Topologie (3) SS 2015
(Weiss)

(Stand: 07.04.2015.)

Vorlesungen, Übungen, Übungsaufgaben, wann und wo. Vorlesungen Di 12:00-14:00 und Fr 10:00-12:00. Übungen: 2 Wochenstunden pro Person. Zeiten: Di 12:00 ct bis 14:00 und Fr 10:00 ct bis 12:00, wahrscheinlich in M4. (Leichte Zweifel daran bestehen in Bezug auf die Woche vom 07.04.)

Themen. Dieser Kurs ist Fortsetzung meiner Topologiekurse vom WS13-14 und WS14-15. Er wendet sich an Studenten, die sich schon mit Homologie und Kohomologie von topologischen Räumen auskennen (womit auch Produkte in der Kohomologie und allerhand Anwendungen wie Poincaré-Dualität gemeint sind) . Es muss aber nicht genau die Version/Definition von Homologie sein, die ich angepriesen habe. Hier ist wieder die Beteuerung angebracht, dass es ein ganz *normaler* dritter Kurs in (algebraischer) Topologie werden soll, obwohl eine entsprechende Beteuerung für den zweiten Kurs sich als unhaltbar erwiesen hat.

Die Themen ähneln sehr denen, die Johannes Ebert in seinem Seminar anbietet. Es ist aber eine andere Darbietungsform und vielleicht eine andere Zuhörerschaft.

Im Zentrum stehen die (höheren) Homotopiegruppen von Räumen, die schon in der letzten Vorlesungswoche von WS14-15 kurz definiert wurden. Sie sind viel leichter zu definieren als Homologie- oder Kohomologiegruppen, aber ihre Berechnung ist in den allermeisten Fällen viel schwerer. Die Theorie fängt an mit drei Standardsätzen:

- Satz von Hurewicz (Beziehung zwischen den Homotopie- und Homologiegruppen eines Raumes);
- Satz von JHC Whitehead: eine Abbildung $f : X \to Y$ von CW-Räumen ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn sie einen Isomorphismus $\pi_k(X, \star) \to \pi_k(Y, f(\star))$ induziert für alle $k \geq 0$ und jede Wahl von Grundpunkt $\star$ in X;
- Satz von G. Whitehead: eine Abbildung $f : X \to Y$ von einfach zusammenhängenden CW-Räumen ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn sie einen Isomorphismus $H_k(X) \to H_k(Y)$ induziert für alle $k \geq 0$.

Der dritte folgt "irgendwie" aus den ersten beiden; dazu muss aber der erste sehr allgemein formuliert werden.

Wie in der (Ko)homologietheorie gibt es auch bei Homotopiegruppen allerhand lange exakte Folgen. Zwei Typen, die sich bei genauerer Betrachtung als derselbe Typ erweisen: lange exakte Folge der Homotopiegruppen eines Paares (Paar bestehend aus einem Raum X mit Unterraum A) und lange exakte Folge der Homotopiegruppen einer Faserung (Totalraum E, Basisraum B und Faser F).

Obwohl es also lange exakte Folgen von Homotopiegruppen gibt, fehlt es an so etwas wie Mayer-Vietoris-Folgen von Homotopiegruppen (anwendbar, wenn ein Raum X Vereinigung von zwei offenen Teilmengen V und W ist). Es gibt aber doch manchmal so etwas wie Mayer-Vietoris-Folgen von Homotopiegruppen unter ziemlich starken Einschränkungen. Davon handeln:

- Satz von Blakers-Massey
- Satz von Freudenthal

wobei der Satz von Freudenthal als Korollar vom Satz von Blakers-Massey gesehen werden kann. Der Satz von Freudenthal besagt ungefähr, dass

$$\pi_k(S^n) \cong \pi_{k+1}(S^{n+1})$$

wenn k/n nicht zu gross ist.

Danach ein abstraktes Thema: Der Brown'sche Darstellungssatz, der ungefähr die darstellbaren (kontravarianten) Funktoren auf der Homotopiekategorie der topologischen Räume mit Grundpunkt charakterisiert. (Also: gegeben sei ein kontravarianter Funktor F von der Homotopiekategorie der topologischen Räume mit Grundpunkt in die Kategorie der Mengen. Man möchte wissen, ob es einen Raum Y mit Grunpunkt und eine natürliche Bijektion $F(X) \cong [X, Y]_*$ gibt.) In diesem Zusammenhang können wir auch gut die Postnikov-Theorie entwickeln: die Kunst, Homotopiegruppen eines CW-Raumes durch Ankleben von Zellen zielgerichtet zu verändern. Postnikov-Theorie heisst vielleicht auch Hindernistheorie. Leider verspricht diese zweite Bezeichnung ein bisschen viel. Vielleicht ist es mehr, als wir schaffen können.

Ein weiteres Thema: Spektralfolgen. Das ist etwas für Leute, die leidenschaftlich gern rechnen. Eigentlich ist eine Spektralfolge “nur” eine Folge von Kettenkomplexen

$$C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, \ldots$$

bei der $H_*(C^{(k)}) = C^{(k+1)}$ gilt für jedes k (wobei die linke Seite als Homologie vom Kettenkomplex $C^{(k)}$ *mit* Differential verstanden werden will, dagegen die rechte Seite nur als die zugrundeliegende graduierte abelsche Gruppe vom Kettenkomplex $C^{(k+1)}$, *ohne* Differential). Solche Folgen tauchen an vielen Stellen in der algebraischen Topologie auf. Ein wichtiges Beispiel ist die Serre-Spektralfolge, bei der es um die Berechnung der (Ko-)Homologiegruppen von E geht, wenn E Totalraum einer Faserung $E \to B$ mit Faser F ist. Man tut dabei so, als ob man die Homologie von F und B kennt.