22.12. 2015

Vorlesungsnotizen Wochen 9 und 10
Nichteuklidische Geometrie, WS 2015-2016 (Weiss)

9.1. Wirkung der Isometriegruppe

Wie gewohnt ist X ein metrischer Raum, der Axiome I und II erfüllt. Sei $G = \mathrm{isom}(X)$ die Gruppe der Isometrien von X nach X (mit Zusammensetzung, alias Hintereinanderausführen, als Gruppenoperation). Es gibt eine sehr naheliegende Wirkung von G auf X. Als Abbildung von $G \times X$ nach X ist sie gegeben durch $(\tau, A) \mapsto \tau(A)$. In Kurzschreibweise: $\tau A := \tau(A)$ für $\tau \in G$ und $A \in X$.

Proposition 9.1.1. *Diese Wirkung von G auf X ist transitiv.*

Beweis. Für verschiedene $A, B \in X$ sei $\sigma \in G$ die Geradenspiegelung an der Mittelsenkrechten vom Segment $[A, B]$. Dann ist $\sigma(A) = B$. □

Sei Q ein festes Element aus X und sei G_Q die Standgruppe für diese Wirkung und dieses Q. Das heisst, G_Q ist die Untergruppe von G bestehend aus allen Isometrien $\tau \colon X \to X$, die die Bedingung $\tau(Q) = Q$ erfüllen. Wir wählen uns ein $r > 0$ und haben damit den Kreis

$$\mathcal{S} = \{A \in X \mid d(Q, A) = r\}.$$

Die Gruppe G_Q wirkt auf $\mathcal{S}$ in der üblichen Weise. Das heisst, als Abbildung von $G_Q \times \mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ ist die Wirkung wieder gegeben durch $(\tau, A) \mapsto \tau(A)$; in Kurzschreibweise $\tau A := \tau(A)$.

Proposition 9.1.2. *Diese Wirkung von G_Q auf $\mathcal{S}$ ist transitiv. Für beliebiges $A \in \mathcal{S}$ hat die Standgruppe $(G_Q)_A$ genau zwei Elemente.*

Beweis. Für verschiedene $A, B \in \mathcal{S}$ sei $\sigma \in G$ die Geradenspiegelung an der Mittelsenkrechten n vom Segment $[A, B]$. Der Punkt Q gehört zu n, denn $d(Q, A) = d(Q, B)$ (wir hatten mal so eine Beschreibung der Mittelsenkrechten, Prop. 6.7.15). Also ist $\sigma(Q) = Q$, also $\sigma \in G_Q$. Ausserdem ist wie im vorigen Beweis $\sigma(A) = B$. Damit ist die Transitivität bewiesen.

Sei jetzt $\tau \in G_Q$ ein Element in der Standgruppe $(G_Q)_A$, das heisst, $\tau(A) = A$. Nach Voraussetzung ist aber auch $\tau(Q) = Q$. Demnach lässt τ alle Punkte auf der Geraden k durch Q und A fest, denn jeder dieser Punkte kann durch seine Abstände zu A und Q bestimmt werden. Wir wissen aber schon, dass es genau zwei Isometrien gibt, die alle Punkte von k festlassen: die Identität und die Spiegelung an k. □

Korollar 9.1.3. (1) *Jede Isometrie* $\tau\colon X \to X$ *kann geschrieben werden als Zusammensetzung von höchstens drei Geradenspiegelungen.* (2) *Jede Isometrie* $\tau\colon X \to X$*, die wenigstens ein Element von* X *festlässt, kann geschrieben werden als Zusammensetzung von höchstens zwei Geradenspiegelungen, die dieses Element auch festlassen.* (3) *Jede Isometrie* $\tau\colon X \to X$*, die wenigstens zwei Elemente von* X *festlässt, ist eine Spiegelung an der Geraden durch diese zwei Elemente, oder die Identität.*

Beweis. Es handelt sich hier eigentlich um ein Korollar zu den *Beweisen* von Propositionen 9.1.1 und 9.1.2. Die wesentliche Beobachtung ist, dass wir in diesen Beweisen keine anderen Isometrien erfinden mussten als Geradenspiegelungen. —

Fall (1). Wir wählen $Q \in X$. Wenn $\tau(Q) = Q$, sind wir in Fall (2). Wenn $\tau(Q) \neq Q$, dann können wir wie im Beweis von Proposition 9.1.1 eine Geradenspiegelung σ finden derart, dass $\sigma(\tau(Q)) = Q$. Weil $\tau = \sigma \circ (\sigma \circ \tau)$, haben wir wieder auf Fall (2) reduziert. Auf diese Weise ist Fall (1) vollständig auf Fall (2) zurückgeführt. — Fall (2). Wir dürfen annehmen, dass $\tau(Q) = Q$ für ein $Q \in X$. Wir bauen den Kreis $\mathcal{S}$ wie in Proposition 9.1.2 und wählen $A \in \mathcal{S}$. Wenn $\tau(A) = A$, sind wir in Fall (3). Wenn $\tau(A) \neq A$, dann können wir wie im Beweis von Proposition 9.1.1 eine Geradenspiegelung σ finden derart, dass $\sigma(Q) = Q$ und $\sigma(\tau(A)) = A$. Weil $\tau = \sigma \circ (\sigma \circ \tau)$, haben wir wieder auf Fall (3) reduziert. Auf diese Weise ist Fall (2) vollständig auf Fall (3) zurückgeführt. — Fall (3) ist uns aber schon hinreichend bekannt. $\square$

Beispiel 9.1.4. Sei isom($\mathbb{H}$) die Gruppe der Isometrien von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$. Sei GL($2, \mathbb{R}$) die Gruppe der 2×2-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ und Determinante ± 1. Wir hatten jedem Element

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

von GL($2, \mathbb{R}$) ein $f_M \in$ isom($\mathbb{H}$) zugeordnet, $f_M(z) = (az + b)/(cz + d)$ im Fall det(M) $= 1$ und $f_M(z) = (a\bar{z} + b)/(c\bar{z} + d)$ im Fall det(M) $= -1$. In Übungsaufgaben wurde gezeigt/behauptet, dass diese Zuordnung $M \mapsto f_M$ ein Homomorphismus φ ist von GL($2, \mathbb{R}$) nach isom($\mathbb{H}$). In Übungsaufgaben wurde gezeigt/behauptet, dass alle Geradenspiegelungen zum Bild von φ gehören. Mit Korollar 9.1.3 folgt jetzt, dass φ surjektiv ist.

