25.04.2015

2.Übungsblatt
Topologie SS 2015 (Weiss)

1. $\pi_n(S^1, \star)$ is trivial für $n > 1$.

2. (Eher leicht.) Angenommen, zwei wegzusammenhängende Räume X und Y mit Grundpunkt sind homotopieäquivalent (aber nur als Räume ohne Grundpunkt). Dann ist $\pi_n(X, \star_X) \cong \pi_n(Y, \star_Y)$ for all $n \geq 1$.

3. (i) Man zeige, dass jedes Faserbündel über S^k mit Faser $\cong S^1$ einen Schnitt besitzt, falls $k > 2$. (Hinweis: es gibt Bündelkarten über $S^k \smallsetminus \{x\}$ und $S^k \smallsetminus \{y\}$, wobei x, y verschiedene Elemente von S^k sind. Aufgabe 1 benutzen. Damit wird $k > 2$ wichtig.) Die entsprechende Aussage für $k = 2$ ist falsch. Warum?
(ii) Aus (i) herleiten: Wenn $p \colon E \to B$ irgendein Faserbündel mit Faser $\cong S^1$ ist, und $x_0 \in E$, dann ist $p_* \colon \pi_k(E, x_0) \to \pi_k(B, p(x_0))$ surjektiv, falls $k > 2$.
(iii) Aus (ii) herleiten: $\pi_k(\mathbb{C}P^n, \star)$ ist trivial für $2 < k < 2n+1$ und ist $\cong \mathbb{Z}$ für $k = 2n+1$. (Speziell gilt das für $n = 1$, daher $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$.)

4. Man bestimme die lange exakte Folge der Homotopiegruppen (Homotopiemengen) von $(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1)$ bis zur Stelle $\pi_4(\mathbb{C}P^2)$, also

$$\pi_4(\mathbb{C}P^2, \star) \to \pi_4(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1, \star) \to \pi_3(\mathbb{C}P^1, \star) \to \cdots \to \pi_0(\mathbb{C}P^2, \star) \to \pi_0(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1, \star)$$

(Aufgabe 3 benutzen.)

5. Nachdenken über die Gruppe $\pi_2(S^1 \times S^1, S^1 \vee S^1, \star)$.