

# Stochastik

## Aufgaben zum Üben: Teil 1

Ergebnisse zur eigenen Kontrolle

Bitte beachten Sie, dass das keine Musterlösungen sind!

### Aufgabe 1:

- a)  $\{1, \dots, 6\}^3$ ;  
b)  $\frac{4^3 - 3^3}{6^3} = \frac{37}{216}$ ;  
c)  $\frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}$ ;  
d)  $\frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{54}$ .

### Aufgabe 2:

- a)  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.665102$ ;  
b)  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} = 0.618667$ ;  
c)  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{18} - 18 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{17} - \binom{18}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{16} = 0.597346$ .  
Ereignis aus Teil a hat die größte Wahrscheinlichkeit.

### Aufgabe 3:

- a)  $\frac{30}{36}$ ;  
b)  $\frac{4}{30}$ ;  
c)  $\frac{4}{5}$ .

### Aufgabe 4:

- a)  $\frac{\binom{25}{6}}{\binom{49}{6}} = 0.01266$ ;  
b)  $\frac{1 + 43 \cdot 6}{\binom{49}{6}} = 0.00001852$ ;  
c)  $1 - \left(1 - \frac{1}{\binom{49}{6}}\right)^3 = 2.14534 \cdot 10^{-7}$ .

**Aufgabe 5:**  $\frac{\binom{26}{13} \cdot \binom{26}{13}}{\binom{52}{26}} = 0.2181$ .

**Aufgabe 6:**  $\frac{2}{11} = 0.18181818 \dots$

### Aufgabe 7:

- a)  $\frac{n}{k}$ ;  
b)  $\frac{\binom{k-2}{n-2}}{\binom{k}{n}} - \frac{n^2}{k^2} = \frac{n(n-k)}{k^2(k-1)}$ .

**Aufgabe 8:**  $\frac{p_1(1-p_2)}{p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)}$ .

### Aufgabe 9:

- a)  $0.21 \cdot (1 - 0.51) + 0.13 \cdot 0.51 = 0.1692$ ;  
b)  $\frac{0.21 \cdot (1 - 0.51)}{0.21 \cdot (1 - 0.51) + 0.13 \cdot 0.51} = 0.608156$ .

**Aufgabe 10:**  $p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)$ .

### Aufgabe 11:

$$\frac{\binom{30}{7} \cdot \binom{20}{3} + \binom{30}{8} \cdot \binom{20}{2} + \binom{30}{9} \cdot \binom{20}{1} + \binom{30}{10}}{\binom{50}{10}}.$$

**Aufgabe 12:**

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{5}.$$

**Aufgabe 13:**

$$\text{a) } \frac{\binom{10}{5} \cdot \binom{8}{5}}{\binom{18}{10}} = 0.322501;$$

$$\text{b) } \binom{10}{3,2,5} \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{18}\right)^2 \cdot \left(\frac{10}{18}\right)^5 = 0.0794014.$$

**Aufgabe 14:**

$$\text{a) Exakt: Mit } p = \frac{1}{1000}, q = \frac{999}{1000}, n = 2000: 1 - q^n - npq^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}q^{n-2}p^2 = 0.323324.$$

$$\text{b) Approximativ: } 1 - 5e^{-2}.$$

**Aufgabe 15:**

$$\text{Exakt: } 1 - \left(\frac{1023}{1024}\right)^{1000} = 0.623576. \text{ Approximativ: } 1 - e^{-\frac{1000}{1024}} = 0.623397.$$

**Aufgabe 16:**

Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei  $n$  Experimenten mit zwei fairen Würfeln kein einziges mal die Augensumme 12 gewürfelt hat, ist  $\left(\frac{35}{36}\right)^n$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens einmal die Augensumme 12 gewürfelt hat, ist  $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$ . Für  $n = 24$  und  $n = 25$  haben wir

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.491404 < 0.5, \quad 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} = 0.505532 > 0.5.$$

Also muss man 25-mal würfeln.

**Aufgabe 17:**

Hinweis zu Teil a: Die symmetrische Differenz  $A_1 \Delta A_2$  ist eine disjunkte Vereinigung von  $A_1 \setminus A_2$  und  $A_2 \setminus A_1$ . Aus  $\mathbb{P}[A_1 \Delta A_2] = 0$  folgt, dass  $\mathbb{P}[A_1 \setminus A_2] + \mathbb{P}[A_2 \setminus A_1] = 0$ . Somit müssen beide Summanden gleich 0 sein, d.h.  $\mathbb{P}[A_1 \setminus A_2] = \mathbb{P}[A_2 \setminus A_1] = 0$ . Nun gilt

$$\mathbb{P}[A_1] = \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] + \mathbb{P}[A_1 \setminus A_2] = \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] + \mathbb{P}[A_2 \setminus A_1] = \mathbb{P}[A_2].$$

Hinweis bei Teil b: Beweisen Sie die Ungleichung für  $n = 2$  und benutzen Sie danach die Induktion.

$$\text{Aufgabe 18: } \frac{7}{27}.$$

**Aufgabe 19:**

$$\text{a) } 6;$$

$$\text{b) } 6 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 14.7.$$

**Aufgabe 20:**

$$\text{a) } 2 \cdot \frac{20}{50} \cdot \frac{30}{49} = \frac{24}{49};$$

$$\text{b) } 2 \cdot \frac{20}{50} \cdot \frac{30}{50} = \frac{12}{25}.$$