03.05.2015

3.Übungsblatt
Topologie SS 2015 (Weiss)

1. (*Eher elementar.*) Man stelle sich zwei Paare von topologischen Räumen (X, A) und (Y, B) vor, wobei die Inklusionen $A \to X$ und $B \to Y$ Kofaserungen sind.[1] Sei $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung (von Paaren). Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) f ist eine Homotopieäquivalenz von Paaren, d.h. es existiert $g\colon (Y, B) \to (X, A)$ mitsamt Homotopien $(h_t\colon (X, A) \to (X, A))_{t\in[0,1]}$, $(k_t\colon (Y, B) \to (Y, B))_{t\in[0,1]}$ von gf nach id bzw. von fg nach id.

(ii) Die zugehörigen Abbildungen $X \to Y$ und $A \to B$ sind beide für sich genommen Homotopieäquivalenzen.

2. (*Eher schwer.*) Sei X ein (weg)zusammenhängender CW-Raum mit trivialer Fundamentalgruppe $\pi_1(X, \star)$. Angenommen, es gibt eine natürliche Zahl $c \geq 2$ derart, dass $H_k(X) = 0$ für alle $k > c$. Man zeige: es existiert ein CW-Raum Y der Dimension höchstens $c+1$, der zu X homotopieäquivalent ist.
Hinweise: Erstens, $H_{c+1}(X/X^c)$ ist eine freie abelsche Gruppe. Warum? Zweitens: eine gute Gelegenheit, Hurewicz II und den Satz von G Whitehead anzuwenden.

[1] Damit soll auch verstanden sein: A ist abgeschlossen in X und B ist abgeschlossen in Y.