Aufgabe 1: CW-Räume

a) Die Begriffe *CW-Raum* und *zelluläre Abbildung zwischen CW-Räumen* sollen definiert werden. [5]

b) Es soll erklärt werden, was eine *n-Zelle* in einem CW-Raum X ist und was mit einer *charakteristischen Abbildung* $\varphi\colon D^n \to X$ für so eine n-Zelle gemeint ist. [2]

c) Sei X ein CW-Raum. Für jede Zelle von X sei eine charakteristische Abbildung $\varphi_\lambda\colon D^{n(\lambda)} \to X$ gewählt, wobei $n(\lambda)$ die Dimension der Zelle ist. Man zeige, dass die Abbildung

$$\coprod_\lambda D^{n(\lambda)} \longrightarrow X$$

gegeben durch die verschiedenen φ_λ eine Identifikationsabbildung ist; d.h. sie ist surjektiv und eine Teilmenge von X ist offen genau dann, wenn ihr Urbild in $\coprod_\lambda D^{n(\lambda)}$ offen ist. [Vorschlag: erst die entsprechende Behauptung für das Skelett X^n beweisen; dazu Induktion nach n.] [8]

d) Man gebe eine CW-Struktur für die Kleinsche Fläche/Flasche K an:

$$K = \frac{S^1 \times S^1}{(w,z) \sim (\bar{w}, -z)}$$

(wobei $S^1 \subset \mathbb{C}$; Bezeichnungen wie in $\mathbb{C}$ üblich). Dann soll der zelluläre Kettenkomplex von K bestimmt werden. Damit soll schliesslich die Homologie von K ausgerechnet werden; dazu gerne einen wichtigen Satz zitieren. [Eine Ausrechnung auf ganz andere Art, zum Beispiel mit Mayer-Vietoris, zählt hier nicht.] [8]

e) Der Grad der zusammengesetzten Abbildung

$$S^n \longrightarrow \frac{S^n}{z \sim -z} = \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1} \cong S^n$$

soll bis auf Vorzeichen $\pm$ bestimmt werden, wobei $n \geq 0$. [Allgemeine Resultate zur Bestimmung von solchen Abbildungsgraden aus einem Übungsblatt dürfen dabei benutzt werden; sorgfältiges Zitieren erwünscht. Der Grad der antipodischen Abbildung $S^n \to S^n$ kann auch als bekannte Tatsache benutzt werden, falls bekannt.] [5]

f) Mit e) bestimme man die Homologie von $\mathbb{R}P^5$ und die Kohomologie von $\mathbb{R}P^5$. [5]

Aufgabe 2: Elementare homologische Algebra.

a) Zu definieren: *Kettenkomplex*, *Homologiegruppen von Kettenkomplex*, *Kettenabbildung* (von Kettenkomplex C nach Kettenkomplex D), *Kettenhomotopie* (zwischen zwei Kettenabbildungen $f, g\colon C \to D$). Man zeige, dass zwei Kettenabbildungen $f, g\colon C \to D$, die kettenhomotop sind, denselben Homomorphismus $H_k(C) \to H_k(D)$ induzieren (für jedes $k \in \mathbb{Z}$). [8]

b) Eine (kurze) exakte Folge $0 \to A \to B \to C \to 0$ von Kettenkomplexen bestimmt *Randhomomorphismen* $\partial\colon H_k(C) \to H_{k-1}(A)$. Wie sind sie definiert? Man gebe ein Beispiel so einer kurzen exakten Folge, bei der diese Randhomomorphismen nicht alle gleich Null sind. [6]

c) Sei C ein Kettenkomplex von freien abelschen Gruppen; ausserdem sei $C_k = 0$ für $k < 0$. Es sei $H_k(C) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Man zeige, dass $\mathrm{id}\colon C \to C$ kettenhomotop zur Nullabbildung ist. [Dabei darf benutzt werden: Untergruppen von freien abelschen Gruppen sind immer freie abelsche Gruppen.] [8]

