05.12.2014

8.Übungsblatt (mit einer Lösung ...)
Topologie WS 2014/15 (Weiss)

1. Umkehrung von Proposition 8.11 in Lecture Notes beweisen. Genauer: Sei Y wegzusammenhängender Raum mit Grundpunkt $\star \in Y$. Es wird angenommen, dass die Diagonalabbildung

$$Y \longrightarrow \underbrace{Y \times Y \times \cdots \times Y}_{r}$$

homotop ist zu einer Abbildung g mit der Eigenschaft $g(Y) \subset \bigcup_{i=1}^{r} Y^{i-1} \times \{\star\} \times Y^{r-i}$. *Ausserdem* soll der Grundpunkt $\star$ wenigstens eine Umgebung V in Y besitzen, so dass die Inklusion $V \to Y$ nullhomotop ist. *Dann* soll gezeigt werden: Y hat LS-Invariante $\leq r-1$. (Siehe Def. 8.7 in Lecture Notes, Fassung vom 5.12. oder danach.) [8]

2. *Gemeine Fragen über Abbildungszykel.*

a) Hier soll ein Abbildungszykel $f\colon S^1 \to S^1$ gebaut und untersucht werden. Wir fassen S^1 als Einheitskreis in $\mathbb{C}$ auf. Sei $V_1 = S^1 \smallsetminus \{1\}$ und $V_2 = S^1 \smallsetminus \{-1\}$, so dass $S^1 = V_1 \cup V_2$. Es gibt drei stetige Funktionen $s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}\colon V_i \to S^1$, die den Namen *dritte Wurzel* verdienen. Man setze

$$f|_{V_i} := 1 \cdot s_{i1} + 1 \cdot s_{i2} + 1 \cdot s_{i3}$$

für $i = 1, 2$ (formale Linearkombination! nicht als Addition in $\mathbb{C}$ missverstehen). Diese Definitionen stimmen auf $V_1 \cap V_2$ überein. Deswegen ist damit ein Abbildungszykel $f\colon S^1 \to S^1$ definiert.[1] **Frage**: Welches Element von $[[S^1, S^1]]/[[\star, S^1]] = H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ wird durch $[[f]]$ bestimmt? Die Hauptkandidaten sind natürlich 1 und 3. [6]

b) Hier soll ein Abbildungszykel $g\colon \mathbb{R}P^2 \to S^2$ gebaut und untersucht werden. Sei $p\colon S^2 \to \mathbb{R}P^2$ die übliche Projektion. Man schreibe wie üblich $\mathbb{R}P^2$ als Vereinigung von drei offenen Mengen U_1, U_2 und U_3 derart, dass $p^{-1}(U_i)$ aus allen Elementen von $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ besteht, deren i-te Koordinate von 0 verschieden ist. Für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ gibt es zwei stetige Abbildungen $s_{i1}, s_{i2}\colon U_1 \to S^2$, die den Namen p^{-1} verdienen. Definiere

$$g|_{U_i} := 1 \cdot s_{i1} + 1 \cdot s_{i2}$$

(formale Linearkombination! nicht als Addition in $\mathbb{R}^3$ missverstehen). Diese Definitionen passen zusammen auf $U_1 \cap U_2$ bzw. $U_2 \cap U_3$ bzw. $U_1 \cap U_3$. Deswegen ist damit ein Abbildungszykel $g\colon \mathbb{R}P^2 \to S^2$ definiert.[2] **Frage**: Welches Element von $[[\mathbb{R}P^2, S^2]]/[[\mathbb{R}P^2, \star]] = H^2(\mathbb{R}P^2)$ wird durch $[[g]]$ bestimmt? Dazu sollten Sie erst $H^2(\mathbb{R}P^2)$ ausrechnen. Hinweis: $H^2(\mathbb{R}P^2)$ ist nicht 0 und ist auch nicht $\cong \mathbb{Z}$. [6]

Alles zur Abgabe am Freitag 12.12. vor 16:00.

---

[1] Man kann ihn *nicht* als formale Summe von drei stetigen Abbildungen $S^1 \to S^1$ beschreiben. Das hat etwas damit zu tun, dass die Abbildung $S^1 \to S^1$; $z \mapsto z^3$, obwohl sie ein Faserbündel ist, kein triviales Faserbündel ist. Notfalls davon Bild malen.

[2] Man kann ihn *nicht* als formale Summe von zwei stetigen Abbildungen $\mathbb{R}P^2 \to S^2$ beschreiben. Die Abbildung $p\colon S^2 \to \mathbb{R}P^2$ ist ein Faserbündel, aber kein triviales Faserbündel.

Eine Lösung zu 2b). Sei $q\colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2/\mathbb{R}P^1$ die Quotientenabbildung. Beachten, dass $\mathbb{R}P^2/\mathbb{R}P^1 \cong S^2$. Idee: wir wählen ein gewisses $z \in S^2$ und konstruieren Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R}P^2/\mathbb{R}P^1 \to S^2$ derart, dass der Abbildungszykel $g - fq\colon \mathbb{R}P^2 \to S^2$ beschrieben werden kann als Abbildungszykel $\mathbb{R}P^2 \to S^2 \smallsetminus \{z\}$ gefolgt von Inklusion $S^2 \smallsetminus \{z\} \to S^2$. Angenommen, das geht (Argument weiter unten); dann kann man so argumentieren.