Der Kern von φ stimmt überein mit der normalen Untergruppe

$$K := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(Das könnte auch eine Übungsaufgabe werden, aber eine leichte.) Demnach ist (mit Homomorphiesatz) die Gruppe isom($\mathbb{H}$) isomorph zu GL($2, \mathbb{R}$)$/K$.

Weil K eine *normale* Untergruppe ist, dürfen wir hier die Menge der (Links)-nebenklassen $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})/K$ als Gruppe betrachten. Man schreibt auch gerne $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ für $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})/K$. (Abkürzungen: GL für *general linear group*, PGL für *projective general linear group*.)

9.2. Kreisbögen

Vorsicht: hier wird unterschieden zwischen *Kreis* und *Kreisscheibe*. Ein Kreis in X (metrischer Raum, der Axiome I und II erfüllt) ist eine Teilmenge der Form $\{A \in X \mid d(A,Q) = r\}$, wobei $Q \in X$ fest gewählt ist (Zentrum des Kreises) und $r \geq 0$ eine festgewählte reelle Zahl ist (Radius des Kreises). Eine Kreisscheibe hat dagegen die Form $\{A \in X \mid d(A,Q) \leq r\}$ (abgeschlossene Kreisscheibe) oder $\{A \in X \mid d(A,Q) < r\}$ (offene Kreisscheibe).

Vorsicht: wie immer ist *Seite einer Geraden* k nicht eine Teilmenge von k, sondern eine Teilmenge von $X \smallsetminus k$. Die Gerade k hat zwei solche Seiten (wegen Axiom II).

Wir wählen jetzt $Q \in X$ und $r > 0$ und haben damit den Kreis

$$\mathcal{S} = \{A \in X \mid d(Q,A) = r\}.$$

Proposition 9.2.5. *Gegeben verschiedene* $A, B \in \mathcal{S}$. *Sei* k *die Gerade in* X *durch* A, B.

- *Für* $E \in [A,B]$ *ist* $d(E,Q) \leq r$, *sogar* $d(E,Q) < r$ *falls* $E \neq A, B$.
- *Für* $E \in k \smallsetminus [A,B]$ *ist* $d(E,Q) > r$.

Beweis: kann bei Iversen (Proposition I.5.1) nachgelesen werden. Hier nur eine Skizze. Es fängt damit an, dass wir die senkrechte Projektion Q^k von Q auf k finden. Da Q^k von allen Punkten auf k derjenige und der einzige ist, der den geringsten Abstand von k hat, muss gelten $d(Q,Q^k) < r$. Danach wählen wir eine abstandserhaltende Abbildung $g\colon \mathbb{R} \to X$ mit $\mathrm{bild}(g) = k$ und $g(0) = Q^k$. Es genügt jetzt, zu zeigen, dass die beiden Funktionen

$$t \mapsto d(Q,g(t)), \qquad t \mapsto d(Q,g(-t))$$

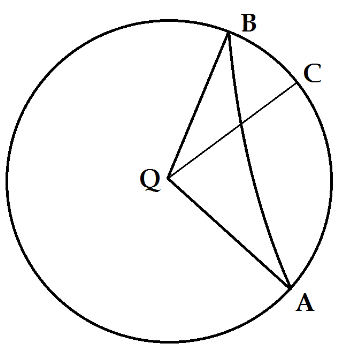
für $t \in [0,\infty)$ monoton wachsend sind. Da schon klar ist, dass der Minimalwert bei $t = 0$ angenommen wird und dass diese Funktionen *stetig* sind, genügt es, zu zeigen, dass sie auch *injektiv* sind. Wenn das nicht der Fall ist (z.B. für die Funktion $t \mapsto d(Q,g(t))$ mit $t \geq 0$), dann gibt es $b > a > 0$ mit $d(Q,g(a)) = d(Q,g(b))$. Sei n die Mittelsenkrechte von $[g(a),g(b)]$. Dann muss gelten $Q \in n$ (Abstandsgleichung für die Mittelsenkrechte) und damit ist n die eindeutige Senkrechte zu k, die Q enthält. Also ist $Q^k = g(0)$ der Mittelpunkt von $[g(a),g(b)]$, und dann muss 0 der Mittelpunkt von $[a,b]$ sein ... Widerspruch. $\square$

Definition 9.2.6. Gegeben $A, B \in \mathcal{S}$. Wir wollen den *minimalen Kreisbogen* $\mathcal{T}_{A,B}$ durch A und B beschreiben, eine Teilmenge von $\mathcal{S}$. (Wenn A, B, Q auf einer Geraden liegen, $A \neq B$, dann wird noch etwas zusätzliche Information benötigt, um ihn eindeutig zu machen.)

- Wenn A, B, Q nicht auf einer Geraden liegen, und auch wenn $A = B$, ist $\mathcal{T}_{A,B} = \{ C \in \mathcal{S} \mid [Q, C] \cap [A, B] \neq \emptyset \}$.
- Wenn $A \neq B$ ist und A, B, Q auf einer einzigen Geraden k liegen, müssen wir noch eine Seite von k aussuchen. Dann sei

  $$\mathcal{T}_{A,B} = \{C \in \mathcal{S} \mid C \in k \text{ oder } C \in \text{ ausgesuchte Seite von } k\}.$$

  (Zugegeben: es ist schlecht, dass in diesem Fall die Bezeichnung $\mathcal{T}_{A,B}$ die Seitenwahl nicht anzeigt.)



Beachten: $A, B \in \mathcal{T}_{A,B}$. Wir nennen A, B die *Endpunkte* vom Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B}$. Da $\mathcal{T}_{A,B}$ als Teilmenge von $\mathcal{S}$ definiert wurde, darf man fragen, ob die Endpunkte sich aus dieser Teilmenge rekonstruieren lassen (ohne weitere Information). Das ist wohl der Fall, aber es ist garnicht so leicht zu zeigen, und ich hoffe, dass wir daran vorbeikommen. — Auch beachten: im Fall $A = B$ ist $\mathcal{T}_{A,B} = \{A\} = \{B\}$.

