Kapitel 7

Formale Logik

Die Fähigkeit, logische Schlüsse aus vorhandenen Informationen und Wissen zu ziehen, stellt ein wichtiges Merkmal intelligenten Verhaltens dar. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Modellierung dieser Fähigkeit bilden Methoden aus der formalen Logik.

7.1 Aussagenlogik

Die elementaren Bestandteile der Aussagenlogik sind:

- Aussagensymbole: P, Q, R, S, $\ldots$
  Sie stehen für Aussagen über die Welt, die entweder wahr oder falsch sein können. Z.B.
  P: Vorlesung KI interessiert mich
  Q: Im Vorlesungsverzeichnis steht KI
  R: Ich belege die Vorlesung KI
- Wahrheitssymbole: true, false

(Komplexe) Sätze werden unter Verwendung logischer Verknüpfungen aus diesen Symbolen aufgebaut.

Aufbau von Sätzen:

- Jedes Aussagensymbol und jedes Wahrheitssymbol ist ein (atomarer) Satz.
- $\neg$: Die Negation eines Satzes ist ein Satz.
- $\wedge$: Die Konjunktion bzw. Und-Verbindung zweier Sätze ist ein Satz.
- $\vee$: Die Disjunktion bzw. Oder-Verbindung zweier Sätze ist ein Satz.
- $\Rightarrow$: Die Implikation eines Satzes auf einen anderen ist ein Satz. Z.B.

  $$P \wedge Q \Rightarrow R$$

  $P \wedge Q$ ist die Prämisse, und R die Schlussfolgerung oder Konsequenz. Implikationen werden auch als Regeln bezeichnet.
- $\Leftrightarrow$: Die Äquivalenz zweier Sätze (genau dann, wenn) ist ein Satz.

Formale Grammatik der Aussagenlogik:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Satz} & \rightarrow & \text{AtomarerSatz} \mid \text{KomplexerSatz} \\
\text{AtomarerSatz} & \rightarrow & \text{true} \mid \text{false} \mid \text{Aussagensymbol} \\
\text{Aussagensymbol} & \rightarrow & P \mid Q \mid R \mid \cdots \\
\text{KomplexerSatz} & \rightarrow & \neg\text{Satz} \\
 & & \mid (\text{Satz} \wedge \text{Satz}) \\
 & & \mid (\text{Satz} \vee \text{Satz}) \\
 & & \mid (\text{Satz} \Rightarrow \text{Satz}) \\
 & & \mid (\text{Satz} \Leftrightarrow \text{Satz})
\end{array}$$

Bei Annahme einer Prioritätsreihenfolge (vor der höchsten zur niedrigsten: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) können die Klammern zur besseren Klarheit weggelassen werden.

In der Aussagenlogik legt eine **Interpretation** den Wahrheitswert für jedes Aussagensymbol fest. Die **Semantik** gibt an, wie der Wahrheitswert beliebiger Sätze für eine vorgegebene Interpretation berechnet werden kann. Dies erfolgt rekursiv von den atomaren Sätzen ausgehend:

- Das Wahrheitssymbol true ist immer wahr, und false immer falsch.
- Der Wahrheitswert eines jeden Aussagensymbols ist direkt durch die Interpretation gegeben.
- Der Wahrheitswert eines komplexen Satzes ergibt sich aus den Wahrheitswerten einfacherer Sätze durch die Tabelle:

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
false	false	true	false	false	true	true
false	true	true	false	true	true	false
true	false	false	false	true	false	false
true	true	false	true	true	true	true

Das Ziel der logischen **Inferenz** ist zu entscheiden, ob ein bestimmter Satz als Konsequenz einer vorgegebenen Wissensbasis (bestehend aus Sätzen mit Wahrheitswert true) gilt.

Beispiel: Wissensbasis

$$P, \quad Q, \quad P \wedge Q \Rightarrow R$$

Dann gilt R als eine logische Konsequenz.

Zwei Ausdrücke der Aussagenlogik sind logisch *äquivalent* wenn sie bei allen Wahrheitszuweisungen den gleichen Wert haben.

