09.01.2015

# 11.Übungsblatt
# Topologie WS 2014/15 (Weiss)

**1.** Gegeben seien Räume $X$ und $Y$ und Klassen $a \in H^m(X)$, $b \in H^n(Y)$. Schreibe $p_X\colon X \times Y \to X$ und $p_Y\colon X \times Y \to Y$ für die Projektionen. Man zeige:

$$p_X^*(a) \smile p_Y^*(b) = a \times b \in H^{m+n}(X \times Y)$$

wobei $a \times b$ das externe Produkt in der Kohomologie bezeichnet.[1] [4]

**2.** Für eine kompakte $n$-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit $M$ mit Rand gilt

$$\tilde{H}^k(M/\partial M) \cong H_{n-k}(M)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Leiten Sie das aus den Sätzen zur Poincaré-Dualität, Vorlesungsnotizen Woche 11, her.[2] [6]

**3.** Sei $X$ ein topologischer Raum. Das Skalarprodukt $\langle a, b\rangle$ von $a \in H^q(X)$ und $b \in H_q(X)$ ist definiert wie folgt. Wähle Abbildungszykel $\alpha\colon X \to S^q$ und $\beta\colon S^q \to X$, die $a$ und $b$ repräsentieren. Dann repräsentiert die Zusammensetzung

$$S^q \xrightarrow{\beta} X \xrightarrow{\alpha} S^q$$

ein Element von $\tilde{H}_q(S^q) = \mathbb{Z}$. Das ist $\langle a, b\rangle$.
Sei $p\colon X \to \star$ die eindeutige stetige Abbildung. Man zeige, dass $p_*(a \frown b) \in H_0(\star) = \mathbb{Z}$ mit $\langle a, b\rangle$ übereinstimmt (wobei $\frown$ natürlich das Cap-Produkt ist). [6]

**4.** Sei $X = \mathbb{C}P^2$. Es soll gezeigt werden, dass das Skalarprodukt $H^q(X) \times H_q(X) \to \mathbb{Z}$ für jedes $q$ nicht-ausgeartet ist. [4]

**5.** Mit Poincaré-Dualität und Aufgaben 2,3,4 kann die Ringstruktur von $H^*(\mathbb{C}P^2)$ mit Cup-Produkt bis auf Isomorphie formal bestimmt werden (wenn man schon die Gruppen $H_q(\mathbb{C}P^2)$ für alle $q$ kennt). Wie geht das? [0]

*Aufgaben 1-4 zur Abgabe am Freitag 16.01.2015 vor 16:00.*

---

[1] Diese Aufgabe erinnert an gewisse Aufgaben von älteren Übungsblättern, die etwas missglückt waren ... hoffentlich mehr Glück mit dieser Version.

[2] Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass die Inklusion $M \setminus \partial M \to M$ eine Homotopieäquivalenz ist. Eine Orientierung einer Mannigfaltigkeit $M$ mit Rand ist eine Orientierung von $M \setminus \partial M$. Ausserdem: um die Resultate aus den Vorlesungsnotizen benutzen zu können, brauchen Sie eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand. Woher soll diese kommen?