d) Sei C ein Kettenkomplex von freien abelschen Gruppen; ausserdem sei $C_k = 0$ für $k < 0$. Man zeige, dass C isomorph zu einer direkten Summe von Kettenkomplexen der Form

$$\cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow D_k \xleftarrow{f} D_{k+1} \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots$$

ist, wobei f auch noch injektiv ist. [7]

e) Sei X ein CW-Komplex mit $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ und $H_i(X) = 0$ für $i > 0$. Man zeige, dass dann auch $H^0(X) \cong \mathbb{Z}$ und $H^i(X) = 0$ für $i > 0$. [Aufgabenteil d) kann dazu benutzt werden. Sätze, die wir in der Vorlesung nicht hatten, sollten besser nicht benutzt werden.] [4]

Aufgabe 3: Produkte mit etwas Lyusternik-Schnirelmann

a) Für Räume X, Y sollen $p_X\colon X \times Y \to X$ und $p_Y\colon X \times Y \to Y$ die Projektionen bezeichnen. Man beweise die Formel

$$p_X^*(a) \smile p_Y^*(b) = a \times b \in H^{k+\ell}(X \times Y)$$

wobei $a \in H^k(X)$ und $b \in H^\ell(Y)$. [7]

b) Man zeige, dass für jedes $m \in \mathbb{Z}$ der durch externe Produkte von Kohomologieklassen definierte Homomorphismus

$$\bigoplus_{p,q,r \text{ mit } p+q+r=m} H^p(S^2) \otimes H^q(S^2) \otimes H^r(S^2) \longrightarrow H^m(S^2 \times S^2 \times S^2)$$

ein Isomorphismus ist. [Anleitung: es wird empfohlen, dass man mit zellulären Kettenkomplexen arbeitet. Dann gibt es verschiedene Möglich keiten. Zum Beispiel: Satz aus Vorlesungsnotizen über zelluläre Kettenkomplexe und externe Produkte in Kohomologie zitieren. Andere Möglichkeit: die Smashprodukte $S^2 \wedge S^2$ und $S^2 \wedge S^2 \wedge S^2$ im Auge behalten und Natürlichkeit von externen Produkten benutzen. Dann dürfen Sie auch benutzen, dass das externe Produkt

$$\tilde{H}^m(S^m) \otimes \tilde{H}^n(S^n) \to \tilde{H}^{m+n}(S^m \wedge S^n)$$

ein Isomorphismus ist.] [9]

c) Aus a) und b) bestimme man $H^*(S^2 \times S^2 \times S^2)$ als graduierten Ring. [4]

d) Aus c) leite man her, dass $\mathsf{LS}(S^2 \times S^2 \times S^2) \geq 3$, wobei LS die Lyusternik-Schnirelmann-Invariante bezeichnet. [Für einen wegzusammenhängenden Raum X ist $\mathsf{LS}(X)$ ist das kleinste n, für das offene Teilmengen $U_0, U_1, \ldots U_n$ von X existieren mit $\bigcup_{i=0}^n U_i = X$ und $U_i \hookrightarrow X$ nullhomotop.] [5]

e) Zwei wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Räume X und Y seien gegeben, beide mit Grundpunkt. Man zeige:

$$\mathsf{LS}(X \times Y) \leq \mathsf{LS}(X) + \mathsf{LS}(Y).$$

(bitte umblättern)

[Hinweis: es gibt eine Charakterisierung von $\mathsf{LS}(X)$, die die Diagonalabbildungen

$$\delta_k \colon X \to \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{k}$$

benutzt. Eine Andeutung: $\mathsf{LS}(X) \leq n$ genau dann, wenn für jedes $k > n$ die Abbildung δ_k homotop zu einer Abbildung δ'_k ist derart, dass jedes $\delta'_k(x)$ nur höchstens ... von $\star \in X$ verschiedene ... Diese Charakterisierung darf ohne Beweis benutzt werden.] [6]

f) Mit d) und e) bestimme man $\mathsf{LS}(S^2 \times S^2 \times S^2)$. [2]