Wichtige äquivalente Ausdrücke:

$$\neg(\neg P) = P$$

$$P \Rightarrow Q = \neg P \vee Q$$

$$P \Leftrightarrow Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

Gesetz der vollständigen Kontraposition:

$$P \Rightarrow Q = (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

de-Morgan-Regeln:

$$\begin{aligned} \neg(P \vee Q) &= (\neg P \wedge \neg Q) \\ \neg(P \wedge Q) &= (\neg P \vee \neg Q) \end{aligned}$$

Kommutativgesetze:

$$\begin{aligned} (P \wedge Q) &= (Q \wedge P) \\ (P \vee Q) &= (Q \vee P) \end{aligned}$$

Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned} (P \wedge Q) \wedge R &= P \wedge (Q \wedge R) \\ (P \vee Q) \vee R &= P \vee (Q \vee R) \end{aligned}$$

Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} P \vee (Q \wedge R) &= (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \\ P \wedge (Q \vee R) &= (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \end{aligned}$$

7.2 Prädikatenlogik erster Ordnung

In der Aussagenlogik steht jedes Symbol für eine komplette Aussage und es ist nicht möglich, auf die einzelnen Komponenten der Aussage zuzugreifen. Genau diese Möglichkeit bietet die Prädikatenlogik mit höherer Repräsentationsmächtigkeit.

Beispiel:

INTERESSE(x): Vorlesung x interessiert mich
ANGEBOT(x): Im Vorlesungsverzeichnis steht x
BELEGUNG(x): Ich belege die Vorlesung x

INTERESSE(x) $\wedge$ ANGEBOT(x) $\Rightarrow$ BELEGUNG(x)

Die elementaren Bestandteile des Prädikatenlogik sind:

- **Prädikatensymbole**, z.B.
  HUMAN (SOCRATES), AGE(BILL, 28), MARRIED(MARRY, FRED)
- **Konstantensymbole**, z.B.
  SOCRATES, BILL, 28, FRED, MARRY
- **Variablensymbole**, z.B.
  AGE(x,28), MARRIED(x, y)
- **Funktionsymbole**, z.B.
  $father$(MARY), age(BILL), $wife$(FRED)

Mit Hilfe dieser elementaren Bestandteile lassen sich nach bestimmten syntaktischen Regeln komplexere Formeln bilden.

- Ein **Term** ist entweder ein Konstantensymbol oder ein Variablensymbol oder ein Funktionssymbol mit Termen als Argumenten, z.B. SOCRATES, x, $father$(MARY), age($father$(BILL))
- Eine **atomare Formel** besteht aus einem Prädikatensymbol mit Termen als Argumenten, z.B. HUMAN(SOCRATES), AGE(BILL,x), MARRIED(x,$brother$(JIM))
- Eine **wohlgeformte Formel** (wff) ist entweder eine atomare Formel oder geht aus wff durch Anwendung der Konnektoren $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ $, \Leftrightarrow$ und Quantoren $(\forall x)$ und $(\exists x)$ hervor, z.B.
  $(\forall x)\ \big(\text{INTERESSE}(x) \wedge \text{ANGEBOT}(x) \Rightarrow \text{BELEGUNG}(x)\big)$
  $(\forall x)\ \big(\text{APFEL}(x) \Rightarrow \text{ROT}(x) \vee \text{GRÜN}(x)\big)$
  $(\forall x)\ \big(\text{HUMAN}(x) \Rightarrow (\exists y)(\text{MOTHER-OF}(x, y))\big)$

Die Quantoren ermöglichen, Eigenschaften einer ganzen Objektklasse auszudrücken.

Variablen im Bereich eines $\forall$- oder $\exists$-Quantors nennt man *gebundene* Variablen. Befindet sich eine Variable nicht im Bereich eines Quantors, so nennt man sie *freie* Variable. Ein *Satz* ist eine wff ohne freie Variablen. Üblicherweise sind die auftretenden wff ausschließlich Sätze. Eine atomare Formel oder deren Negation nennt man auch *Literal*.

Verschachtelte Quantoren:
Häufig wollen wir komplexere Sätze unter Verwendung mehrerer Quantoren ausdrücken.

