Topologie 2, WS 2014/15
(Weiss)

(Stand: 31.01.2015.)

Vorlesungen, Übungen, Übungsaufgaben, wann und wo. Vorlesungen Di 12:00-14:00 und Fr 10:00-12:00 in N3. Übungen: 2 Wochenstunden pro Person. Zeiten und Räume dafür:

- Di 10:00-12:00, Raum SR0 (Hauptgebäude). Dieser Raum ist etwas problematisch (muss vielleicht manchmal für andere Veranstaltungen abgegeben werden).
- Mi 14:00–16:00, Raum SRZ 217 (neues Gebäude).
- Fr 12:00-14:00, SR4 (Hauptgebäude).

Abgabetermin für Übungsaufgaben: Fr 16:00. (Erster Abgabetermin ist Fr der 24.10., 16:00.) Briefkästen dafür: 151 (Üb. Di), 183 (Üb. Mi), 184 (Üb. Fr).

Themen. Dieser Kurs kann als Fortsetzung meines Topologiekurses vom WS13-14 betrachtet werden, muss aber nicht. Er wendet sich an Studenten, die sich schon einigermassen mit Homologiegruppen von topologischen Räumen auskennen. Es muss aber nicht genau die Version/Definition von Homologie sein, die ich angepriesen habe. Auch soll dieser Kurs Topologie 2 viel weniger revolutionär sein als der Vorgänger vom WS13-14. Es soll also ein ganz normaler zweiter Kurs in (algebraischer) Topologie werden.

Unter den Themen gibt es solche, die das verfeinern und vertiefen, was schon im ersten Topologiekurs angefangen wurde, und solche, die etwas eher Neues anfangen. Zum ersten Typ gehören die Titel:

- CW-Räume, Homologie von CW-Räumen, Kohomologie mit Cup-Produkt, Kohomologie von CW-Räumen, Poincaré-Dualität.

Zum zweiten Typ gehören die Titel:

- Fundamentalgruppe, Überlagerungen, Seifert-vanKampen.

Diese Themen sind beinah verpflichtend. Jetzt ein paar Erläuterungen zu den beinah verpflichtenden Themen.

(1) CW-Räume sind eine Verallgemeinerung von simplizialen Komplexen und (geometrischen Realisierungen von) semi-simplizialen Mengen. Es sind topologische Räume X mit einer Zusatzstruktur, nämlich einer aufsteigenden Folge von Unterräumen $X^{-1}, X^0, X^1, X^2, \dots$, die natürlich gewisse Bedingungen erfüllen soll, darunter auch $X = \bigcup_{k=-1}^{\infty} X^k$.

(2) Für die Homologie von CW-Räumen gibt es Formeln, die das verallgemeinern, was schon für simpliziale Komplexe und semi-simpliziale Mengen im WS13-14 bewiesen wurde.

(3) Kohomologie wurde schon im WS13-24 erwähnt, aber es blieb keine Zeit für genauere Untersuchungen. Kohomologie ist so ähnlich wie Homologie, nur: die Kohomologiegruppen eines Raumes X hängen in kontravarianter Weise von X ab. Ausserdem gibt es da eine Ringstruktur (Cup-Produkt), die die Gesamtheit der Kohomologiegruppen von X zu einem graduierten Ring macht. Für die Kohomologiegruppen von CW-Räumen gibt es natürlich auch wieder praktische Formeln. Die Ringstruktur ist allerdings auch mit dieser Methode nicht leicht zu berechnen.

(4) Wenn ein topologischer Raum X eine kompakte orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand ist, dann gibt es besondere Beziehungen zwischen der Homologie von X und der Kohomologie von X, die über das hinausgehen, was man bei beliebigen Räumen X erwarten darf. Das heisst dann Poincaré-Dualität.

(5) Die Fundamentalgruppe ist ein kovarianter Funktor π_1 von der Kategorie der Räume mit Grundpunkt in die Kategorie der Gruppen. Sie ist eigentlich das nächstliegende Beipiel von einem Funktor, der homotope Abbildungen zwischen Räumen mit Grundpunkt so behandelt, als ob sie gleich sind. Deswegen wird sie meist vor der Homologietheorie eingeführt. So war es aber nicht in meinem Kurs vom WS13-14; also bleibt uns dieses Thema.

(6) Mit Hilfe der Fundamentalgruppe kann man Überlagerungen $X \to Y$ mit fest gewähltem Y gut verstehen und klassifizieren. (In der Sprache von WS13-14 sind das Faserbündel, in denen die Fasern diskrete Räume, das heisst einfach Mengen, sind).

Literatur. Tammo tom Dieck, *Topologie* (De Gruyter Lehrbuch, 2000).
Tammo tom Dieck, *Algebraic Topology* (EMS Textbooks in Maths., 2008).
Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (auch im Internet kostenlos).
Glen Bredon, *Topology and Geometry*, Springer Grad. Texts in Math., 1993.

Ich werde wahrscheinlich auch wöchentlich Vorlesungsnotizen hochladen.

Spezialisierung Topologie im Masterstudium. Im Semester SS14-15 wird von mir eine Vorlesung Topologie 3 angeboten, die auf dieser Vorlesung Topologie 2 aufbaut.