28.11.2014

7.Übungsblatt
Topologie WS 2014/15 (Weiss)

1. Man berechne die Kohomologiegruppe $H^k(S^n)$ für alle $n > 0$ und alle $k \geq 0$ (durch Induktion nach n unter Benutzung der langen exakten MV-Folge in Kohomologie). [3]

2. a) Zeigen[1], dass das externe Produkt $(u, v) \mapsto u \times v$ von Kohomologieklassen einen Isomorphismus gibt

$$\bigoplus_{p+q=k} H^p(S^m) \otimes H^q(S^n) \longrightarrow H^k(S^m \times S^n)$$

für alle $k \geq 0$ und $m, n > 0$. [7]

b) Mit Hilfe von Aufgabenteil a) soll das Cup-Produkt in $H^*(S^m \times S^n)$ bestimmt werden unter Benutzung der allgemeinen Formel

$$(u \times 1_Y) \smile (1_X \times v) = u \times v$$

wobei $u \in H^p(X)$, $v \in H^q(Y)$, $u \times v \in H^{p+q}(X \times Y)$, und $1_X \in H^0(X)$, $1_Y \in H^0(Y)$ die Einheiten für das Cup-Produkt sind. [2]

3. Eine stetige Abbildung $f\colon \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^2$ ist definiert durch

$$\big((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)\big) \longrightarrow (x_0y_0 : x_0y_1 + x_1y_0 : x_1y_1)\ .$$

(Dabei bezeichnet $(z_0 : z_1 : z_2 : \ldots : z_n)$ den 1-dimensionalen $\mathbb{C}$-linearen Unterraum von $\mathbb{C}^{n+1}$, der durch den Vektor $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ erzeugt wird. Es wird also vorausgesetzt, dass nicht alle Koordinaten z_i gleich Null sind.)

a) Zeigen, dass die Formel für f wirklich eine Abbildung nach $\mathbb{C}P^2$ definiert. [1]

b) Unter Benutzung von geeigneten CW-Strukturen auf $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ und $\mathbb{C}P^2$, bei denen f zellulär ist, soll

$$f^*\colon H^k(\mathbb{C}P^2) \longrightarrow H^k(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)$$

für alle $k \geq 0$ bestimmt werden.[2] [5]

c) Daraus soll durch Vergleich mit Aufgabe 2b) das Cup-Produkt in der Kohomologie von $\mathbb{C}P^2$ bestimmt werden. [2]

Alles zur Abgabe am Freitag 5.12. vor 16:00.

---

[1] Bei dieser Aufgabe wird Abbildunsgzykel-Kohomologie empfohlen, plus Natürlichkeitsargumente. Es sollte möglich sein, alle Abbildungszykel, die hier gebraucht werden, als formale Linearkombinationen von stetigen Abbildungen von S^m, S^n oder $S^m \times S^n$ nach S^p, S^q oder S^k zu beschreiben. Wenn das so ist, dann brauchen Sie sich nicht mit Keimen von stetigen Abbildungen zu plagen.
Ausserdem dürfen Sie sich daran erinnern, dass die Identität $S^m \to S^m$ einen Erzeuger von $H_m(S^m) = [[S^m, S^m]]/[[\star, S^m]] \cong \mathbb{Z}$ repräsentiert. (Vorlesungsnotizen Rem. 7.2.7.) Man kann übrigens eine CW-Struktur auf $S^m \times S^n$ benutzen, um die Kohomologie von $S^m \times S^n$ zu beschreiben. Damit ist es aber nicht getan.

[2] Die Erkenntnisse von Übungsblatt 5 könnten dabei nützlich sein.