24.10.2014

# 2.Übungsblatt
# Topologie WS 2014/15 (Weiss)

**1.** Sei $X$ ein CW-Raum und $A$ ein CW-Unterraum von $X$. Man zeige, dass für jedes $n \geq 0$ ein Pushoutquadrat der Form

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\lambda\in\Lambda} S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_{\lambda\in\Lambda} D^n \arrow[d] \\ X^{n-1} \cup A^n \arrow[r, "\text{Inklusion}"] & X^n \end{tikzcd}$$

existiert. [4]

**2.** Zeigen Sie: Jede stetige Abbildung von $S^m$ nach $S^n$ mit $n > m$ ist nullhomotop.[1] [1]

**3.** Aus Aufgabe 1 von Blatt 1 dürfen Sie herleiten: jeder Punkt in einem CW-Raum X hat eine zusammenziehbare Umgebung. [3]

**4.** a) Gegeben sei ein CW-Raum $X$ mit einem Grundpunkt $x_0$. Es sei angenommen, dass alle Zellen von $X$ die Dimension $< n$ haben. Ausserdem soll $\{x_0\}$ eine $0$-Zelle sein. Sei eine stetige Abbildung $g\colon S^{n-1} \to X$ gegeben. Man bilde einen neuen CW-Raum $Y$ als Pushout:

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & D^n \arrow[d, dotted] \\ X \arrow[r, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

(sodass dieses kommutative Quadrat ein Pushoutquadrat wird). Zeigen Sie: wenn $g$ homotop ist zur konstanten Abbildung mit Wert $x_0$, dann ist $Y$ homotopieäquivalent zu $X \vee S^n$, Einpunktsumme.[2] [7]

b) Aus a) soll hergeleitet werden, dass der Quotient $\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1$ homotopieäquivalent ist zu $S^2 \vee S^3$. [5]

*Alles zur Abgabe am Freitag 31.10. vor 16:00.*

[1] Wurde schon vor einem Jahr erfolglos als Aufgabe gestellt ... ist aber jetzt einfacher geworden.

[2] Das bedeutet: Quotientenraum von $X \sqcup S^n$, der entsteht, indem man $x_0$ in $X$ mit einem Grundpunkt in $S^n$ identifiziert.