17.10.2014

1.Übungsblatt
Topologie WS 2014/15 (Weiss)

1. Gegeben CW-Raum X und offene Teilmenge U vom Skelett X^{n-1}. Zeigen, dass offene Teilmenge V von X^n existiert derart, dass die Inklusion $U \to V$ eine Homotopieäquivalenz ist.[1]

2. In den Vorlesungsnotizen wird eine CW-Struktur auf dem Raum $G_{p,q}$ skizzenhaft beschrieben. Für jedes monotone surjektive f von $\{0, 1, \ldots, p+q\}$ nach $\{0, 1, \ldots, p\}$ wird ein Unterraum von $G_{p,q}$ definiert durch

$$Z_f = \{V \in G_{p,q} \mid f_V = f\}.$$

Dabei ist $f_V \colon \{0, 1, \ldots, p+q\} \to \{0, 1, \ldots, p\}$ die surjektive monotone Abbildung gegeben durch $f_V(k)$ gleich Dimension von $V \cap E(k)$, und $E(k) \subset \mathbb{R}^{p+q}$ ist der lineare Unterraum, der von den ersten k Basisvektoren erzeugt wird. Es müsste noch Folgendes gezeigt werden.

(a) Die in den Vorlesungsnotizen angegebene Abbildung $A_f \to G_{p,q}$ hat tatsächlich Bild Z_f und bestimmt einen Homöomorphismus $A_f \to Z_f$.

(b) Es gibt eine stetige Abbildung $\varphi_f \colon D^r \to G_{p,q}$ mit geeignetem r derart, dass φ_f eingeschränkt auf $D^r \setminus S^{r-1}$ einen Homöomorphismus von $D^r \setminus S^{r-1}$ nach Z_f ergibt.

(c) Ausserdem ist $\varphi_f(S^{r-1})$ enthalten in einer Vereinigung von gewissen Z_g, deren Dimension kleiner ist als die von Z_f.

Davon ist (b) der schwierigste Teil. Meine Hoffnung ist, dass Sie (a) benutzen können, um (b) zu zeigen. Dann sollte (c) nicht schwer sein.

Alles zur Abgabe am Freitag 24.01. vor 16:00. Punkte: 10, 3+5+2.

[1] Vorzugsweise V so konstruieren, dass eine Homotopie $(g_t \colon V \to V)_{t \in [0,1]}$ existiert mit $g_0 = \mathrm{id}_V$ und $g_1(V) \subset U$ und $g_t(x) = x$ für alle $x \in U$.