(i) Weil $S^2 \smallsetminus \{z\}$ zusammenziehbar ist, ist $g - fq$ homotop zu einem Abbildungszykel $\mathbb{R}P^2 \to \star$ gefolgt von Abbildung $\star \to S^2$. Also repräsentiert $g - fq$ das Element $0 \in H^2(\mathbb{R}P^2)$. Also: g und fq repräsentieren dasselbe Element von $H^2(\mathbb{R}P^2)$.

(ii) $H^2(\mathbb{R}P^2/\mathbb{R}P^1) \cong H^2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ und f stellt einen Erzeuger von $H^2(\mathbb{R}P^2/\mathbb{R}P^1)$ dar. (Falls nicht überzeugt: betrachte Isomorphismus f^* von $H^2(S^2)$ nach $H^2(\mathbb{R}P^2/\mathbb{R}P^1)$ und frage, was er mit der Klasse von $\mathrm{id}\colon S^2 \to S^2$ macht. Ausserdem wichtiger Remark 7.2.7.)

(iii) Wie sieht $q^*\colon H^2(\mathbb{R}P^2/\mathbb{R}P^1) \to H^2(\mathbb{R}P^2)$ aus? Das kann man mit den zellulären Kettenkomplexen gut ausrechnen. Sieht aus wie ein surjektiver Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/2$.

(iv) Es folgt

$$\begin{aligned} & \text{Klasse von } g \text{ in } H^2(\mathbb{R}P^2) = \text{Klasse von } fq \text{ in } H^2(\mathbb{R}P^2) \\ = \;& q^* \text{ von Klasse von } f \text{ in } H^2(\mathbb{R}P^2/\mathbb{R}P^1) = q^* \text{ von Erzeuger von } H^2\mathbb{R}P^2/\mathbb{R}P^1) \\ \neq \;& 0 \in H^2(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2. \end{aligned}$$

Jetzt muss noch der Homöomorphismus f konstruiert werden. Wähle $z = (0, 0, 1)$, so dass $z \notin S^1 \subset S^2$. Dann ist $p(z) \notin \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$, wobei $p\colon S^2 \to \mathbb{R}P^2$ wie in Aufgabenstellung. Wähle f so, dass $f(p(z)) = z$ und dass pf mit id übereinstimmt in einer kleinen offenen Umgebung U von $p(z)$ in $\mathbb{R}P^2 \smallsetminus \mathbb{R}P^1$. Das ist nicht schwer. Fertig.
(Um zu sehen, dass der Abbildungszykel $g - fq$ aufgefasst werden kann als Abbildungszykel von $\mathbb{R}P^2$ nach $S^2 \smallsetminus \{z\}$, sollte man ihn auf die offenen Teilmengen U und $\mathbb{R}P^2 \smallsetminus p(z)$ von $\mathbb{R}P^2$ einschränken.)

Antwort auf ähnliche Frage von Teilnehmer. Sei $f\colon S^1 \to S^1$ die Abbildung $z \mapsto z^2$, in komplexen Bezeichnungen. Es soll "explizit" gezeigt werden, dass der Abbildungszykel $f - 2 \cdot \mathrm{id}$ homotop ist zu einem konstanten Abbildungszykel.
Idee: wir konstruieren zwei stetige Abbildungen $g_1, g_2\colon S^1 \to S^1$ derart, dass $g_1, g_2 \simeq \mathrm{id}$ und ausserdem der Abbildungszykel $f - g_1 - g_2$ geschrieben werden kann als Abbildungszykel $S^1 \to S^1 \smallsetminus \{1\}$ gefolgt von Inklusion $S^1 \smallsetminus \{1\} \to S^1$. Angenommen, das geht. Dann kann man so argumentieren: $f - 2 \cdot \mathrm{id}$ ist homotop zu $f - g_1 - g_2$. Hier kann $f - g_1 - g_2$ als Abbildungszykel von S^1 nach $S^1 \smallsetminus \{1\}$ aufgefasst werden und ist damit homotop zu einem konstanten, weil $S^1 \smallsetminus \{1\}$ zusammenziehbar ist.
Wie können g_1 und g_2 gewählt werden? Wir wählen sie als Diffeomorphismen, aber so, dass g_1 mit f übereinstimmt in einer kleinen offenen Umgebung U von $1 \in S^1$, während g_2 mit f übereinstimmt in einer kleinen offenen Umgebung V von $-1 \in S^1$. Sowohl g_1 als auch g_2 müssen dann orientierungserhaltend sein; also haben beide den Grad 1.
(Um zu sehen, dass $f - g_1 - g_2$ als Abbildungszykel von S^1 nach $S^1 \smallsetminus \{1\}$ aufgefasst werden kann, soll man auf die offenen Teilmengen U, V und $S^1 \smallsetminus \{1, -1\}$ von S^1 einschränken.)