- Quantoren vom gleichen Typ: Z.B. kann der Satz "Brüder sind auch Geschwister" geschrieben werden als:

$$\forall x \forall y \ \mathrm{BRUDER}(x, y) \ \Rightarrow \ \mathrm{GESCHWISTER}(x, y)$$

- Gemischte Typen: "Jeder liebt jemanden" bedeutet

$$\forall x \exists y \ \mathrm{LIEBT}(x, y)$$

  Um dagegen zu sagen: "Eg gibt jemanden, der von jedem geliebt wird" schreiben wir

$$\exists y \forall x \ \mathrm{LIEBT}(x, y)$$

  Hier spielt die Reihenfolge der Quantoren eine wichtige Rolle.

Verbindungen zwischen $\forall$ und $\exists$:
$\forall$ ist eigentlich eine Konjunktion über das Universum der Objekte und $\exists$ eine Disjunktion. Daher ist es nicht überraschend, dass sie den de-Morgan-Regeln gehorchen.

$$\begin{array}{rclcrcl} \forall x(P) & \equiv & \neg \exists x(\neg P) & \qquad & P \wedge Q & \equiv & \neg(\neg P \vee \neg Q) \\ \exists x(P) & \equiv & \neg \forall x(\neg P) & \qquad & P \vee Q & \equiv & \neg(\neg P \wedge \neg Q) \end{array}$$

Wir brauchen also nicht $\forall$ und $\exists$ zusammen, eben so wie $\wedge$ und $\vee$. Aus Gründen der Lesbarkeit behalten wir jedoch beide Quantoren bei.

Prädikatenlogik k-ter Ordnung:

- In der Prädikatenlogik 0. Ordnung (Aussagenlogik) sind weder Quantoren noch Variablen erlaubt.
- In der Prädikatenlogik 2. Ordnung dürfen Variablen und Quantoren auch für Prädikate und Relationen verwendet werden.

Die Prädikatenlogik 0. Ordnung ist in ihrer Ausdrucksfähigkeit stark eingeschränkt. Dagegen ergeben sich bei der Prädikatenlogik 2. Ordnung ernsthafte Probleme berechenbarkeitstheoretischer Natur.

Eine **Interpretation** einer wff ist eine Zuordnung der Symbole zu einem Problembereich in folgender Art:

Symbole in wff	Problembereich
Prädikatensymbole	Relationen, z.B. MARRIED
Konstantensymbole	Objekte, z.B. MARY
Funktionensymbole	Funktionen, z.B. $age(x)$
Variablensymbole	Variablen über Objekten

Für eine wff ergibt sich bei gegebener Interpretation ein Wahrheitswert true oder false, z.B.

MARRIED(BILL, HILLARY) = true
MARRIED(BILL, MONICA) = false

Eine Interpretation I, die für eine wff α den Wahrheitswert true liefert, **erfüllt** α. Man sagt auch, dass I ein *Modell* von α ist.

Eine wff α **folgt logisch** aus einer Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ von wff g.d.w. jede Interpretation, die $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ erfüllt, auch α erfüllt.

Eine **Inferenz-Regel** ist eine Vorschrift zur Ableitung einer wff α aus einer Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ vorgegebener wff. Ein System von Inferenz-Regeln heisst

- **vollständig** g.d.w. alle wff, die logisch aus einer beliebigen Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ folgen, ableitbar sind;
- **widerspruchsfrei** g.d.w. jede aus einer beliebigen Menge von wff $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ableitbare wff α logisch aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ folgt.

Beispiel: Inferenz-Regeln

- Modus Ponens: $$\frac{\begin{array}{cc} W_1 & (\alpha_1) \\ W_1 \Rightarrow W_2 & (\alpha_2) \end{array}}{\begin{array}{cc} W_2 & (\alpha) \end{array}}$$

- Spezialisierung: $$\frac{(\forall\, x)(W(x)) \quad (\alpha_1)}{W(A) \qquad (\alpha)}$$

7.3 Inferenz durch Resolution

Im folgenden wird die Resolutionsregel, eine spezielle Inferenz-Regel, eingeführt. Sie hat folgende Form:

$$\begin{array}{cc} P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n & (\alpha_1) \\ \neg P_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_m & (\alpha_2) \\ \hline P_2 \vee \cdots \vee P_n \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_m & (\alpha) \end{array} \qquad n, m \geq 1$$

