23.01.2015

Themen zur Klausurvorbereitung
Topologie WS 2014/15 (Weiss)

Wahrscheinlich, wie bei mir üblich, 6 Aufgaben zu je etwa 33 Punkten, von denen KlausurteilnehmerInnen 4 auswählen sollen; 100 Punkte sind genug für Note 1.

Die Klausur umfasst folgende Themen:

1. CW-Räume und CW-Homologie, CW-Kohomologie mit Beispielen.

2. Allgemeine Homotopie und Homologie (Eigenschaften von Abbildungskegeln, Kofaserungen und Homotopieerweiterungseigenschaft, lange exakte Folgen, Algebra von Kettenkomplexen).

3. Produkte (externe Produkte in Homologie und Kohomologie, Cup-Produkt, Cap-Produkt); Anwendungen wie Lyusternik-Schnirelmann-Theorie oder Erkennung von Abbildungen, die nicht nullhomotop sind.

4. Mannigfaltigkeiten, Orientierung, Fundamentalklasse, Abbildungsgrad, Poincaré-Dualität.

5. Fundamentalgruppe (Satz von Seifert-van Kampen, Fundamentalgruppe von CW-Raum, Zusammenhang mit H_1, Basispunktwechsel, Theorie von Überlagerungen).

Die Themengruppen 1, 2 oder 3 könnten zwei Aufgaben hergeben. Es ist denkbar, dass Aufgaben von den Übungsblättern ohne grosse Veränderung übernommen werden.

Gute Aufgaben zu Thema 1.

- Blatt 1 Aufgabe 1, Blatt 2 Aufg 3.
- Blatt 2 Aufgabe 4 a). Ist nicht gut angekommen. Versuchen Sie es mal mit folgender Variante: Gegeben zwei homotope Abbildungen $f, g\colon X \to Y$. Man bilde die Abbildungskegel $\mathrm{cone}(f)$ und $\mathrm{cone}(g)$. Zeigen, dass $\mathrm{cone}(f)$ homotopieäquivalent ist zu $\mathrm{cone}(g)$. Was hat das mit der Originalfrage zu tun?
- Blatt 1 Aufgabe 2. Nicht gut angekommen. Ist wahrscheinlich garnicht so schlecht, obwohl ein bisschen gewaltig. Ausserdem gab es Ungenauigkeiten in Example 10.1.8. Sie sollten zuerst den Spezialfall $p = q = 1$ betrachten. Dann ist $p+q = n = 2$ und $G_{1,1} = \mathbb{R}P^1$ ist die Menge der 1-dimensionalen linearen Unterräume von $\mathbb{R}^2$. Es gibt zwei surjektive nicht-fallende Funktionen f von $\{0,1,2\}$ nach $\{0,1\}$ mit $f(0) = 0$ und $f(2) = 1$. Der interessantere Fall ist derjenige mit $f(1) = 1$. Für dieses f und einen 1-dimensionalen linearen Unterraum V von $\mathbb{R}^2$ bedeutet $f_V = f$, dass V null-dimensionalen Schnitt mit dem Standard-$\mathbb{R}^1$ in $\mathbb{R}^2$ hat. Die Menge dieser V ist also $\mathbb{R}P^1 \smallsetminus \mathbb{R}P^0$. (Gut, denn das sieht nach Zelle aus.) Man stellt fest, dass $f_!\colon \{1\} \to \{1,2\}$ den Wert 2 hat. Der affine Unterraum A_f vom Vektorraum der reellen 2×1-Matrizen ist 1-dimensional und besteht also aus den Spaltenvektoren mit zwei Einträgen, bei denen der zweite Eintrag $= 1$ ist. Die Abbildung
$$A_f \to G_{p,q}$$

die in der Vorlesung angegeben wurde, baut einfach den Spaltenraum, also in unserem Fall:

$$A_f \ni \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \left(\text{linearer Unterraum erzeugt von } \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \in \mathbb{R}P^1 = G_{1,1}\,.$$

Hier sollten Sie übernehmen ... wie wird daraus eine charakteristische Abbildung für eine Zelle?