Lemma 9.2.7. *Gegeben* $A, B \in \mathcal{S}$ *und Kreisbogen* $\mathcal{T}_{A,B} \subset \mathcal{S}$ *wie oben. Sei* $C \in \mathcal{T}_{A,B}$. *Dann ist*

$$\mathcal{T}_{A,C} \cup \mathcal{T}_{C,B} = \mathcal{T}_{A,B} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T}_{A,C} \cap \mathcal{T}_{C,B} = \{C\}.$$

Beweis. Die Fälle $C = A$ und $C = B$ sind klar. Wir nehmen jetzt an $C \neq A, B$. Dann folgt erstens, dass $A \neq B$, und zweitens, dass A, B, C nicht auf einer Geraden liegen. Denn die Gerade durch A und B hat wegen Proposition 9.2.5 keine anderen Schnittpunkte mit $\mathcal{S}$ als A und B. — Sei $D \in \mathcal{T}_{A,B}$. Wenn $D \neq A, B, C$, dann muss wegen Paschs Axiom (erster Teil von Axiom II) die Gerade durch Q (Zentrum des Kreises) und D genau eins der Segmente $[A, C]$ und $[B, C]$ kreuzen. Das bedeutet auch, dass entweder $[Q, D] \cap [A, C] \neq \emptyset$ oder $[Q, D] \cap [B, C] \neq \emptyset$, aber nicht beides. Denn andere Elemente der Geraden durch Q und D gehören wegen Proposition 9.2.5 nicht zu $[A, C]$ oder $[B, C]$; sie sind zu weit weg von Q oder auf der falschen Seite der Geraden durch A und B. Also ist $D \in \mathcal{T}_{A,C}$ oder $D \in \mathcal{T}_{C,B}$, aber nicht beides. — Im Fall $D = A$ müssen wir noch zeigen, dass $A \notin \mathcal{T}_{C,B}$. Kurzes Argument: A und B sind auf verschiedenen Seiten der Geraden durch Q und C, also sind $[Q, A] \setminus \{Q\}$ und $[B, C] \setminus \{C\}$ auf verschiedenen Seiten der Geraden durch Q und C. Also ist $[Q, A] \cap [C, B] = \emptyset$. Ähnlich: $B \notin \mathcal{T}_{A,C}$. $\square$

Definition 9.2.8. Gegeben $A, B \in \mathcal{S}$ und minimaler Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B}$ wie oben. Wir definieren eine Relation $\leq$ auf $\mathcal{T}_{A,B}$ wie folgt. Für $C, D \in \mathcal{T}_{A,B}$ soll gelten $C \leq D$ genau dann[1], wenn $\mathcal{T}_{A,C} \subset \mathcal{T}_{A,D}$.

Lemma 9.2.9. *Diese Relation ist eine Ordnungsrelation. Sie ist also solche auch total, das heisst, wenn* $C, D \in \mathcal{T}_{A,B}$, *dann gilt* $C \leq D$ *oder* $D \leq C$.

Beweis. Es ist klar, dass diese Relation transitiv und reflexiv ist. Antisymmetrisch: sei $C \leq D$ und $D \leq C$. Das bedeutet $\mathcal{T}_{A,C} = \mathcal{T}_{A,D}$. Angenommen $C \neq D$. Nun ist $C \in \mathcal{T}_{A,C} = \mathcal{T}_{A,D}$, also $\{C\} = \mathcal{T}_{A,C} \cap \mathcal{T}_{C,D}$ nach Lemma 9.2.7 (angewandt mit D anstelle von B). Wegen

$$D \in \mathcal{T}_{A,D} \cap \mathcal{T}_{C,D} = \mathcal{T}_{A,C} \cap \mathcal{T}_{C,D}$$

folgt daraus $D = C$, Widerspruch.

Als Vorbereitung für Beweis von Totalität überlegen wir uns zuerst: wenn $C \in \mathcal{T}_{A,D}$ dann $\mathcal{T}_{A,C} \subset \mathcal{T}_{A,D}$, also $C \leq D$. Denn $C \in \mathcal{T}_{A,D}$ bedeutet $\mathcal{T}_{A,D} = \mathcal{T}_{A,C} \cup \mathcal{T}_{C,D}$ nach Lemma 9.2.7.

Totalität: Für $C \in \mathcal{T}_{A,B}$ haben wir $\mathcal{T}_{A,B} = \mathcal{T}_{A,C} \cup \mathcal{T}_{C,B}$. Wenn jetzt $D \in \mathcal{T}_{A,B}$ daherkommt, $D \neq C$, dann ist entweder $D \in \mathcal{T}_{A,C}$ und damit $D \leq C$ wie eben gezeigt. Oder es ist $D \in \mathcal{T}_{C,B}$ und damit $C \notin \mathcal{T}_{D,B}$ und damit $C \in \mathcal{T}_{A,D}$ (alles wegen Lemma 9.2.7) und damit $C \leq D$. $\square$

9.3. Bogenlänge

Wir bleiben bei den Bezeichnungen vom vorigen Abschnitt.

Definition 9.3.10. Die *Bogenlänge* vom minimalen Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B}$ wird versuchsweise definiert als die reelle Zahl

$$\sup_{\substack{A_0, A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{T}_{A,B} \\ A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_m = B}} \sum_{i=1}^{m} d(A_{i-1}, A_i)\,.$$

[1]Eigentlich müsste ich ja schreiben $(C, D) \in \leq$.

Das ist eigentlich klar genug. Der Gedanke ist, dass wir den Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B}$ durch ein *Polygon* mit Ecken $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ annähern (wobei $A_0 = A$ und $A_m = B$), also durch

$$[A_0, A_1] \cup [A_1, A_2] \cup [A_2, A_3] \cup [A_{m-1}, A_m],$$

und dann die Gesamtlänge des Polygons, also

$$\sum_{i=1}^{k} d(A_{i-1}, A_i)$$

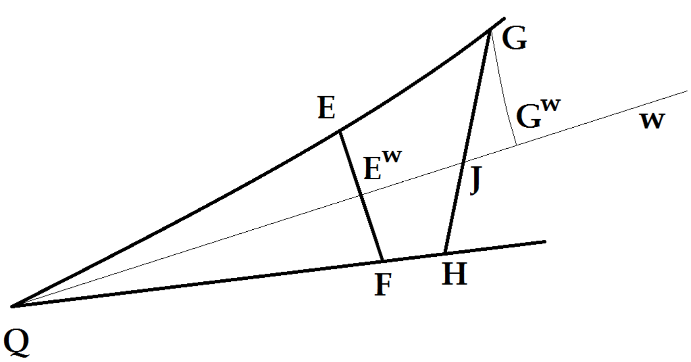
als eine Annäherung an die Bogenlänge betrachten. Dabei darf m (Anzahl der Ecken minus 1) beliebig gross sein. Die Bedingung

$$A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_m$$

(im Sinne der Ordnungsrelation von Definition 9.2.8) sorgt dafür, dass die verschiedenen Segmente $[A_{i-1}, A_i]$ oder *Kanten* des Polygons einander nicht treffen, ausser in gemeinsamen Endpunkten: $[A_{i-1}, A_i] \cap [A_i, A_{i+1}] = \{A_i\}$.

Es bleibt aber ein kleines Problem: wir haben noch nicht gezeigt, dass das Supremum in der Formel oben existiert.

