zeros(n,n);
14 P1 = [50 50];
P2 = [150 50];
16 P3 = [50 150];
P4 = [150 150];
18 example(P1(1),P1(2)) = (n-1)^2;
example(P2(1),P2(2)) = -(1/3)*(n-1)^2;
20 example(P3(1),P3(2)) = -(1/3)*(n-1)^2;
example(P4(1),P4(2)) = -(1/3)*(n-1)^2;
22
[phi,sigma] = SteinerProblemSolver ( example, filename, epsilon_in,
epsilon_end, alpha, maxIter, tol, visualize, randomGrid );
```

Quelltext 2.16: Code zur eigenen Simulation

3 Zusammenfassung

Insgesamt wurde eine Approximation gefunden um das in der Einleitung beschriebene Problem zu lösen. Es wurde mit Hilfe einer lokalen Untersuchung die Γ -Konvergenz von \mathcal{F}_ε gegen \mathcal{E}_α gezeigt. Dank der Equikoerzivität kann man dann mit 1.6.3 folgern, dass die Minimierer σ_ε der Energien \mathcal{F}_ε auch wirklich gegen den Minimierer σ von \mathcal{E}_α konvergieren. Also kann man die exakte Lösung unseres Problems durch die σ_ε annähern, wenn man ε gegen 0 gehen lässt.

Auf diese Weise wurde versucht das Problem numerisch zu lösen. Man betrachtet in beliebig vielen Iterationsschritten kleiner werdende ε und berechnet dann jeweils ein σ aus dem σ_{alt} des vorherigen Iterationsschritts. Für die numerische Lösung benutzt man die Finite Elemente Methode und teilt das Gebiet Ω auf viele Dreiecke Ω_i auf. Dann berechnet man ϕ, λ und σ . Man plottet σ an den berechneten Baryzentren und visualisiert ϕ .

Das Programm Example.m läuft einwandfrei durch. Allerdings bleibt das Problem, dass viele Matrizen dünn besetzt, also fast singular sind. Deshalb benötigt der Durchlauf mit 1000 Iterationen bei mir immernoch knapp 25 Minuten.

Auch die Simulation mit einer Quelle und drei Zielen liefert das gewünschte Ergebnis, allerdings dauert die Berechnung fast eine Stunde. Um größere Mengen von Punkten in der Ebene über den kürzesten Graphen zu verknüpfen, müsste man dann schon die Anzahl der Iterationen verkleinern, was aber zu ungenaueren Ergebnissen führen würde.

Literaturverzeichnis

- [1] BRAIDES Andrea: Γ -convergence for Beginners. Oxford University Press, 2002
- [2] A. Chambolle, B. Merlet, L. Ferrari: „A simple phase-field approximation for the Steiner problem in dimension two”. September 2, 2016
- [3] E. Oudet, F. Santambrogio: „A Modica-Mortola approximation for branched transport and applications”. September 28, 2010
- [4] SANTAMBROGIO F.: „Optimal Transport for Applied Mathematicians - Calculus of Variations, PDE's and Modeling”. Version von Mai 2015
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Coarea_formula, September 30, 2017

Abbildungsverzeichnis

2.1	Beispiel der Konstruktion des \mathcal{H}^1 -rektifizierbaren Maßes γ (rot) und der Partition $\{\Omega_i\}$ (grau) in dem Fall, das σ (grün) ein \mathcal{H}^1 -rektifizierbares Vektormmaß ist. Siehe [2].	16
2.2	Graph von f und zwei Approximationen f_{k_1} (rot) und f_{k_2} (blau) mit $k_1 < k_2$. Siehe [2].	25
2.3	Beispiel der Nachbarschaften des Segments $[0, l] \times \{0\}$. Links mit $r_\varepsilon = \varepsilon$, rechts mit $r_\varepsilon = a_\varepsilon > \varepsilon$. Der gestreifte Bereich ist jeweils R_ε . Siehe [2].	28
2.4	Σ^+ und Σ^- . Siehe [2].	28
2.5	Ergebnis der eigenen Simulation. Links ist die Annäherung an ϕ dargestellt und rechts die Approximation an das Vektorfeld σ	44

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über „*Eine Phasenfeldapproximation von Transportnetzwerken*“ selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.



Alexander Menke, Münster, 30. September 2017

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.



Alexander Menke, Münster, 30. September 2017