16.04.2015

1.Übungsblatt
Topologie SS 2015 (Weiss)

1. Man zeige, dass die vergessliche Abbildung von $\pi_n(X,\star)$ nach $[S^n, X]$ nicht injektiv sein muss. (Dabei soll jetzt $n > 1$ vorausgesetzt werden, obwohl der Fall $n = 1$ auch interessant ist.)
Andererseits: wenn ein Element von $\pi_n(X,\star)$ auf das triviale Element von $[S^n, X]$ abgebildet wird (Homotopieklasse der konstanten Abbildung mit Wert $\star$), dann war es von vornherein das neutrale Element von $\pi_n(X,\star)$.
Ist da kein Widerspruch zwischen diesen beiden Aussagen?

2. Gegeben sei Abbildung $f\colon S^{4m-1} \to S^{2m}$ mit Hopf-Invariante $k \in \mathbb{Z}$ (grundpunkterhaltend oder auch nicht; $m \geq 1$).

- Was ist die Hopf-Invariante von $f \circ g$, wenn $g\colon S^{4m-1} \to S^{4m-1}$ den Abbildungsgrad ℓ hat?
- Was ist die Hopf-Invariante von $e \circ f$ wenn $e\colon S^{2m} \to S^{2m}$ den Abbildungsgrad ℓ hat?

3. Gegeben CW-Räume X und Y mit Grundpunkt, wobei $X^{p-1} = \star$ und $Y^{q-1} = \star$ (d.h. ausser dem Grundpunkt hat X bzw. Y keine Zellen mit Dimension $< p$ bzw. $< q$). Dann ist $\pi_k(X \vee Y) \cong \pi_k(X) \times \pi_k(Y)$ falls $k < p + q - 1$.

4. Sei $X = S^2 \vee S^1$ mit dem üblichen Grundpunkt. Man zeige, dass $\pi_3(X,\star)$ sogar als Modul über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[\pi_1(X,\star)]$ nicht endlich erzeugt ist. (Vergleiche Example 1.8, Vorlesungsnotizen.)