Lemma 9.3.11. *Gegeben Dreieck* ΔQEF *in* X *mit* $d(Q,E) = d(Q,F) > 0$*, also gleichschenklig. Gegeben* G *auf der Geraden durch* Q *und* E*, und* H *auf der Geraden durch* Q *und* F*, wobei* $E \in [Q,G]$ *und* $F \in [Q,H]$*. Dann ist* $d(E,F) \leq d(G,H)$*.*



Beweis. Sei w die Mittelsenkrechte von $[E,F]$. Dann ist $Q \in w$ weil $d(Q,E) = d(Q,F)$; siehe Abschnitt 6.7 in Vorlesungsnotizen. Das Segment $[G,H]$ muss w in einem Punkt J treffen. (Das ist eine doppelte

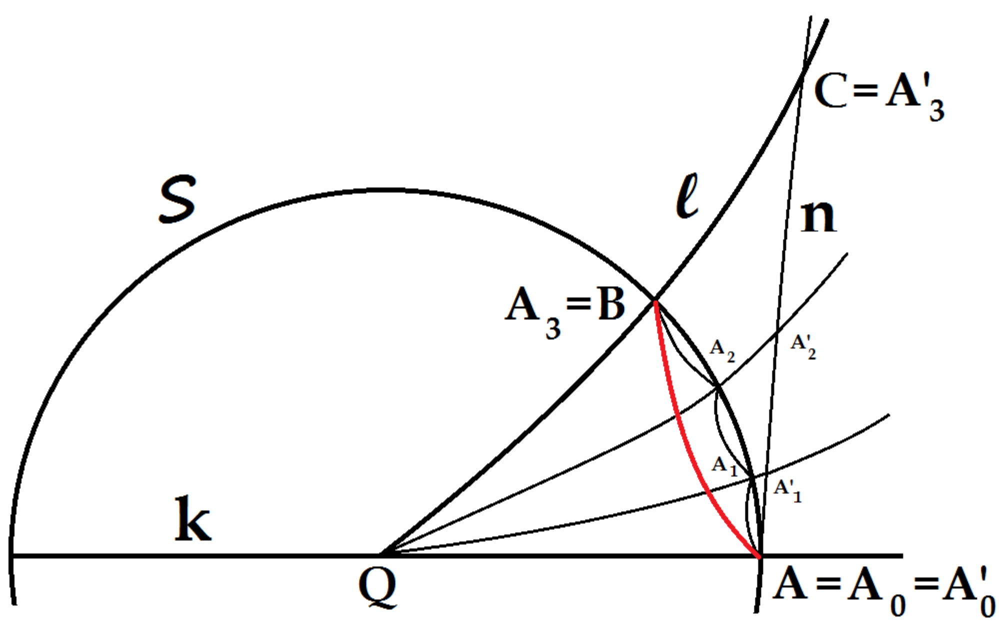
Anwendung von Paschs Axiom, Aufgabe 3 von Übungsblatt 2; erst anwenden auf w und $\Delta\mathsf{EFH}$, dann auf w und $\Delta\mathsf{EHG}$. Wenn $\mathsf{G}=\mathsf{E}$ oder $\mathsf{H}=\mathsf{F}$, was erlaubt ist, dann genügt einmalige Anwendung von Paschs Axiom.) Wir wissen $\mathsf{d}(\mathsf{G},\mathsf{J})\geq\mathsf{d}(\mathsf{G},\mathsf{G}^w)$ wegen Lemma 6.2.4 und $\mathsf{d}(\mathsf{G},\mathsf{G}^w)\geq\mathsf{d}(\mathsf{E},\mathsf{E}^w)$ wegen Proposition 7.1.3 (neuere Fassung, Vorlesungsnotizen; bei Iversen Prop. I.3.8), also $\mathsf{d}(\mathsf{E},\mathsf{E}^w)\leq\mathsf{d}(\mathsf{G},\mathsf{J})$. Ebenso ist $\mathsf{d}(\mathsf{F},\mathsf{F}^w)\leq\mathsf{d}(\mathsf{H},\mathsf{J})$, wobei natürlich $\mathsf{F}^w=\mathsf{E}^w$. Damit folgt $\mathsf{d}(\mathsf{E},\mathsf{F})=\mathsf{d}(\mathsf{E},\mathsf{E}^w)+\mathsf{d}(\mathsf{F},\mathsf{F}^w)\leq\mathsf{d}(\mathsf{G},\mathsf{J})+\mathsf{d}(\mathsf{H},\mathsf{J})=\mathsf{d}(\mathsf{G},\mathsf{H})$. ☐

Lemma 9.3.12. *Mit Bezeichnungen wie in Definition 9.3.10 sei* k *die Gerade durch* Q *und* $\mathsf{A}\in\mathsf{S}$*; sei* ℓ *die Gerade durch* Q *und* $\mathsf{B}\in\mathcal{S}$*; sei* $\mathfrak{n}$ *die Senkrechte zu* k*, die durch* A *geht. Sei* $\mathsf{A}_0,\mathsf{A}_1,\ldots,\mathsf{A}_m$ *eine Auswahl von endlich vielen Elementen von* $\mathcal{T}_{\mathsf{A},\mathsf{B}}$ *derart, dass*

$$\mathsf{A}=\mathsf{A}_0\leq\mathsf{A}_1\leq\cdots\leq\mathsf{A}_{m-1}\leq\mathsf{A}_m=\mathsf{B}.$$

Angenommen, $\mathfrak{n}$ *trifft* ℓ *in einem Punkt* C*, und* $\mathsf{Q}\notin[\mathsf{B},\mathsf{C}]$*. Dann ist*

$$\mathsf{d}(\mathsf{A},\mathsf{B})\leq\sum_{i=1}^{m}\mathsf{d}(\mathsf{A}_{i-1},\mathsf{A}_i)\leq\mathsf{d}(\mathsf{A},\mathsf{C}).$$



Beweis. Die erste Ungleichung $\mathsf{d}(\mathsf{A},\mathsf{B})\leq\sum_i\mathsf{d}(\mathsf{A}_{i-1},\mathsf{A}_i)$ ist zwar nützlich, aber sehr bescheiden, denn sie ist ja eine ziemlich direkte Konsequenz aus der Dreiecksungleichung für den metrischen Raum X. Wir konzentrieren uns also auf den Beweis der zweiten Ungleichung. Das Bild gerade oben illustriert sowohl die Aussage als auch den Beweis.

