Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Sommersemester 2016
4. Juli 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie
Aufgabensammlung

Keine Abgabe

1 Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie

1.1 Lemma von Borel–Cantelli

Lemma 1.1 (Borel–Cantelli, Teil 1)**.** Seien $A_1, A_2, \ldots$ Ereignisse in einem WRaum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] < \infty$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[\text{unendlich viele } A_n\text{'s treten ein}] = 0.$$

Lemma 1.2 (Borel–Cantelli, Teil 2)**.** Seien $A_1, A_2, \ldots$ **unabhängige** Ereignisse in einem WRaum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] = \infty$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[\text{unendlich viele } A_n\text{'s treten ein}] = 1.$$

Aufgabe 1. Seien $A_1, A_2, \ldots$ unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}[A_n] = p_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} = +\infty\right] = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty.$$

Aufgabe 2. Es sei X eine auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in der Dezimaldarstellung von X das Muster 777 unendlich oft vorkommt.

Aufgabe 3. Es seien $A_1, A_2, \ldots$ und A Ereignisse mit $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n \cap A] < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}[\text{unendlich viele } A_n\text{'s treten ein}] \le 1 - \mathbb{P}[A].$$

Aufgabe 4. Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}[\text{Die Menge } \{\xi_1, \xi_2, \ldots\} \text{ ist überall dicht im Intervall } [0,1]] = 1.$$

Aufgabe 5. Konstruieren Sie *abhängige* Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] = \infty$ und

$$\mathbb{P}[\text{unendlich viele } A_n\text{'s treten ein}] = 0.$$

Aufgabe 6. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie

$$\mathbb{P}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n < 1/n} = +\infty\right].$$

1.2 Konvergenz in Wahrscheinlichkeit

Definition 1.3. Eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ von Zufallsvariablen konvergiert gegen eine Zufallsvariable X **in Wahrscheinlichkeit** (oder **stochastisch**), wenn für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon] = 0.$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass alle Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen WRaum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert sind.
Bezeichnung: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$.

Aufgabe 7. Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda_n)$, wobei $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

Aufgabe 8. Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathrm{N}(0, \sigma_n^2)$, wobei $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 0$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

Aufgabe 9. Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen und $r > 0$ mit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|^r = 0$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

Aufgabe 10. Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen und M eine Konstante mit $\mathbb{P}[|X_n| > M] = 0$ für alle $n = 1, 2, \ldots$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n| = 0$.

Aufgabe 11. Konstruieren Sie nichtnegative Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$ und $\mathbb{E}X_n = +\infty$ für alle n.

Aufgabe 12. Konstruieren Sie Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ und X mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, $\mathbb{E}X_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{E}X = +\infty$.

Aufgabe 13. Für zwei Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ definiere

$$d(X, Y) := \mathbb{E}[\min\{|X - Y|, 1\}].$$

(Der Erwartungswert ist wohldefiniert, denn $0 \leq \min\{|X - Y|, 1\} \leq 1$). Zeigen Sie:

(i) $d(X, Y) = 0$ genau dann, wenn $X = Y$ fast sicher.

(ii) $d(X, Y) = d(Y, X)$ für beliebige Zufallsvariablen X, Y.

(iii) $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$ für beliebige Zufallsvariablen X, Y, Z.

(iv) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = 0$.

Somit ist d eine Metrik auf der Menge aller Zufallsvariablen (wobei fast überall gleiche Zufallsvariablen identifiziert werden), welche die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit metrisiert.

Aufgabe 14. Für zwei Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ definiere

$$\rho(X, Y) := \mathbb{E}\left[\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|}\right].$$

Zeigen Sie, dass ρ Eigenschaften (i)–(iv) aus der vorherigen Aufgabe hat.

1.3 Konvergenz in Verteilung

Definition 1.4. Die **Verteilungsfunktion** einer Zufallsvariable X ist gegeben durch

$$F_X(t) = \mathbb{P}[X \le t], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definition 1.5. Für eine Zufallsvariable X bezeichnen wir mit $S(X)$ die Menge aller Punkte $t \in \mathbb{R}$, in denen F_X stetig ist, d.h.

$$S(X) = \{t \in \mathbb{R} \colon \mathbb{P}[X = t] = 0\}.$$

Definition 1.6. Eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ von Zufallsvariablen konvergiert **in Verteilung** gegen eine Zufallsvariable X, wenn

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t) \text{ für alle } t \in S(X).$$

Bezeichnung: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ oder $F_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} F_X$.