Aufgabe 4: Produkte mit etwas Poincaré-Dualität

Einleitung: Das *Skalarprodukt* ist (für jeden Raum X) eine Abbildung

$$H^q(X) \times H_q(X) \to \mathbb{Z},$$

geschrieben $(a, b) \mapsto \langle a, b\rangle$. Statt einer Definition hier ein paar wichtige Eigenschaften:

- Es ist bi-additiv.
- Das Skalarprodukt von Standarderzeuger von $H^0(\star)$ mit Standarderzeuger von $H_0(\mathbb{Z})$ ist gleich 1.
- Für $q > 0$ ist das Skalarprodukt von Standarderzeuger von $H^q(S^q)$ mit Standarderzeuger von $H_q(S^q)$ gleich 1.
- Natürlichkeit: Gegeben $f \colon X \to Y$ und $a \in H^q(Y)$, $b \in H_q(X)$; dann ist $\langle f^*(a), b\rangle = \langle a, f_*(b)\rangle$.
- Bei zusammenhängendem X kann das Skalarprodukt auch as Cap-Produkt definiert werden: $\langle a, b\rangle = a \frown b \in H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

a) Sei X ein CW-Raum mit zellulärem Kettenkomplex $C = C(X)$. Ein Element $a \in H^q(X) \cong H_{-q}(\hom(C, \mathbb{Z}))$ sei repräsentiert durch einen Homomorphismus $\alpha \colon C_q \to \mathbb{Z}$. Ein Element $b \in H_q(X) \cong H_q(C)$ sei repräsentiert durch $\beta \in C_q$. Man zeige, dass dann

$$\langle a, b\rangle = \alpha(\beta) \in \mathbb{Z}$$

gilt. Dabei dürfen die Eigenschaften oben benutzt werden. [15]

b) Sei X eine kompakte orientierte zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ und gleichzeitig ein CW-Raum, der nur Zellen gerader Dimension hat. Sei $\varphi \in H_{2n}(X)$ die Fundamentalklasse. Man zeige: Dann sind alle Homologie- und Kohomologiegruppen von X endlich erzeugte freie abelsche Gruppen, und für jedes q ist die bi-additive Abbildung

$$F \colon H^{2q}(X) \times H^{2n-2q}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

gegeben durch $(a, b) \mapsto \langle (a \smile b), \varphi\rangle$ nicht-ausgeartet. [Das heisst, zu jedem Homomorphismus $g \colon H^{2q}(X) \to \mathbb{Z}$ existiert genau ein $b \in H^{2n-2q}(X)$ derart, dass $g(a) = F(a, b)$ für alle $a \in H^{2q}(X)$.] [13]

c) Mit Hilfe von b) bestimme man den Kohomologiering $H^*(\mathbb{C}P^{10})$. [Es darf benutzt werden, dass $X = \mathbb{C}P^{10}$ eine CW-Struktur mit $X^{2q} = X^{2q+1} = \mathbb{C}P^q$ hat für $q \in \{0, 1, \cdots, 10\}$.] [5]

Aufgabe 5: Fundamentalklasse und Poincaré-Dualität

a) Sei X ein normaler Raum und $A \subset X$. Sei $X /\!\!/ A = \mathrm{cone}(A \hookrightarrow X)$ der Abbildungskegel. Man skizziere einen Beweis des Ausschneidungssatzes für Abbildungskegel: Für $L \subset A$ mit $\bar{L} \subset \mathrm{int}(A)$ ist die Inklusion

$$(X \smallsetminus L) /\!\!/ (A \smallsetminus L) \longrightarrow X /\!\!/ A$$

eine Homotopieäquivalenz. [Eine Zeichnung dazu sollte helfen und kann auch Punkte geben.] [11]

b) Man zeige: Wenn eine Abbildung $f\colon M \to N$ von orientierten, zusammenhängenden, kompakten Mannigfaltigkeiten derselben Dimension n nicht surjektiv ist, dann hat sie den Abbildungsgrad 0. [7]