Im Bild ist offenbar $m = 3$. Wir dürfen $A \neq B$ annehmen. Die Punkte A, B, Q können hier nicht auf einer einzigen Geraden liegen, sonst wäre $A = C$ und dann $Q \in [B, C]$ entgegen unseren Annahmen. Die Segmente $[A_{i-1}, A_i]$ sind etwas krumm gezeichnet, damit sie sich vom Kreis abheben; das ist erlaubt und erinnert uns auch an Proposition 9.2.5. Das Segment $[A, B]$ ist auch krumm gezeichnet und sogar in Rot, weil es wichtig ist. OBdA ist $A_i \neq A_j$ falls $0 \leq i < j \leq m$. Der wichtige Gedanke hier ist, dass wir die Gerade durch Q und A_i mit der Geraden n schneiden und so den Schnittpunkt A'_i erhalten. Wegen Lemma 9.3.11 ergibt sich

$$d(A_{i-1}, A_i) \leq d(A'_{i-1}, A'_i) .$$

Wie das Bild zeigt, ist dann

$$\sum_i d(A_{i-1}, A_i) \leq \sum_i d(A'_{i-1}, A'_i) = d(A, C).$$

Was fehlt noch? Wir müssen noch zeigen, dass die Schnittpunkte A'_i tatsächlich existieren und dass sie so auf dem Segment $[A, C]$ angeordnet sind, wie das Bild es andeutet.

Das Bild zeigt, dass alle Punkte von n ausser A einen Abstand $> r$ von Q haben, also ausserhalb vom Kreis $\mathcal{S}$ liegen. Das ist gerechtfertigt wegen Lemma 6.2.4, Vorlesungsnotizen (denn $A = Q^n$, senkrechte Projektion von Q auf die Gerade n).

Es wurde ausserdem vorausgesetzt $Q \notin [B, C]$. Da $Q, B, C \in \ell$ und $d(Q, C) > d(Q, B) = r$, muss gelten $B \in [Q, C]$, wie im Bild.

Es folgt, dass Q und C auf verschiedenen Seiten der Geraden h durch A und B liegen. (Diese Gerade h ist nicht abgebildet, aber das Segment $[A, B]$ ist abgebildet - in Rot.) Da h nur den Punkt A mit n gemeinsam hat, folgt, dass alle Elemente von $[A, C] \smallsetminus \{A\}$ auf der Seite von h liegen, die Q nicht enthält; nennen wir sie die *ferne Seite* von h. Das ist auch die Seite von h, zu der alle Elemente von $\mathcal{T}_{A,B} \smallsetminus \{A, B\}$ gehören. *Zusammenfassung*: alle Elemente von $\mathcal{T}_{A,B} \cup [A, C] \smallsetminus \{A, B\}$ gehören zur fernen Seite der Geraden durch A und B.

Existenz der Schnittpunkte A'_i *für* $i = 1, 2, \ldots, m-1$: Sei k_i die Gerade durch Q und A_i . Wir wenden Paschs Axiom an auf das Dreieck ΔABC und die Gerade k_i , die weder A noch B noch C enthält. Da k_i das Segment $[A, B]$ trifft (wegen $A_i \in \mathcal{T}_{A,B}$) und das Segment $[B, C]$ nicht trifft (wegen $k_i \cap \ell = \{Q\}$ und Voraussetzung $Q \notin [B, C]$), muss k_i wegen Pasch das Segment $[A, C]$ treffen. Den Schnittpunkt nennen wir A'_i. (Paschs Axiom ist eine Umformulierung der ersten Hälfte von Axiom II.) ✓

Richtige Anordnung der A'_i: Gegeben $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ mit $i < j$. Weil $\mathcal{T}_{A,B} \cup [A, C] \setminus \{A, B\}$ in der fernen Seite der Geraden h durch A und B enthalten ist, sind auch die Segmente $[A_j, A'_j]$ in dieser fernen Seite enthalten. Also ist $Q \notin [A_j, A'_j]$. Daher kann $A'_i \in [A, A'_j]$ genauso gezeigt werden, wie es im Fall $j = m$ gezeigt wurde; dabei war $A_m = B$ und $A'_m = C$. ✓ □

Bemerkung 9.3.13. In den Bezeichnungen von Lemma 9.3.12: Der Beweis vom Lemma zeigt auch, dass wir eine Injektion haben von $\mathcal{T}_{A,B}$ nach $[A, C]$, gegeben durch

$$\mathcal{T}_{A,B} \ni D \ \mapsto \ \textit{Schnittpunkt der Geraden durch } Q \textit{ und } D \textit{ mit } [A, C].$$

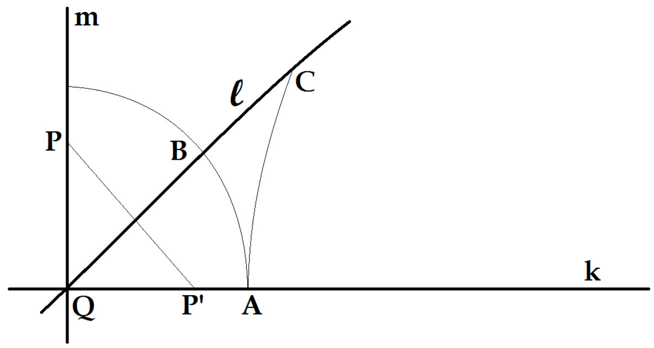
Ausserdem ist diese Injektion eine *Bijektion*. Denn sei $E \in [A, C]$. Weil $d(Q, E) \geq r$, hat das Segment $[Q, E]$ genau einen Schnittpunkt D mit $\mathcal{S}$. Wir müssen zeigen, dass $D \in \mathcal{T}_{A,B}$.

Wegen Pasch, angewandt auf ΔABC, hat die Gerade durch Q und E einen Schnittpunkt mit $[A, B]$. Da Q und E zu verschiedenen Seiten der Geraden durch A und B gehören, hat auch $[Q, E]$ einen Schnittpunkt mit der Geraden durch A und B. Es folgt $[Q, E] \cap [A, B] \neq \emptyset$. Daraus folgt $[Q, D] \cap [A, B] \neq \emptyset$, denn die Elemente von $[Q, E] \setminus [Q, D]$ haben Abstand $> r$ von Q. Aber $[Q, D] \cap [A, B] \neq \emptyset$ bedeutet $D \in \mathcal{T}_{A,B}$. □

Wir wählen wir jetzt den Radius $r > 0$ für unseren Kreis $\mathcal{S}$ folgendermassen. Das Zentrum $Q \in X$ des Kreises ist schon ausgesucht und wir wählen zwei Geraden k und m durch Q, die senkrecht zueinander sind. Auf k wählen wir einen Punkt P und auf m einen Punkt P' derart, dass $d(P, Q) = d(P', Q) > 0$. Sei ℓ die Mittelsenkrechte von $[P, P']$. Wir wählen $C \in \ell$ so dass $C \neq Q$. Sei schliesslich $A = C^k$ (senkrechte Projektion von C auf die Gerade k) und sei

$$r = d(Q, A) > 0.$$

Wegen Saccheris Ungleichung ist $r = d(Q, A) \leq d(Q, C)$. Sei $B \in [Q, C]$ derjenige Punkt, der $d(Q, B) = r$ erfüllt.