Hierbei sind die P_i und Q_j Literale (atomare Formeln oder deren Negation), α_1 und α_2 heissen *Vorgänger* der Regel und α die *Resolvente.*

Beispiel:

$$\begin{array}{c} \mathrm{ON}(B, A) \vee \mathrm{ABOVE}(B, A) \\ \neg\ \mathrm{ABOVE}(B, A) \vee \mathrm{ON}(B, \mathrm{TABLE}) \\ \hline \mathrm{ON}(B, A) \vee \mathrm{ON}(B, \mathrm{TABLE}) \end{array}$$

Bei der Anwendung der Resolutionsregel wird vorausgesetzt, dass α_1 und α_2 aus der Disjunktion von Literalen bestehen. Diese Form nennt man auch **Klausel-Form** (clause form).

Die Korrektheit der Resolutionsregel lässt sich informell anhand der Wahrheitstafel zeigen.

$$\frac{\begin{array}{ccc} E_1 & \vee & E_2 \\ \neg E_2 & \vee & E_3 \end{array}}{\begin{array}{ccc} E_1 & \vee & E_3 \end{array}}$$

E_1	E_2	E_3	$E_1 \vee E_2$	$\neg E_2 \vee E_3$	$E_1 \vee E_3$	
0	0	0	0	1	0	
0	0	1	0	1	1	
0	1	0	1	0	0	
0	1	1	1	1	1	x
1	0	0	1	1	1	x
1	0	1	1	1	1	x
1	1	0	1	0	1	
1	1	1	1	1	1	x

Gezeigt wird hierbei, dass die Formel

$$(E_1 \vee E_2) \;\wedge\; (\neg E_2 \vee E_3) \quad \Rightarrow \quad (E_1 \vee E_3)$$

unter allen möglichen Wahrheitsbelegungen von E_1, E_2 und E_3 immer den Wahrheitswert true liefert.

Einige Spezialfälle der Resolutionsregel:

Resolutionsregel:

$$\begin{array}{rcr} P & \vee & Q \\ \neg Q & \vee & R \\ \hline P & \vee & R \end{array}$$

Spezialfälle:

$$\begin{array}{rcr} P & & \\ \neg P & \vee & Q \\ \hline & Q & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} P & \vee & Q \\ \neg P & \vee & Q \\ \hline Q & \vee & Q \end{array} \equiv Q$$

$$\begin{array}{rcr} P & \vee & Q \\ \neg P & \vee & \neg Q \\ \hline Q & \vee & \neg Q \end{array} \text{ und } \quad P \vee \neg P$$

$$\begin{array}{c} P \\ \neg P \\ \hline \text{NIL} \end{array}$$

Umformung einer wff in Klausel-Form:
Bei der Anwendung der Resolutionsregel wird vorausgesetzt, dass α_1 und α_2 in der Klausel-Form sind. Die folgende Prozedur dient dazu, eine Menge von wff in Klausel-Form umzuformen.

1. Eliminiere $\Leftrightarrow$ durch Ersetzen von $X_1 \Leftrightarrow X_2$ durch $(X_1 \Rightarrow X_2) \wedge (X_2 \Rightarrow X_1)$
2. Eliminiere $\Rightarrow$ durch Ersetzen von $X_1 \Rightarrow X_2$ durch $\neg X_1 \vee X_2$.
3. Schränke den Bereich von $\neg$ auf atomare Formeln ein durch folgende Umformungen:

   $\neg(X_1 \wedge X_2)$ wird ersetzt durch $(\neg X_1) \vee (\neg X_2)$
   $\neg(X_1 \vee X_2)$ wird ersetzt durch $(\neg X_1) \wedge (\neg X_2)$
   $\neg(\neg X)$ wird ersetzt durch X
   $\neg(\forall x P(x))$ wird ersetzt durch $\exists x(\neg P(x))$
   $\neg(\exists x P(x))$ wird ersetzt durch $\forall x(\neg P(x))$

4. Beseitige $\exists$-Quantoren durch Verwendung von *Skolem-Funktionen.* Ersetze jede existentiell quantifizierte Variable y durch $f(x_1, \ldots, x_n)$, wobei $x_1, \ldots, x_n$ alle universell quantifizierten Variablen sind, deren Quantoren einen Bereich besitzen, welcher den Bereich des betrachteten $\exists$-Quantors umfasst; f ist ein noch nicht verwendetes Funktionssymbol. Streiche $\exists$-Quantoren nach Ersetzung.

