29.05.2015

5.Übungsblatt
Topologie SS 2015 (Weiss)

1. In dieser Aufagbe bezeichnen X, Y, Z zusammenhängende CW-Räume mit Grundpunkt; X variabel, Y und Z dagegen fest, Y kompakt. — Man zeige, dass der kontravariante Funktor

$$X \mapsto [X \wedge Y, Z]_\star$$

ein halbexakter Homotopiefunktor ist. (Nebulöse Frage: wegen Browns Darstellungssatz existiert dazu ein darstellender CW-Raum. Wie soll man sich den denken?)

2. Sei (Z, Y) ein Paar von zusammenhängenden CW-Räumen mit Grundpunkt; also ist Y ein CW-Unterraum von Z und Y enthält den Grundpunkt. Sei F der kontravariante Funktor definiert wie folgt: $F(X)$ ist die Menge der Homotopieklassen von grundpunkterhaltenden Abbildungen

$$(\mathrm{cone}(X), X) \longrightarrow (Z, Y).$$

Dabei ist X ein zusammenhängender Raum mit Grundpunkt und $\mathrm{cone}(X)$ soll den reduzierten Kegel bezeichnen. — Man zeige, dass F ein halbexakter Homotopiefunktor ist. (Daraus ergibt sich eine nebulöse Frage wie in der vorigen Aufgabe.)

3. Sei (Z, Y) ein Paar von zusammenhängenden CW-Räumen mit Grundpunkt wie in der vorigen Aufgabe. Sei k eine natürliche Zahl, $k \geq 1$. Sei G der kontravariante Funktor definiert wie folgt: Für einen zusammenhängenden CW-Raum X mit Grundpunkt ist $G(X)$ die Menge der Homotopieklassen von grundpunkterhaltenden Abbildungen

$$(X, X^k) \longrightarrow (Z, Y)$$

die homotop sind zu grundpunkterhaltenden Abbildungen

$$(X, X^{k+1}) \longrightarrow (Z, Y).$$

(Dabei bezeichnet X^k das k-Skelett von X.) Man zeige, dass G ein halbexakter Homotopiefunktor ist. (Nebulöse Frage: was hat das mit Vorlesungsnotizen Woche 6, 7 und 8, Abschnitt 3.3 zu tun? Hinweis: es gibt hübsche natürliche Transformationen von $[-, Y]_\star$ nach G und von G nach $[-, Z]_\star$. Weiterer Hinweis: Definition von G ausprobieren mit $X = S^n$ für verschiedene n.)