Für den Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B}$ gilt dann wegen Lemma 9.3.12, dass die Bogenlänge von $\mathcal{T}_{A,B}$ ordnungsgemäss definiert ist (d.h., das Supremum in Definition 9.3.10 existiert in diesem Spezialfall).

Übrigens: aus Konstruktion und Bild sollte klar sein, dass der Winkel bei Q von ΔQAB, wenn er irgendeinen Sinn hat, die Hälfte des (rechten) Winkels bei Q von $\Delta QPP'$ ist. So gesehen schöpft der minimale Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B}$ ein Achtel von einem Vollkreis aus.

Diese Wahl von Radius r scheint etwas willkürlich. Das soll uns jetzt nicht stören. Später gibt es vielleicht noch Kommentare dazu.

Man könnte denken, dass r beliebig gross gemacht werden kann, wenn wir nur Q so wählen, dass $d(Q, C)$ sehr gross ist. Stimmt aber nicht.

Proposition 9.3.14. *Für* $A, B \in \mathcal{S}$ *und* $C \in \mathcal{T}_{A,B}$ *ist*

$$\text{Bogenlg von } \mathcal{T}_{A,B} = \text{Bogenlg von } \mathcal{T}_{A,C} + \text{Bogenlg von } \mathcal{T}_{C,B}$$

in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann ordnungsgemäss definiert ist, wenn die rechte Seite ordnungsgemäss definiert ist, und in diesem Fall Gleichheit gilt.

Beweis. Wir können annehmen $C \neq A, B$. Die linke Seite war etwas provisorisch definiert als

$$\sup_{\substack{A_0, A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{T}_{A,B} \\ A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_m = B}} \sum_{i=1}^{m} d(A_{i-1}, A_i)\,.$$

Wenn wir zu einer Auswahl $A_0, A_1, \ldots, A_m$ von Teilungspunkten noch den Punkt C als zusätzlichen Teilungspunkt *hinzufügen* (an der richtigen Stelle, etwa $A_j \leq C \leq A_{j+1}$), dann wird in der rechten Seite $d(A_j, A_{j+1})$ ersetzt durch $d(A_j, C) + d(C, A_{j+1})$, was jedenfalls nicht kleiner ist (wegen Dreiecksungleichung in X). Also ist es in Ordnung, in der Definition der Bogenlänge von $\mathcal{T}_{A,B}$ von vornherein nur solche Auswahlen von Teilungspunkten zu erlauben, die C als einen der Teilungspunkte nennen. Solche Auswahlen von Teilungspunkten können geschrieben werden in der Form

$$A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_{s-1} \leq A_s = C = A_0^\sharp \leq A_1^\sharp \leq \cdots A_{t-1}^\sharp \leq A_t^\sharp = B.$$

Die Länge des entsprechenden Polygons ist dann

$$\sum_{i=1}^{s} d(A_{i-1}, A_i) + \sum_{j=1}^{t} d(A_{j-1}^\sharp, A_j^\sharp).$$

Die beiden Summanden sind typische Approximationen der Bogenlänge von $\mathcal{T}_{A,C}$ bzw. $\mathcal{T}_{C,B}$ durch Polygone, wie sie in der Definition dieser Bogenlängen auftauchen. Auf diese Weise ergibt sich die Behauptung. □

Korollar 9.3.15. *Das Supremum in Definition 9.3.10 existiert immer, bei unserer Wahl von Radius* r*.*

Beweis. Nach Wahl von r ist die Bogenlänge $\mathcal{T}_{A,B}$ ordnungsgemäss definiert, wenn $\mathcal{T}_{A,B}$ ein Achtel von einem Vollkreis darstellt. Nach Proposition 9.3.14 können wir uns dann auch einen Viertelkreis oder einen Halbkreis erlauben. Nach Proposition 9.3.14 können wir uns dann auch jeden Kreisbogen erlauben, der in einem Halbkreis enthalten ist. □

10.1 Die normierte Bogenlängemetrik auf dem Kreis $\mathcal{S}$

Bemerkung 10.1.16. *Kleine Vor- und Rückschau.* Für unseren metrischen Raum X (der Axiome I und II erfüllt) wollen wir $G = \mathrm{isom}(X)$ als Gruppe verstehen, und dann X selbst. Dazu haben wir ein $Q \in X$ gewählt und haben uns erstmal die Untergruppe G_Q von G vorgenommen (Standgruppe bei/für Q der Standardwirkung von G auf X). Die Gruppe G_Q wirkt auch auf $\mathcal{S}$, dem Kreis vom Radius r um Q. Wir versuchen, den Kreis $\mathcal{S}$ als geometrisches Ding besser zu verstehen, dann die Wirkung von G_Q auf dem Kreis, und dadurch schliesslich G_Q selbst. (Und dann G.)

Aber wie versteht man einen Kreis? Wir sollten ihn natürlich als metrischen Raum verstehen. Wir denken mal der Einfachheit halber an den Fall, wo $r = 1$ und $X = \mathbb{E}$ (euklidische Ebene) und $Q = (0, 0)$. Es gibt interessanterweise zwei Metriken auf $\mathcal{S}$, die einem in den Sinn kommen. Eine ist die Unterraummetrik. In dieser Metrik ist zum Beispiel der Abstand zwischen $(1, 0) \in \mathcal{S}$ und $(0, 1) \in \mathcal{S}$ gleich $\sqrt{2}$, und der Abstand zwischen $(1, 0) \in \mathcal{S}$ und $(-1, 0) \in \mathcal{S}$ ist 2. Eine andere Metrik, die auch sehr nützlich ist, ist die Bogenlängemetrik. In dieser Metrik ist der Abstand zwischen $(1, 0) \in \mathcal{S}$ und $(0, 1) \in \mathcal{S}$ gleich $\pi/2$, und der Abstand zwischen $(1, 0) \in \mathcal{S}$ und $(-1, 0) \in \mathcal{S}$ ist π. Man sieht sofort, dass das sehr verschiedene Metriken sind. Sie sind auch nicht proportional zueinander, weil zum Beispiel $2 : \sqrt{2} \neq \pi : (\pi/2)$.