- Blatt 4, alles.
- Blatt 7, Aufgabe 3 a) und b). Nicht sehr gut angekommen. Es war ein schlechter Hinweis dabei: *Die Erkenntnisse vom vorigen Übungsblatt könnten dabei nützlich sein.* Gemeint war natürlich: Erkenntnisse von Blatt 5. Zur Erinnerung: wenn Sie das Ergebnis von c) schon wissen/kennen, dann werden Sie auch das Ergebnis von b) besser erraten können ... und es kann sein, dass es nicht mit Ihrem ersten Eindruck übereinstimmt.

Gute Aufgaben zu Thema 2.

- Alles auf Blatt 3.
- Blatt 9 Aufgabe 1.
- Blatt 6 Aufgaben 1 und 2.
- vielleicht Blatt 7 Aufgabe 1.

Gute Aufgaben zu Thema 3.

- Blatt 7 Aufgabe 2. Ist nicht gut angekommen. War vielleicht auch nicht durchgehend gut formuliert. Teil a) ist eigentlich gut formuliert. Bei Teil b) hätte man statt der angegebenen Formel (die nicht falsch ist) besser angeben können

$$u \times v = p^*(u) \smile q^*(v)$$

(siehe Blatt 11 Aufgabe 1) wobei p und q die Projektionen von $S^m \times S^n$ nach S^m und S^n sind. Man sollte in dieser Aufgabe wahrscheinlich CW-Strukturen und die Beschreibung der Kohomologie durch zelluläre Kettenkomplexe benutzen.
- Blatt 8 Aufgabe 1.
- Blatt 9 Aufgabe 2.
- Blatt 11 Aufgabe 1 (Abbildungszykel kaum zu vermeiden).
- Blatt 11 Aufgabe 3 (Abbildungszykel kaum zu vermeiden). Es wurde der späte Hinweis gegeben: der Isomorphismus in Lemma 15.4.1 ist natürlich.
- Blatt 11 Aufgabe 4. Hier war vielleicht nicht ganz klar, was *nicht-ausgeartet* heissen sollte. Wenn A und B endlich erzeugte freie abelsche Gruppen sind, dann nenne ich eine bi-additive Abbildung $g\colon A \times B \to \mathbb{Z}$ nicht-ausgeartet, falls der entsprechende Homomorphismus $A \to \hom(B, \mathbb{Z})$ ein *Isomorphismus* ist.
- Folgende komplizierte Natürlichkeitsformel für Cap-Produkt erklären:

$$f_*\big(f^*(a) \frown b\big) = a \frown f_*(b) \qquad \in H_{p-q}(Y)$$

wobei $f\colon X \to Y$ und $a \in H^q(Y)$, $b \in H_p(X)$.

Gute Aufgaben zu Thema 4.

- Sei $M = \mathbb{R}^2$ und $A = \{2^{-i} \mid i = 0, 1, 2, \dots\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2$ und $U = M \smallsetminus A$. Man beschreibe oder berechne zuerst
$$\tilde{H}_2(M /\!\!/ U)$$
und dann $H_1(U)$. [Hinweis: Satz benutzen.]
- (Wichtig.) Aufgabe 5 von Blatt 11.
- (Wichtig.) Sei M eine kompakte k-dimensionale zusammenhängende (nichtleere) orientierte Mannigfaltigkeit ohne Rand und sei $f\colon S^k \to M$ eine Abbildung vom Grad 1. Man zeige, dass f einen Isomorphismus $H_r(S^k) \to H_r(M)$ induziert für alle r. [Hinweis: Surjektivität genügt beinahe. Folgt eigentlich schon aus Poincaré-Dualität und der Natürlichkeit von Cap-Produkt wie im vorigen Aufgabenblock.]
- (Gesund.) Kontrast zur vorigen Aufgabe: sei M eine kompakte k-dimensionale zusammenhängende (nichtleere) orientierte Mannigftgkt ohne Rand. Es existiert immer eine Abbildung vom Grad 1 von M nach S^k. Skizze von Konstruktion: wähle offene Teilmenge U von M mit $U \cong \mathbb{R}^k$. Dann definiere Abbildung $M \to U \cup \{\infty\}$ durch $x \mapsto x$ für $x \in U$, $x \mapsto \infty$ sonst. Dabei ist $U \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung, also $\cong S^k$. Warum hat diese Abbildung eigentlich den Grad ± 1 ?