   Z.B. $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$ wird ersetzt durch $\forall x\, P(x, f(x))$
   $\forall x\, \forall y\, \exists z\, P(x, y, z)$ wird ersetzt durch $\forall x\, \forall y\, P(x, y, g(x, y))$

   Ersetze jede existentiell quantifizierte Variable, die nicht im Bereich eines $\forall$-Quantors liegt, durch eine (noch nicht verwendete) Konstante.

   Z.B. $\exists x\, P(x)$ wird ersetzt durch $P(A)$
   $\exists x\, \forall y\, P(x, y)$ wird ersetzt durch $\forall y\, P(A, y)$

5. Führe Variablenumbenennungen durch, so dass jeder Quantor eine eigene Variable besitzt.

   Z.B. $(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x)))$ wird ersetzt durch $(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall y\, Q(y))$

6. Schiebe $\forall$-Quantoren an den Anfang der betrachteten wff. (Das ist möglich, da die Variablen der verschiedenen $\forall$-Quantoren disjunkt sind).

   Z.B. $\forall x\, (P(x) \wedge \forall y\, Q(y))$ wird ersetzt durch $\forall x\, \forall y\, (P(x) \wedge Q(y))$
   $(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall y\, Q(y))$ wird ersetzt durch $\forall x\, \forall y\, (P(x) \wedge Q(y))$

7. Forme wff in konjunktive Normalform um, d.h.

   $X_1 \vee (X_2 \wedge X_3)$ wird ersetzt durch $(X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_3)$

8. Eliminiere alle $\forall$-Quantoren.

   Generelle Annahme: Nach Schritt 8 sind alle Variablen universell quantifiziert.

9. Löse $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n$ in die Menge $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ von wff auf.

   Beachte: Jedes X_i ist eine Disjunktion von atomaren Formeln oder der Negation atomarer Formeln. Die X_i werden auch *Klauseln* genannt. Eine atomare Formel oder deren Negation wird auch als *Literal* bezeichnet.

10. Führe Variablenumbenennung durch, so dass kein Variablensymbol in mehr als einer Klausel auftritt. (Das ist möglich, da z.B. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$ äquivalent zu $\forall x\, P(x) \wedge \forall y\, Q(y)$ ist.)

Beispiel:

$$
\begin{array}{lll}
\forall x[\ \mathrm{Brick}(x) \Longrightarrow & (\exists y[\ \mathrm{On}(x,y) \wedge \neg\mathrm{Pyramid}(y)] & \\
& \wedge \quad \neg\exists y[\ \mathrm{On}(x,y) \wedge\ \mathrm{On}(y,x)] & \\
& \wedge \quad \forall y[\neg\mathrm{Brick}(y) \Longrightarrow \neg\mathrm{Equal}(x,y)]])] &
\end{array}
$$

Schritt 2: Eliminiere $\Longrightarrow$

$$
\begin{array}{ll}
\forall x[\neg\mathrm{Brick}(x) \vee & (\exists y[\ \mathrm{On}(x,y) \wedge \neg\mathrm{Pyramid}(y)] \\
& \wedge \quad \neg\exists y[\ \mathrm{On}(x,y) \wedge\ \mathrm{On}(y,x)] \\
& \wedge \quad \forall y[\neg(\neg\mathrm{Brick}(y)) \vee \neg\mathrm{Equal}(x,y)]])]
\end{array}
$$

Schritt 3: "$\neg$"

$$
\begin{array}{ll}
\forall x[\neg\mathrm{Brick}(x) \vee & (\exists y[\ \mathrm{On}(x,y) \wedge \neg\mathrm{Pyramid}(y)] \\
& \wedge \quad \forall y[\neg\mathrm{On}(x,y) \vee \neg\mathrm{On}(y,x)] \\
& \wedge \quad \forall y[\mathrm{Brick}(y) \vee \neg\mathrm{Equal}(x,y)]])]
\end{array}
$$