Man sieht auch nach und nach, dass die Bogenlängemetrik d^{bg} in mancher Hinsicht einfacher zu verstehen ist, weil sie $\mathsf{d}^{\mathrm{bg}}(\mathsf{A},\mathsf{C})+\mathsf{d}^{\mathrm{bg}}(\mathsf{C},\mathsf{B})=\mathsf{d}^{\mathrm{bg}}(\mathsf{A},\mathsf{C})$ in vielen Fällen erfüllt, nämlich wenn C zu einem minimalen Kreisbogen $\mathcal{T}_{\mathsf{A},\mathsf{B}}$ gehört.

Bei allgemeinem X (also nicht unbedingt $\mathsf{X}=\mathbb{E}$) müssen wir uns entscheiden, ob wir die Unterraummetrik auf $\mathcal{S}$ wollen oder die Bogenlängemetrik. Entscheidung: wir wollen für diesen Zweck die Bogenlängemetrik (mit einer gewissen Normierung, die noch erklärt wird). Grund: wir können diese Kreise $\mathcal{S}$ mit normierter Bogenlängemetrik d^{bg} gut verstehen. Sie sehen immer gleich aus (bis auf Isometrie), ganz unabhängig von X. Auf diese Weise finden wir, dass G_Q auch immer gleich aussieht (bis auf Isomorphismus), ganz unabhängig von X. Also ist G_Q isomorph zur Gruppe der orthogonalen 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen. Das sind Matrizen, bei denen die beiden Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

Sei $\mathcal{S}$ der Kreis vom Radius r um $\mathsf{Q}\in\mathsf{X}$. Wir wählen $\mathsf{C}\in\mathcal{S}$ und dazu den gegenüberliegenden Punkt $\mathsf{C}^*\in\mathcal{S}$. Das heisst, $\mathsf{Q},\mathsf{C},\mathsf{C}*$ liegen auf einer einzigen Geraden, sind aber verschieden voneinander. Der Kreisumfang von $\mathcal{S}$ kann definiert werden als

$$2\cdot\text{Bogenlänge von }\mathcal{T}_{\mathsf{C},\mathsf{C}^*}\,.$$

Man muss sich fragen, ob das wohldefiniert ist. Wir haben gewählt: C (damit automatisch C^*) und eine Seite der Geraden durch C und Q. Wenn wir statt C einen anderen Punkt $\mathsf{D}\in\mathcal{S}$ genommen hätten, und eine Seite der Geraden durch Q und D ausgewählt hätten, könnten wir sagen: Es gibt ja eine Isometrie von X nach X, die Q festlässt und C in D überführt, und die auch die ausgesuchte Seite von der Geraden durch Q,C in die ausgesuchte Seite von der Geraden durch Q,D überführt. Alles, was bei der Bestimmung des Kreisumfangs von $\mathcal{S}$ mit Wahl C,C^* usw. gebraucht wird, Polygone noch und noch, wird durch die Isometrie übersetzt und trägt so zur Bestimmung des Kreisumfangs von $\mathcal{S}$ mit Wahl D,D^* usw. bei, so dass sich in beiden Fällen dieselbe Zahl für den Kreisumfang ergibt.

Definition 10.1.17. Die *normierte Bogenlängemetrik* d^{bg} auf dem Kreis $\mathcal{S}$ ist definiert durch

$$\mathsf{d}^{\mathrm{bg}}(\mathsf{A},\mathsf{B})=2\pi\,\frac{\text{Bogenlänge von }\mathcal{T}_{\mathsf{A},\mathsf{B}}}{\text{Kreisumfang von }\mathcal{S}}$$

für beliebige $\mathsf{A},\mathsf{B}\in\mathcal{S}$, wobei $\mathcal{T}_{\mathsf{A},\mathsf{B}}$ ein minimaler Kreisbogen mit Endpunkten A und B ist.

Hier gibt es gleich wieder eine Frage betreffend *wohldefiniert*. Der minimale Kreisbogen $\mathcal{T}_{\mathsf{A},\mathsf{B}}$, der in der Definition von $\mathsf{d}^{\mathrm{bg}}(\mathsf{A},\mathsf{B})$ auftaucht, ist zweideutig wenn $\mathsf{B}=\mathsf{A}^*$. In diesem Fall müssen wir zeigen, dass beide

Varianten von $\mathcal{T}_{A,B}$ dieselbe Bogenlänge haben. Aber das haben wir gerade gezeigt.

Die Zahl $d^{bg}(A,B)$ darf man gerne auffassen als das (Bogen-)Mass des *Winkels* (ohne Vorzeichen) bei Q von ΔQAB. Ich will hier aber besonders betonen (mehr als Iversen), dass wir dieses Winkelmass benutzen, um eine Metrik auf $\mathcal{S}$ zu basteln.

Statt jetzt zu zeigen, dass die normierte Bogenlängemetrik wirklich eine Metrik ist, nehmen wir eine Abkürzung. Sei $\mathcal{S}'$ der Einheitskreis in $\mathbb{E}$, der euklidischen Ebene. Auf $\mathcal{S}'$ haben wir auch die gewohnte Bogenlängemetrik (und sie ist schon normiert). In diesem Fall wissen wir ganz gut, dass es eine Metrik ist. Sie soll hier auch mit d^{bg} bezeichnet werden.

Proposition 10.1.18. *Es gibt eine Abbildung* $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ *mit der Eigenschaft*

$$d^{bg}(f(B), f(C)) = d^{bg}(B, C)$$

für alle $B, C \in \mathcal{S}$.

Beweis. Wir wählen ein festes $A \in \mathcal{S}$ und eine Seite der Geraden k durch Q und A, die wir hier die *obere Seite* von k nennen. (Sie ist eine Teilmenge von $X \smallsetminus k$.) Für $B \in \mathcal{S}$ sei

$$\theta_B = \begin{cases} d^{bg}(A,B) & \text{wenn } B \in \text{(obere Seite von } k\text{) oder } B \in k, \\ -d^{bg}(A,B) & \text{wenn } B \in \text{(untere Seite von } k\text{).} \end{cases}$$

