16.01.2015

12.Übungsblatt
Topologie WS 2014/15 (Weiss)

1. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(F, \star)$ einer orientierbaren Fläche F vom Geschlecht 2 ist gefragt. Dazu soll eine CW-Struktur für die Fläche benutzt werden (siehe Aufg. 2 von Übungsblatt 4) und dann Cor. 12.8 von Vorlesungsnotizen Woche 12. Die Gruppe $\pi_1(F, \star)$ soll durch Erzeuger und Relationen beschrieben werden.[1] [7]

2. Die Fundamentalgruppe der Kleinschen Fläche (oder auch Flasche) K soll durch direkte Benutzung von Seifert-van Kampen bestimmt werden. Dazu müssten also geeignete offene Teilmengen V, W von K ausgesucht werden.
Die Kleinsche Fläche oder Flasche K ist der Quotientenraum

$$\frac{S^1 \times S^1}{\sim}$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation erzeugt von $(x, y) \sim (\bar{x}, -y)$ ist; dabei $x, y \in \mathbb{C}$ mit $|x| = |y| = 1$ und $\bar{x} \in \mathbb{C}$ ist komplex-konjugiert zu x. [7]

3. Sei G eine topologische Gruppe.[2] Man zeige: $\pi_1(G, \star)$ ist kommutativ. Dabei ist $\star$ vorzugsweise das neutrale Element von G. [6]

Alles zur Abgabe am Freitag 23.01.2015 vor 16:00.

[1] Schreibweise etwa: $\langle S \,|\, T \rangle$. Bedeutung: S ist irgendeine Menge und T ist eine Teilmenge von F_S, der freien Gruppe, die von S erzeugt wird. Dann ist $\langle S \,|\, T \rangle = F_S / N_T$, wobei N_T die kleinste normale Untergruppe von F_S ist, die T enthält. Falls S und T endlich sind, spricht man von einer endlichen Präsentation. Man schreibt dann auch so etwas wie $\langle x_1, \ldots, x_p \,|\, w_1, \ldots, w_q \rangle$ falls $S = \{x_1, \ldots, x_p\}$ mit verschiedenen x_j und $T = \{w_1, \ldots, w_q\} \subset F_S$.

[2] Das heisst: ein Hausdorff-Raum G mit einer Abbildung $G \times G \to G$, die die üblichen Bedingungen für eine Gruppe erfüllt und dazu noch stetig ist. Ausserdem wird verlangt, dass die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ stetig ist.