Aufgabe 15. Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots\}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \mathbb{P}[X = k] \text{ für alle } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Zeigen Sie, dass dann $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ gilt.

Aufgabe 16. Sei $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$, wobei $\lambda > 0$ ein Parameter sei. Zeigen Sie, dass X_n in Verteilung gegen eine Poisson-Verteilung mit Parameter λ konvergiert. [Für n groß genug ist $\lambda/n < 1$ und nur solche n's werden hier betrachtet].

Aufgabe 17. Sei $X_n \sim \mathrm{Geo}(\lambda/n)$, wobei $\lambda > 0$ ein Parameter sei. Zeigen Sie, dass X_n/n in Verteilung gegen eine Exponentialverteilung mit Parameter λ konvergiert.

Aufgabe 18. Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit X_n gleichverteilt auf $[0, n]$. Zeigen Sie: es gibt keine Zufallsvariable X mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

Aufgabe 19. Seien $X_1, X_2, \ldots \sim \mathrm{Exp}(1)$ unabhängig. Zeigen Sie, dass $\max\{X_1, \ldots, X_n\} - \log n$ in Verteilung gegen eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$, konvergiert (Gumbel–Verteilung).

Aufgabe 20. Seien $X_1, X_2, \ldots \sim \mathrm{U}[0, 1]$ unabhängig. Zeigen Sie, dass $n \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ in Verteilung gegen eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter 1 konvergiert.

Aufgabe 21. Zeigen Sie: Aus Konvergenz in Wahrscheinlichkeit folgt Konvergenz in Verteilung.

Aufgabe 22. Konstruieren Sie eine Folge von Zufallsvariablen, die in Verteilung aber nicht in Wahrscheinlichkeit konvergiert.

Aufgabe 23. Zeigen Sie: Konvergiert eine Folge von Zufallsvariablen in Verteilung gegen eine Konstante c, so konvergiert sie auch in Wahrscheinlichkeit gegen c.

Satz 1.7. Eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ konvergiert in Verteilung gegen eine Zufallsvariable X genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} f(X_n) = \mathbb{E} f(X)$$

für alle beschränkten, stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 24. Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit X_n gleichverteilt auf der Menge $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\}$, d.h.

$$\mathbb{P}[X_n = 1/n] = \mathbb{P}[X_n = 2/n] = \ldots = \mathbb{P}[X_n = n/n] = 1/n.$$

Zeigen Sie, dass X_n in Verteilung konvergiert und bestimmen Sie die Grenzwertverteilung.

Aufgabe 25. Sei $X_n = n$ für $n = 1, 2, \ldots$. Zeigen Sie, dass diese Folge in Verteilung nicht konvergeiert.

Definition 1.8. Die **charakteristische Funktion** einer Zufallsvariable X ist gegeben durch

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iXt}], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Satz 1.9 (Lévy)**.** Eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ konvergiert in Verteilung gegen eine Zufallsvariable X genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 26. Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, wobei $\mu := \lim_{n\to\infty} \mu_n \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 \in (0, \infty)$ existieren. Zeigen Sie, dass X_n in Verteilung gegen die Normalverteilung mit Parametern (μ, σ^2) konvergiert.

Aufgabe 27. Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda_n)$, wobei $\lambda := \lim_{n\to\infty} \lambda_n \in (0, \infty)$ existiere. Zeigen Sie, dass X_n in Verteilung gegen die Exponentialverteilung mit Parameter λ konvergiert.

Aufgabe 28. Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathrm{N}(0, n)$. Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t)$ existiert für jedes $t \in \mathbb{R}$, aber X_n konvergiert nicht in Verteilung. Warum ist es kein Widerspruch zum Satz von Lévy?

1.4 Fast sichere Konvergenz

Definition 1.10. Eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ konvergiert **fast sicher** gegen eine Zufallsvariable X, falls

$$\mathbb{P}\left[\left\{\omega \in \Omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right] = 1.$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass alle Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen WRaum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert sind.

Bezeichnung: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X$.

