

Mathematische Statistik

Probeaufgaben

Keine Abgabe. Besprechung entweder in einer Zentralübung oder in der letzten Vorlesung.

Aufgabe 1

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige und auf $(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Dabei sei $\theta \in \mathbb{R}$ der unbekannte Parameter.

- Schätzen Sie θ mit der Momentenmethode.
- Schätzen Sie θ mit der Maximum-Likelihood-Methode. (Geben Sie alle Stellen an, wo die Likelihood-Funktion maximal ist).

Aufgabe 2

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und Poisson-verteilt mit Parameter $\theta > 0$. Zeigen Sie, dass die Schätzer \bar{X}_n und S_n^2 erwartungstreu für θ sind. Welcher der beiden Schätzer hat eine kleinere Varianz?

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n \sim N(0, \theta)$ unabhängig, wobei $\theta > 0$ der unbekannte Parameter ist. Zeigen Sie, dass die Statistik $T = \sum_{i=1}^n X_i^2$ suffizient ist. Geben Sie den besten erwartungstreuen Schätzer für θ an. Erreicht dieser Schätzer die Cramér-Rao-Schranke?

Aufgabe 4

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und Poisson-verteilt mit Parameter $\theta > 0$. Bestimmen Sie den besten erwartungstreuen Schätzer für $\gamma := e^{-\theta}\theta^2/2$.

Aufgabe 5

Es seien X_1, \dots, X_n unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit der Dichte

$$f_{\theta_1, \theta_2}(t) := (\theta_1 - 1) \cdot \theta_2^{(\theta_1 - 1)} \cdot t^{-\theta_1} \cdot \mathbf{1}_{[\theta_2, \infty)}(t)$$

mit unbekanntem Parametern $\theta_1 > 1$ und $\theta_2 > 0$. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ für (θ_1, θ_2) .

Aufgabe 6

Unter den ersten $n = 10.000.000$ Dezimalstellen der Zahl π gibt es genau 999.440 Nullen. Testen Sie mit einem asymptotischen Test die Hypothese H_0 : "Die Häufigkeit von 0 ist gleich $1/10$ " gegen die Hypothese H_1 : "Die Häufigkeit von 0 ist ungleich $1/10$ ". Das Niveau sei $\alpha = 0.05$.

Aufgabe 7

Betrachten Sie das Modell $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, wobei $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \sim N(0, \sigma^2)$ unabhängig sind.

- Schätzen Sie β und σ^2 mit der Maximum-Likelihood-Methode.
- Geben Sie symmetrische Konfidenzintervalle zum Niveau $1 - \xi$ für β und σ^2 an.

Aufgabe 8

Es seien X_1, X_2, \dots unabhängige und $N(\mu, 1)$ -verteilten Zufallsvariablen, $\mu \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei $\varphi_n(X_1, \dots, X_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ der einseitige Gauß-z-Test zum Niveau α von $H_0 = \{\mu \leq 0\}$ gegen $H_1 = \{\mu > 0\}$ bei Beobachtung von X_1, \dots, X_n . Zeigen Sie:

- $\mathbb{E}_\mu \varphi_n(X_1, \dots, X_n) < \mathbb{E}_\mu \varphi_{n+1}(X_1, \dots, X_{n+1})$ für alle $\mu > 0, n \in \mathbb{N}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\mu \varphi_n(X_1, \dots, X_n) = 1$ für alle $\mu > 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\mu \varphi_n(X_1, \dots, X_n) = 0$ für alle $\mu < 0$.

Aufgabe 9

Es seien X_1, X_2, \dots unabhängig und auf $(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ gleichverteilt. Betrachten Sie die Statistiken

$$G = \max\{X_1, \dots, X_n\}, \quad K = \min\{X_1, \dots, X_n\}.$$

- Zeigen Sie, dass $T := \frac{1}{2}(G + K)$ erwartungstreu ist.
- Bestimmen Sie $\text{Var}_\theta G$, $\text{Var}_\theta K$ und $\text{Cov}_\theta(G, K)$.
- Zeigen Sie, dass $\text{Var}_\theta T < \text{Var}_\theta \bar{X}_n$.

Aufgabe 10

Es seien X_1, X_2, \dots unabhängig und $N(\mu, 1)$ -verteilt, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt sei. Bestimmen Sie den besten erwartungstreuen Schätzer für $\gamma := e^{t\mu}$ bei festem $t \neq 0$.

Aufgabe 11

Bei einem gegebenen $\theta > 0$ seien X_1, \dots, X_n gleichverteilt auf $[0, \theta]$. Für θ nehmen wir eine a-priori Pareto-Verteilung mit der Dichte

$$q(\theta) = ac^a \theta^{-(a+1)} \mathbf{1}_{(c, \infty)}(\theta)$$

an. Dabei seien $a > 1$, $c > 0$ Parameter. Bestimmen Sie die a-posteriori-Verteilung und den Bayes-Schätzer für θ .