31.10.2014

3.Übungsblatt
Topologie WS 2014/15 (Weiss)

1. Gegeben Kettenkomplex C und Unterkomplexe A und B von C derart, dass $A + B = C$. (Hier handelt es sich um eine *interne* Summe; die Aussage ist also, dass jedes Element c von C_n sich schreiben lässt als $c = a + b$ mit $a \in A_n$ und $b \in B_n$.) Dann gibt es eine lange exakte Folge von Homologiegruppen der Form

$$\cdots \to H_n(A) \oplus H_n(B) \to H_n(C) \to H_{n-1}(A \cap B) \to H_{n-1}(A) \oplus H_{n-1}(B) \to H_{n-1}(C) \to \cdots$$

Wie erklären Sie das (unter Berufung auf Vorlesung vom Freitag 31.10.) ? [3]

2. a) Sei C ein Kettenkomplex von freien abelschen Gruppen mit $C_i = 0$ für $i < 0$. Zeigen Sie: Wenn $H_*(C) = 0$ ist, dann ist C zusammenziehbar (d.h. die Identitäts-Kettenabbildung ist kettenhomotop zur Null-Kettenabbildung). [5]

b) Wie a), nur ohne die Voraussetzung, dass $C_i = 0$ für $i < 0$. (Hinweis: Untergruppen von freien abelschen Gruppen sind freie abelsche Gruppen.) [3]

c) Jeder Kettenkomplex von endlich erzeugten freien abelschen Gruppen ist isomorph zu einer direkten Summe von Kettenkomplexen, die nur in zwei aufeinanderfolgenden Graden von Null verschieden sind. [4]

3. Gegeben sei Kettenkomplex C mit Unterkettenkomplexen B und A, wobei A in B enthalten ist. Dann ist bekanntlich $C/B \cong (C/A)/(B/A)$. Also gibt es einen Randoperator

$$\partial\colon H_n(C/B) \longrightarrow H_{n-1}(B/A).$$

Ausserdem gibt es den Randoperator

$$\partial\colon H_{n-1}(B/A) \to H_{n-2}(A)\ .$$

Es soll gezeigt werden, dass die Zusammensetzung dieser beiden gleich Null ist. [5]

Alles zur Abgabe am Freitag 7.11. vor 16:00.