Bemerkung 1.11. Die obige Bedingung kann man abgekürzt auch folgendermaßen formulieren:

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} X_n = X\right] = 1.$$

Aufgabe 29. Zeigen Sie: Für beliebige Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ und X sind die Mengen

$$\left\{\omega \in \Omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} \text{ und } \left\{\omega \in \Omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ existiert}\right\}$$

messbar. *Hinweis:* Die zweite Menge kann zwar als $\bigcup_{a\in\mathbb{R}}\{\omega \in \Omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = a\}$ dargestellt werden, diese Vereinigung ist allerdings überabzählbar.

Aufgabe 30. Sei X eine Zufallsvariable und $a_1, a_2, \ldots$ eine deterministische Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Zeigen Sie, dass $a_n X \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} 0$.

Satz 1.12. Es gelten die folgenden Implikationen:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$$

und alle Rückrichtungen sind im Allgemeinen nicht richtig.

Aufgabe 31. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit X_n Bernoulli-verteilt mit Parameter $1/n$. Zeigen Sie: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} 0$ und sogar $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$ aber nicht $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} 0$.

Aufgabe 32. Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon] < \infty \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} X.$$

Aufgabe 33. Sei $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$. Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge $k(1) < k(2) < \ldots$ mit $X_{k(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} X$ gibt.

Aufgabe 34. Sei $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ = Borel σ-Algebra auf $[0,1]$, $\mathbb{P}$ = Lebesgue–Maß. Zeigen Sie: Die Folge

$$\begin{aligned}
&X_1 = \mathbb{1}_{[0,1/2]}, X_2 = \mathbb{1}_{[1/2,1]},\\
&X_3 = \mathbb{1}_{[0,1/4]}, X_4 = \mathbb{1}_{[1/4,1/2]}, X_5 = \mathbb{1}_{[1/2,3/4]}, X_6 = \mathbb{1}_{[3/4,1]},\\
&X_7 = \mathbb{1}_{[0,1/8]}, X_8 = \mathbb{1}_{[1/8,1/4]}, \ldots
\end{aligned}$$

konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen 0, hat jedoch keinen fast sicheren Grenzwert. Geben Sie eine fast sicher konvergente Teilfolge von $X_1, X_2, \ldots$ an.

Aufgabe 35. Zeigen Sie: Konvergiert eine monoton fallende Folge von nicht-negativen Zufallsvariablen gegen 0 in Wahrscheinlichkeit, so konvergiert sie sogar fast sicher gegen 0. Dabei bedeutet "monoton fallend", dass $X_1(\omega) \geq X_2(\omega) \geq X_3(\omega) \geq \ldots \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$.

Aufgabe 36. Zeigen Sie: Für beliebige Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ gibt es eine Zahlenfolge $a_1, a_2, \ldots > 0$ mit $a_n X_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} 0$.

Aufgabe 37. Konstruieren Sie eine Folge von nichtnegativen Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0$ aber $\mathbb{E}X_n = +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass $\mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_n] \neq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$.

1.5 L^p-Konvergenz

Definition 1.13. Eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ konvergiert gegen eine Zufallsvariable X in L^p (oder **im p-ten Mittel**), wobei $p > 0$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X|^p = 0.$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass alle Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen WRaum definiert sind und dass $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ und $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bezeichnung: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$.

Aufgabe 38. Zeigen Sie: Aus der Konvergenz im p-ten Mittel folgt Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 39. Konstruieren Sie Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ mit $\mathbb{E}|X_n|^p \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die fast sicher (und somit auch in Wahrscheinlichkeit), aber nicht im p-ten Mittel konvergieren.

Aufgabe 40. Seien $X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X$ und $|X_n| \leq M$, wobei $M > 0$ eine Konstante sei. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$ für alle $p > 0$.

Aufgabe 41. Zeigen Sie: Aus der Konvergenz im p-ten Mittel folgt Konvergenz im s-ten Mittel, $s < t$.

Aufgabe 42. Konstruieren Sie Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$, die für jedes $p \geq 1$ im p-ten Mittel aber nicht fast sicher konvergieren.

Aufgabe 43. Sei X eine Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{p\to+\infty} \sqrt[p]{\mathbb{E}|X|^p} = \operatorname{ess\,sup} X,$$

wobei $\operatorname{ess\,sup} X = \inf\{y \in \mathbb{R} \colon \mathbb{P}[X > y] = 0\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ das wesentliche Supremum von X ist. [Das Infimum einer leeren Menge wird hier als $+\infty$ definiert]. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ess\,sup} X \leq \sup\{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ und geben Sie ein Beispiel an, in dem diese Ungleichung strikt ist.