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^2$ nicht orientierbar ist. [3]

d) Man stelle sich vor: zwei kompakte, n-dimensionale, orientierte, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten M und N und eine Abbildung $f\colon M \to N$ vom Grad 1. Man zeige, dass der induzierte Homomorphismus

$$f_*\colon H_k(M) \to H_k(N)$$

surjektiv ist und sogar einen Rechtsinversen besitzt. [Hinweis: Eine Natürlichkeitsformel für Cap-Produkte wird gebraucht.] [12]

Aufgabe 6: Fundamentalgruppe und Überlagerungen

a) Sei X ein wegzusammenhängender Raum mit Grundpunkt und $f\colon S^1 \to X$ eine stetige Abbildung. Sei $Y = \mathrm{cone}(f)$; also Y ist der Quotientenraum von $X \sqcup D^2$, der durch Identifizieren von $z \in S^1 \subset D^2$ mit $f(z) \in X$ ensteht, für jedes $z \in S^1$. Man zeige: wenn der Homomorphismus $\pi_1(X, \star) \to \pi_1(Y, \star)$ induziert durch die Inklusion $X \to Y$ injektiv ist, dann ist er auch bijektiv, und ausserdem ist f nullhomotop. [10]

b) Man konstruiere/beschreibe einen zusammenhängenden CW-Raum X mit Grundpunkt, dessen Fundamentalgruppe die Präsentation

$$\langle x, y, z \mid x^2 z^2 y z y^{-1} \rangle$$

hat. [Das bedeutet: es gibt einen surjektiven Gruppenhomomomorphismus q von F_3 nach $\pi_1(X, \star)$, wobei F_3 die freie Gruppe mit 3 Erzeugern x, y, z ist und wobei der Kern von q die kleinste normale Untergruppe von F_3 ist, die das Element $x^2 z^2 y z y^{-1}$ enthält. Sätze zu CW-Räumen und Fundamentalgruppe, die benutzt werden, sollen genau zitiert werden.] [5]

c) Wir betrachten S^1 und S^2 als Räume mit Grundpunkt und bilden die Einpunktsumme (Wedge) $S^1 \vee S^2$. Man erkläre, warum $\pi_1(S^1 \vee S^2, \star)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Sei jetzt $E \to S^1 \vee S^2$ die universelle Überlagerung von $S^1 \vee S^2$ (also ist E zusammenhängend und die Fundamentalgruppe von E ist trivial, für jede Wahl von Grundpunkt). Man bestimme $H_2(E)$. [Ein Bild von E ist beinah unvermeidlich und sehr erwünscht und kann auch Punkte geben.] [8]

d) Es sei $p\colon E \to X$ eine Überlagerung, wobei E und X wegzusammenhängende Räume mit Grundpunkten $\star_E$ beziehungsweise $\star_X$ sind. Die Abbildung p soll grundpunkterhaltend sein. Wir wissen, dass der Homomorphismus

$$p_*\colon \pi_1(E, \star_E) \to \pi_1(X, \star_X)$$

injektiv ist. Man schreibe $G = \pi_1(X, \star_X)$ und $H = \mathrm{im}(p_*)$, so dass H Untergruppe von G ist. Man stelle einen Isomorphismus her zwischen der Gruppe der Homöomorphismen $h\colon E \to E$, die $p \circ h = p$ erfüllen, und der Gruppe $N_G H/H$. [Dabei ist $N_G H$ der Normalisator von H in G; das ist die Untergruppe von G bestehend aus allen $x \in G$ mit $x^{-1}Hx = H$.] [10]