Schritt 4: Skolem - Funktionen

$$
\begin{array}{ll}
\forall x[\neg\mathrm{Brick}(x) \vee & ((\ \mathrm{On}(x, support(x)) \wedge \neg\mathrm{Pyramid}(support(x))) \\
& \wedge \quad \forall y[\neg\mathrm{On}(x,y) \vee \neg\mathrm{On}(y,x)] \\
& \wedge \quad \forall y[\mathrm{Brick}(y) \vee \neg\mathrm{Equal}(x,y)]])]
\end{array}
$$

Schritt 5: Variablen - Umbenennungen

$$
\begin{array}{ll}
\forall x[\neg\mathrm{Brick}(x) \vee & ((\ \mathrm{On}(x, support(x)) \wedge \neg\mathrm{Pyramid}(support(x))) \\
& \wedge \quad \forall y[\neg\mathrm{On}(x,y) \vee \neg\mathrm{On}(y,x)] \\
& \wedge \quad \forall z[\mathrm{Brick}(z) \vee \neg\mathrm{Equal}(x,z)]])]
\end{array}
$$

Schritt 6: $\forall$ - Quantoren

$$
\begin{array}{lll}
\text{—— A ——} & \text{—————— B ——————} & \\
\forall x \forall y \forall z[\neg\mathrm{Brick}(x) \vee & ((\mathrm{On}(x, support(x)) \wedge \neg\mathrm{Pyramid}(support(x))) & \\
& \wedge \quad (\neg\mathrm{On}(x,y) \vee \neg\mathrm{On}(y,x)) & \mathrm{C} \\
& \wedge \quad (\mathrm{Brick}(z) \vee \neg\mathrm{Equal}(x,z)))] & \mathrm{D}
\end{array}
$$

Schema: A $\vee$ (B $\wedge$ C $\wedge$ D)

Schritt 7: Konjunktive Normalform

a) $\forall x \forall y \forall z \quad [(\neg \mathrm{Brick}(x) \vee (\mathrm{On}(x, support(x)) \wedge \neg \mathrm{Pyramid}(support(x)))$
$\wedge \quad (\neg \mathrm{Brick}(x) \vee \neg \mathrm{On}(x, y) \vee \neg \mathrm{On}(y, x))$
$\wedge \quad (\neg \mathrm{Brick}(x) \vee \mathrm{Brick}(z) \vee \neg \mathrm{Equal}(x, z))]$

Schema: $(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{C}) \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{D})$

b) $\forall x \forall y \forall z \quad [(\neg \mathrm{Brick}(x) \vee \mathrm{On}(x, support(x)))$
$\wedge \quad (\neg \mathrm{Brick}(x) \vee \neg \mathrm{Pyramid}(support(x)))$
$\wedge \quad (\neg \mathrm{Brick}(x) \vee \neg \mathrm{On}(x, y) \vee \neg \mathrm{On}(y, x))$
$\wedge \quad (\neg \mathrm{Brick}(x) \vee \mathrm{Brick}(z) \vee \neg \mathrm{Equal}(x, z))]$

Schritt 8,9:

$$(\neg \mathrm{Brick}(x) \vee \mathrm{On}(x, support(x)))$$
$$(\neg \mathrm{Brick}(x) \vee \neg \mathrm{Pyramid}(support(x)))$$
$$(\neg \mathrm{Brick}(x) \vee \neg \mathrm{On}(x, y) \vee \neg \mathrm{On}(y, x))$$
$$(\neg \mathrm{Brick}(x) \vee \mathrm{Brick}(z) \vee \neg \mathrm{Equal}(x, z))$$

Schritt 10: Umbenennung

$$\neg \mathrm{Brick}(x) \vee \mathrm{On}(x, support(x))$$
$$\neg \mathrm{Brick}(w) \vee \neg \mathrm{Pyramid}(support(w))$$
$$\neg \mathrm{Brick}(u) \vee \neg \mathrm{On}(u, y) \vee \neg \mathrm{On}(y, u)$$
$$\neg \mathrm{Brick}(v) \vee \mathrm{Brick}(z) \vee \neg \mathrm{Equal}(v, z)$$