1.6 Verschiedenes zu Konvergenzarten

Aufgabe 44. Seien $X_1 = c_1, X_2 = c_2, \dots$ Zufallsvariablen, wobei $c_1, c_2, \dots$ deterministische Konstanten mit $c := \lim_{n\to\infty} c_n \in \mathbb{R}$ seien. Zeigen Sie:

(a) X_n konvergiert in Verteilung gegen c.

(b) X_n konvergiert in Wahrtscheinlichkeit gegen c.

(c) X_n konvergiert fast sicher gegen c.

(d) X_n konvergiert in L^p gegen c, für alle $p > 0$.

Aufgabe 45. Betrachten Sie drei Folgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen mit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n \le Y_n \le Z_n] = 1.$$

(a) Angenommen $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} W$, $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} W$. Zeigen Sie, dass $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} W$.

(b) Angenommen $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} W$, $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} W$. Zeigen Sie, dass $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} W$.

(c) Zeigen Sie, dass eine analoge Aussage für die fast sichere Konvergenz nicht gilt.

Aufgabe 46. Eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ von Zufallsvariablen heißt **straff** (oder **beschränkt in Wahrscheinlichkeit**), falls

$$\lim_{a\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[|X_n| > a] = 0.$$

Zeigen Sie:

(a) Sind $X_1, X_2, \ldots$ und $Y_1, Y_2, \ldots$ straffe Folgen, so ist auch die Folge $X_n + Y_n$ straff.

(b) Ist $X_1, X_2, \ldots$ straffe Folge und $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$, so gilt auch $X_n Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

(c) Eine Folge, die in Verteilung konvergiert, ist straff.

1.7 Gesetz der großen Zahlen

Satz 1.14 (Starkes Gesetz der großen Zahlen, Kolmogorow)**.** Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Dann gilt

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \mathbb{E}[X_1].$$

Satz 1.15 (Starkes Gesetz der großen Zahlen für nicht identisch verteilte Zufallsvariablen, Kolmogorow)**.** Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige (nicht notwendigerweise identisch verteilte) Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_n|^2 < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Var} X_n}{n^2} < \infty.$$

Dann gilt für die Folge der Partialsummen $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, dass

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0.$$

Aufgabe 47. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Borel-Funktion mit $\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$ und $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

$$\frac{f(X_1) + \ldots + f(X_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 48. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n\text{-faches Integral}} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

Aufgabe 49. Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig mit X_n gleichverteilt auf $[-n^\alpha, n^\alpha]$, wobei $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ein Parameter sei. Zeigen Sie, dass für diese Folge das starke Gesetz der großen Zahlen gilt:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} 0.$$

Aufgabe 50. Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_1 = 0$ und

$$\mathbb{P}[X_n = +n] = \mathbb{P}[X_n = -n] = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{2}{n}, \quad n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass das starke Gesetz der großen Zahlen für diese Folge nicht gilt, nämlich

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = 0\right] = 0.$$

Aufgabe 51. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n-\text{faches Integral}} \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{x_1 + \dots + x_n} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 52.

(a) Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Cauchy-verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ ebenfalls Cauchy-verteilt ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ nicht in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert und somit das Gesetz der großen Zahlen für die Cauchy–Verteilung nicht gilt.

1.8 Zentraler Grenzwertsatz

Satz 1.16 (Klassischer zentraler Grenzwertsatz)**.** Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mu := \mathbb{E}X_1$ und $\sigma^2 := \operatorname{Var} X_1 < \infty$. Dann gilt für die Folge der Partialsummen $S_n = X_1 + \dots + X_n$, dass

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{N}(0, \sigma^2).$$

Aufgabe 53. Bestimmen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme beim 1000-maligen Werfen eines fairen Würfels größer als 3500 ist.

Aufgabe 54. Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_1 = \mu$, $\sigma^2 := \operatorname{Var} X_1 < \infty$. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_1 + \dots + X_n \leq an]$$

für $a < \mu$, $a = \mu$ und $a > \mu$. *Hinweis.* Gesetz der großen Zahlen ist hilfreich, reicht aber im Fall $a = \mu$ nicht aus.

