14.11.2014

5.Übungsblatt
Topologie WS 2014/15 (Weiss)

1. Sei U eine offene Teilmenge von S^n, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, wobei $n > 0$. Sei U^c die Einpunktkompaktifizierung von U, auch geschrieben als $U \cup \{\infty\}$. Eine Abbildung $g\colon S^n \to U^c$ ist gegeben durch $x \mapsto x$ falls $x \in U$ und $x \mapsto \infty$ sonst. Man zeige, dass g stetig ist und einen Isomorphismus von $H_n(S^n)$ nach $H_n(U^c)$ induziert.[1] [6]

2. (Hier soll das Ergebnis von Aufgabe 1 benutzt werden, notfallls ohne Beweis.) Gegeben sei stetiges $f\colon S^n \to S^n$, wobei $n > 0$. Angenommen, es gibt einen kleinen offenen Ball $W \subset S^n$ derart, dass für jede Zusammenhangskomponente U_i von $f^{-1}(W)$ die Einschränkung $U_i \to W$ (von f) ein Homöomorphismus ist.

(a) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(W)$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten hat, also etwa $U_1, U_2, \ldots, U_k$. [2]

(b) Zeigen Sie, dass die stetige Abbildung $U_i^c \to W^c$ gegeben durch $x \mapsto f(x)$ für $x \in U_i$ einen Isomorphismus von $H_n(U_i^c)$ nach $H_n(W)$ induziert, für jedes i aus $\{1, 2, \ldots, k\}$. Benutzen Sie das, um eine Zahl $s_i \in \{-1, +1\}$ zu definieren, die das Orientierungsverhalten von f auf U_i beschreibt[2]. [2]

(c) Zeigen Sie, dass $\deg(f) = \sum_{i=1}^{k} s_i$. [4]
Anleitung: Sei $U = f^{-1}(W)$ mit Zusammenhangskomponenten U_i wie oben, und U^c die Einpunktkompaktifizierung von U. Bauen Sie ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ U^c & \longrightarrow & W^c \end{array}$$

und wenden Sie H_n darauf an.

3. Sei $f\colon S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung, wobei $n > 0$. Angenommen, es existiert $y \in S^n$, so dass $f^{-1}(y)$ nur ein Element x hat, und so dass f differenzierbar ist an der Stelle x mit einer ersten Ableitung, die als lineare Abbildung $T_x S^n \to T_y S^n$ ein Isomorphismus ist und als solcher orientierungserhaltend.[3] Zeigen Sie, dass f homotop zur Identität von S^n ist und deswegen den Grad 1 hat. [6]
Vorschlag: Sie können schreiben $S^n = \mathbb{R}^n \cup \infty$. OBdA ist $x = 0$ und $y = 0$. Reduzieren auf den Fall $f(\infty) = \infty$. Gute Definition von *differenzierbar an der Stelle* x benutzen. Eine Definition mit partiellen Ableitungen würde ich nicht empfehlen.

---

[1] *Hinweis.* Es genügt natürlich nicht, zu bemerken, dass $H_n(S^n)$ isomorph zu $H_n(U^c)$ ist, aber es hilft schon ein bisschen. Die Form von U als Teilmenge von S^n kann Schwierigkeiten machen. Es gibt aber kleinere offene Teilmengen von U, ebenfalls homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, deren Form hübscher ist.

[2] Hier geht es darum, zu sagen, was Orientierung bedeutet. Wenn Sie also schreiben *ich definiere* $s_i = +1$ *falls* f *orientierungserhaltend ist auf* U_i *und* $s_i = -1$ *sonst*, dann ist es nur ein schlechter Witz.

[3] An dieser Stelle darf und soll *Orientierung* im Sinn der reellen linearen Algebra verstanden werden. Eine geordnete Basis $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vom Tangentialraum $T_x S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gilt als positiv orientiert, wenn die Matrix mit den Spalten $x, v_1, v_2, \ldots, v_n$ positive Determinante hat. Warum ist $T_x S^n$ Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n+1}$? Weil S^n glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.