Gute Aufgaben zu Thema 5. Wir hatten noch keine Aufgaben zum Thema Überlagerungen! Wird hiermit nachgeholt.

- Alles von Blatt 12.
- Man konstruiere einen zusammenhängenden CW-Raum mit nur 3 Zellen (dabei eine 0-Zelle) und Fundamentalgruppe $\cong \mathbb{Z}/5$. (Vergleiche Aufg 1 von Blatt 4.)
- (Ungesund.) Man betrachte $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ mit Fundamentalgruppe
$$G = \mathbb{Z}/2 \star \mathbb{Z}/2$$
(zum Beispiel wegen Seifert-van Kampen). Es gibt genau einen Homomorphismus f von G nach $K = \mathbb{Z}/2$, der sowohl auf der ersten Kopie als auch auf der zweiten Kopie von $\mathbb{Z}/2$ die Identitität ergibt. Dadurch wird K auch zu einer Menge mit Wirkung von G und bestimmt auf diese Weise eine Überlagerung
$$q\colon E \to \mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2.$$
Nach Satz ist $\pi_1(E, y) \cong \ker(f)$ für $y \in q^{-1}(\star)$. Aber man kann auch durch direkte Beschreibung von E zeigen, dass $\pi_1(E, y) \cong \mathbb{Z}$. Wie geht das? Cor 12.8 und Rem 12.9 von Vorlesungsnotizen Woche 12 könnten hier nützen. (Es sollte Sie überraschen, dass $\ker(f) \cong \mathbb{Z}$. Man kann daraus auch schliessen, dass $G = \mathbb{Z}/2 \star \mathbb{Z}/2$ isomorph zu einem semi-direkten Produkt von $\mathbb{Z}/2$ und $\mathbb{Z}$ ist.)
- Am Ende der Vorlesungsnotizen Woche 13 ist eine kleine Aufgabe angegeben.
- Ein wegzusammenhängender Raum X mit Grundpunkt $\star$ habe Fundamentalgruppe $\cong A_5$ (alternierende Gruppe, 60 Elemente). Sei $p\colon E \to X$ eine Überlagerung mit k Blättern (das heisst $|p^{-1}(\star)| = k$), wobei E wegzusammenhängend ist. Ist es denkbar, dass $k = 27$?

- (Wichtig.) Vorraussetzungen wie in der vorigen Aufgabe. Sei $k \neq 1$ und $k \neq 60$. Man zeige, dass es Elemente $y, z \in p^{-1}(\star)$ gibt, so dass kein Homöomorphismus $h\colon E \to E$ existiert mit $ph = p$ und $h(y) = z$.
- (Wichtig.) Man stelle sich vor: Räume X, Y, beide wegzusammenhängend mit Grundpunkt $\star_X, \star_Y$. Ausserdem soll X auch noch lokal wegzusammenhängend sein! Sei $q\colon E \to Y$ Überlagerung wobei E wegzusammenhängend. Sei $f\colon X \to Y$ grundpunkterhaltend. Das Bild von $f_*\colon \pi_1(X, \star_X) \to \pi_1(Y, \star_Y)$ sei enthalten im Bild von $q_*\colon \pi_1(E, \star_E) \to \pi_1(Y, \star_Y)$ wobei $\star_E \in q^{-1}(\star_Y)$. Dann existiert genau ein

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[ur, dotted, "u"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

  mit $u(\star_X) = \star_E$.
- (Schwer.) Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung zwischen zusammenhängenden orientierten kompakten Mannigfaltigkeiten (ohne Rand), vom Abbildungsgrad 1. Dann ist der induzierte Homomorphismus $\pi_1(M, x) \to \pi_1(N, f(x))$ surjektiv (bei beliebigem $x \in M$). [Hinweis: man benutze die vorige Aufgabe und Aufgabe 2 von Blatt 10. Wenn dieser Homomorphismus nicht surjektiv ist, dann definiert er eine interessante Untergruppe von $\pi_1(N, f(x))$.]