Aufgabe 55. Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert als Funktion von $a \in [0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[an]} \binom{n}{k}.$$

Aufgabe 56. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \ldots + \frac{n^n}{n!}\right).$$

Aufgabe 57. Betrachten Sie die Folge von Mengen $D_1, D_2, \ldots$ mit

$$D_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon 0 \le x_1 \le 1, \ldots, 0 \le x_n \le 1, x_1^2 + \ldots + x_n^2 \le n/3\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(D_n)$, wobei λ_n das n-dimensionale Lebesgue-Maß (Volumen) bezeichnet.

Aufgabe 58. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Borel-Funktion mit $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x)\mathrm{d}x < \infty$. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int \cdots \int}_{x_1^2+\ldots+x_n^2 \le an} (f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n))\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

in Abhängigkeit vom Parameter $a > 0$.

Satz 1.17 (Zentraler Grenzwertsatz von Lindeberg)**.** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien n unabhängige Zufallsvariablen $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ gegeben, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) Zentriertheit: $\mathbb{E}X_{n,k} = 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$.

(b) Normiertheit: $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_{n,k}^2] = 1$.

(c) Die Lindeberg–Bedingung: Für jedes $\varepsilon > 0$: $L_n(\varepsilon) := \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_{n,k}^2 \mathbb{1}_{|X_{n,k}| \ge \varepsilon}] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dann gilt der zentrale Grenzwertsatz: $X_{n,1} + \ldots + X_{n,n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{N}(0,1)$.

Satz 1.18 (Zentraler Grenzwertsatz von Ljapunow)**.** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien n unabhängige Zufallsvariablen $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ gegeben, so dass (a), (b) erfüllt sind und die folgende Ljapunow–Bedingung gilt:

(c') Es gibt ein $\delta > 0$ mit $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_{n,k}|^{2+\delta}] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dann gilt der zentrale Grenzwertsatz: $X_{n,1} + \ldots + X_{n,n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{N}(0,1)$.

Aufgabe 59. Zeigen Sie, dass (a), (b), (c') $\Longrightarrow$ (c), d.h. leiten Sie den Satz von Ljapunow aus dem Satz von Lindeberg her.

Aufgabe 60. Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, nicht unbedingt identisch verteilte Zufallsvariablen und $M \in (0, \infty)$ eine Konstante mit $\mathbb{P}[|X_n| < M] = 1$ (für alle $n \in \mathbb{N}$). Weiter gelte $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} X_n = \infty$. Zeigen Sie, dass für $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ der folgende zentrale Grenzwertsatz gilt:

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1).$$

Hinweis: Satz von Lindeberg.

Aufgabe 61. Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, nicht unbedingt identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_k = 0$, $\mathbb{E}[X_k^2] = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$C := \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_k|^{2+\delta}] < \infty$$

für ein $\delta > 0$. Zeigen Sie, dass für $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ der folgende zentrale Grenzwertsatz gilt:

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1).$$

Hinweis: Satz von Ljapunow.

Aufgabe 62. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit X_k gleichverteilt auf dem Intervall $[0, k]$ für alle $k = 1, 2, \ldots$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{4\sum_{k=1}^{n} X_k - n^2}{n^{3/2}}$$

in Verteilung konvergiert und bestimmen Sie die Grenzwertverteilung.

Aufgabe 63. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig mit X_n gleichverteilt auf $[-n^\alpha, n^\alpha]$, wobei $\alpha > 0$ ein Parameter sei. Zeigen Sie, dass für diese Folge der zentrale Grenzwertsatz gilt, nämlich

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{\operatorname{Var}[X_1 + \ldots + X_n]}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{N}(0,1).$$

Aufgabe 64. Seien $X_n \sim \mathrm{N}(0, n!)$ unabhängig und normalverteilt. Zeigen Sie: Der Zentrale Grenzwertsatz gilt für das Dreieicksschema $X_{n,k} := X_k/\sigma_n$, $k = 1, \ldots, n$, wobei $\sigma_n^2 = \operatorname{Var}(X_1 + \ldots + X_n)$, die Lindeberg–Bedingung ist aber nicht erfüllt.

Aufgabe 65. Bestimmen Sie (ohne Hilfsmittel) den numerischen Wert von $\int_{-1}^{+1} \cos^{100} x \, \mathrm{d}x$ mit einem relativen Fehler von $< 10\%$.

