19.12.2014

10.Übungsblatt
Topologie WS 2014/15 (Weiss)

1. Sei $\mathcal{K}$ eine Menge von kompakten Teilmengen einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, die die folgenden Bedingungen erfüllt.

(a) $\emptyset \in \mathcal{K}$.

(b) Wenn A kompakte Teilmenge von M ist und es existieren eine offene Umgebung V von A in M und ein Homöomorphismus $V \to \mathbb{R}^n$, der A auf den Würfel $[0,1]^n$ abbildet, dann $A \in \mathcal{K}$.

(c) Wenn $(A_i)_{i=0,1,\ldots}$ eine absteigende Folge von kompakten Teilmengen von M ist und $A_i \in \mathcal{K}$ für alle i, dann $\bigcap_{i\geq 0} A_i \in \mathcal{K}$.

(d) Wenn $A_1 \in \mathcal{K}$, $A_2 \in \mathcal{K}$ und $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{K}$, dann gilt $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{K}$.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}$ die Menge *aller* kompakten Teilmengen von M ist. [7]

2. Gegeben kompakte (weg-)zusammenhängende Mannigfaltigkeiten M und N derselben Dimension n (ohne Rand). Beide sollen orientiert sein. Dann sind $H_n(M)$ und $H_n(N)$ beide mit $\mathbb{Z}$ identifiziert nach einem Satz aus der Vorlesung. **Definition:** Eine stetige Abbildung $f\colon M \to N$ hat den *Abbildungsgrad* $k \in \mathbb{Z}$, falls $f_*\colon H_n(M) \to H_n(N)$ Multiplikation mit k ist.
Sei jetzt $f\colon M \to N$ eine Überlagerung[1]. Die Anzahl der Elemente in jeder Faser sei ℓ. (Sie muss endlich sein wegen Kompaktheit und sie muss für alle Fasern gleich sein, weil N zusammenhängend ist und f Faserbündel ist.) Zeigen Sie, dass der Abbildungsgrad von f gleich $\pm\ell$ ist. [9]

3. In Remark 6.1.3 der Vorlesungsnotizen wird ein Beispiel gegeben von Räumen X und Y mit $Y = V \cup W$, wobei V und W offen in Y, und stetigen Abbildungen $a\colon X \to V$, $b\colon X \to W$ derart, dass $a \simeq b$ in Y. Es gibt aber kein stetiges $c\colon X \to V \cap W$, so dass $a \simeq c$ in V und $b \simeq c$ in W. (Interessanter Kontrast zur Welt der Abbildungszykel; siehe Cor. 6.1.2.) Im Beispiel von 6.1.3. ist $X = S^1$. Konstruieren Sie ein ähnliches Beispiel mit $X = S^3$ unter Benutzung von Aufgabe 2, Übungsblatt 9. [4]

Alles zur Abgabe am Freitag 9.01.2015 vor 16:00.

[1] Dasselbe wie ein Faserbündel, bei dem die Fasern diskrete Räume, d.h. Mengen, sind.