1.9 0-1-Gesetz von Kolmogorow

Definition 1.19. Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen. Die **terminale σ-Algebra $\mathcal{T}$** ist definiert durch

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots),$$

wobei $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ die von $X_n, X_{n+1}, \ldots$ erzeugte σ-Algebra sei.

Aufgabe 66. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ tatsächlich eine σ-Algebra ist.

Satz 1.20 (0-1-Gesetz von Kolmogorow)**.** Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt für jedes Ereignis A aus der terminalen σ-Algebra $\mathcal{T}$, dass

$$\mathbb{P}[A] = 0 \text{ oder } \mathbb{P}[A] = 1.$$

Aufgabe 67. Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergiert}\right] \in \{0, 1\}.$$

Aufgabe 68. Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen

$$\liminf_{n\to\infty} X_n, \quad \limsup_{n\to\infty} X_n, \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

fast sicher konstant sind. [In dieser Aufgabe lassen wir zu, dass Zufallsvariablen die Werte $\pm\infty$ annehmen].

1.10 Der Dreireihensatz von Kolmogorow

Satz 1.21 (Einreihensatz von Kolmogorow)**.** Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_n = 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} X_n < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ fast sicher.

Aufgabe 69. Seien $\xi_1, \xi_2, \dots$ unabhängig standardnormalverteilt. Zeigen Sie, dass die zufällige Taylor–Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x^n$ für $|x| < 1$ mit Wahrscheinlichkeit 1 konvergiert.

Satz 1.22 (Dreireihensatz von Kolmogorow)**.** Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergiert fast sicher genau dann, wenn die folgenden Bedingungen für ein (äquivalent: für jedes) $A > 0$ erfüllt sind:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n| > A] < \infty$.

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{|X_n| \le A}]$ konvergiert.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var}[X_n \mathbb{1}_{|X_n| \le A}] < \infty$.

Aufgabe 70. Es seien $X_1, X_2, \dots$ und $Y_1, Y_2, \dots$ Zufallsvariablen mit $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X_n \neq Y_n] < \infty$. Zeigen Sie: $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergiert fast sicher genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ fast sicher konvergiert.

Aufgabe 71. Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[X_n = \pm 1] = 1/2$. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ konvergiert fast sicher genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

Aufgabe 72. Seien $\xi_1, \xi_2, \dots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\xi_n = +1] = \mathbb{P}[\xi_n = -1] = 1/2$. Welche der folgenden Reihen konvergieren mit Wahrscheinlichkeit 1 und welche mit Wahrscheinlichkeit 0?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\sqrt{n}}$.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi_n}{\sqrt{n} \log n}$.

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi_n}{\sqrt{n \log n}}$.

Aufgabe 73. Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit $X_n \geq 0$. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergiert mit Wahrscheinlichkeit 1 genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \min(1, X_n)$ fast sicher konvergiert.

Aufgabe 74. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig standard normalverteilt. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ konvergiert fast sicher genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

Hinweis für die Hinrichtung: Aus der fast sicheren Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ folgt, dass die Partialsummen in Verteilung konvergieren. Daraus folgt die Konvergenz der charakteristischen Funktionen. Diese können explizit berechnet werden.

Aufgabe 75. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig standard Cauchy-verteilt. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ konvergiert fast sicher genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

1.11 Verschiedenes

Aufgabe 76. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim U[0,1]$. Sei N die größte Zahl mit der Eigenschaft, dass die endliche Folge $X_1, X_2, \ldots, X_N$ monoton ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}N = 2e - 3$.

Hinweis: Bestimmen Sie $\mathbb{P}[N \geq k]$ für $k = 1, 2, \ldots$.

Aufgabe 77. Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie

$$\mathbb{P}[\text{Mindestens eine der Zahlen } \{\xi_1, \xi_2, \ldots\} \text{ ist rational}].$$

Aufgabe 78. Die Euler'sche φ-Funktion ist folgendermaßen definiert: $\varphi(n)$ ist die Anzahl der Zahlen unter $1, 2, \ldots, n$, die teilerfremd zu n sind. Beweisen Sie die Euler'sche Formel

$$\varphi(n) = n \prod_{p\,:\,\text{Primteiler von } n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Mitteln.