Das ist unser Vorschlag für den Winkel (*mit Vorzeichen*!) bei Q von ΔQAB. Demnach setzen wir

$$f(B) = (\cos\theta_B, \sin\theta_B) \in \mathcal{S}'.$$

Eigenschaft $d^{bg}(f(B), f(C)) = d^{bg}(B,C)$: Wir behandeln drei Fälle, die einander nicht komplett ausschliessen, die aber jedenfalls alle Möglichkeiten ausschöpfen. *Erster Fall*: Wenn sowohl B als auch C zur Vereinigung von k und oberer Seite von k gehören, dann gehören sie zum minimalen Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,A^*}$, den wir hier als den oberen Halbkreis von $\mathcal{S}$ nehmen. In der Ordnung von $\mathcal{T}_{A,A^*}$ ist etwa $B \le C$ (oBdA). Dann haben wir $d^{bg}(B,C) = \theta_C - \theta_B$. Für $d^{bg}(f(B), f(C))$ finden wir genau dasselbe. *Zweiter Fall*: Sowohl B als auch C gehören zur Vereinigung von k und unterer Seite von k. Wir benutzen die Spiegelung σ_X an der Geraden k, und auch die entsprechende Spiegelung $\sigma_{\mathbb{E}}$ an der ersten Achse in $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} d^{bg}(f(B), f(C)) &= d^{bg}(\sigma_{\mathbb{E}}(f(B)), \sigma_{\mathbb{E}}(f(C))) \\ &= d^{bg}(f(\sigma_X(B)), f(\sigma_X(C))) \\ &= d^{bg}(\sigma_X(B), \sigma_X(C)) \qquad \text{(wegen Fall 1)} \\ &= d^{bg}(B,C). \end{aligned}$$

Dritter Fall: B gehört zur oberen Seite von k und C zur unteren Seite. Wir wählen einen minimalen Kreisbogen $\mathcal{T}_{B,C}$ (es gibt nur dann etwas zu wählen, wenn B, C, Q auf einer Geraden liegen). Weil B, C auf verschiedenen Seiten von k liegen, muss $[B, C] \cap [A, A^*] \neq \emptyset$ sein , so dass genau eins von A, A^* zu $\mathcal{T}_{B,C}$ gehört. Wenn $A \in \mathcal{T}_{B,C}$, dann haben wir

$$d^{bg}(B, C) = d^{bg}(B, A) + d^{bg}(A, C) = \theta_B - \theta_C$$

und daher auch $\theta_B - \theta_C \leq \pi$. Für $d^{bg}(f(B), f(C))$ erhalten wir dasselbe, $\theta_B - \theta_C$, mit Benutzung von $\theta_B - \theta_C \leq \pi$. Wenn dagegen $A^* \in \mathcal{T}_{B,C}$, dann haben wir

$$\begin{aligned} d^{bg}(B, C) &= d^{bg}(B, A^*) + d^{bg}(A^*, C) \\ &= (\pi - \theta_B) + (\pi + \theta_C) \\ &= 2\pi - (\theta_B - \theta_C) \end{aligned}$$

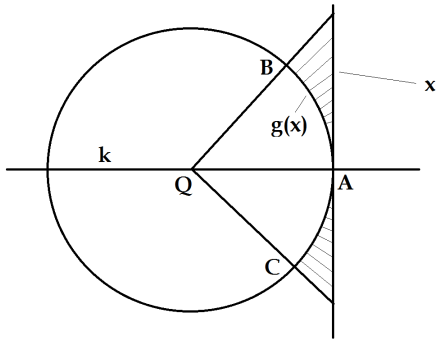
und daher auch $\theta_B - \theta_C \geq \pi$. Für $d^{bg}(f(B), f(C))$ erhalten wir dasselbe, $2\pi - (\theta_B - \theta_C)$, mit Benutzung von $\theta_B - \theta_C \geq \pi$. $\square$

Lemma 10.1.19. *Die Abbildung $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ in Proposition 10.1.18 ist bijektiv. Deswegen ist $d^{bg}\colon \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf $\mathcal{S}$ und f ist eine Isometrie von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}'$.*

Beweis. Injektiv: Wenn $B, C \in \mathcal{S}$ und $f(B) = f(C)$, dann ist

$$0 = d^{bg}(f(B), f(C)) = d^{bg}(B, C) \geq d_X(B, C) \cdot \text{Konst},$$

wobei mit Konst gemeint ist: 2π geteilt durch Kreisumfang von $\mathcal{S}$. Also ist $d_X(B, C) = 0$ und damit $B = C$.
Surjektiv: Man kann sofort sehen, dass gewisse Punkte von $\mathcal{S}'$ zu bild(f) gehören, wie zum Beispiel $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ und $(0, -1)$. Andererseits können wir mit Bemerkung 9.3.13 zeigen, dass für jedes $D \in$ bild(f) auch ein Kreisbogen vom normierten Bogenmass $\pi/4$ (mit D in der Mitte des Bogens) in bild(f) enthalten ist. (Das genügt dann.) Das wird jetzt vorgeführt im Fall $D = A$. Wegen Injektivität von f und Proposition 10.1.18 wissen wir schon, dass $d^{bg}\colon \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ eine Metrik ist und dass $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ abstandserhaltend ist. Damit ist f auch stetig. In Lemma 9.3.12 und Bemerkung 9.3.13 haben wir eine Bijektion g konstruiert von einem Intervall auf den minimalen Kreisbogen $\mathcal{T}_{B,C}$, wobei $d^{bg}(A, B) = d^{bg}(A, C) = \pi/4$ und $d^{bg}(B, C) = \pi/2$.



Diese Bijektion g ist stetig, weil sie für beliebige P_1, P_2 im Intervall erfüllt

$$d^{bg}(g(P_1), g(P_2)) = \text{Konst} \cdot \text{Bogenlg von } \mathcal{T}_{g(P_1),g(P_2)} \leq \text{Konst} \cdot d(P_1, P_2)$$

wegen Lemma 9.3.12, mit Konst wie oben. Ausserdem ist $\text{bild}(f \circ g)$ enthalten im minimalen Kreisbogen von $\mathcal{S}'$ mit Endpunkten $f(B)$ und $f(C)$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt jetzt, dass $f \circ g$ surjektiv ist als Abbildung von Intervall nach diesem Kreisbogen von $\mathcal{S}'$. Damit ist jedenfalls dieser Kreisbogen in $\text{bild}(f)$ enthalten, wie gezeigt werden sollte. □

Korollar 10.1.20. *Sei* $G = \text{isom}(X)$ *und* G_Q *die Standgruppe von* $Q \in X$ *für die übliche Wirkung von* G *auf* X. *Dann ist* G_Q *isomorph zu* $O(2)$ *(Gruppe der orthogonalen* 2×2*-Matrizen).*

Beweis. Geht ungefähr so:

(1) Weil G_Q auf $\mathcal{S}$ wirkt (Einschränkung der üblichen Wirkung von G auf X), erhalten wir einen Homomorphismus $\Phi\colon G_Q \to \text{isom}(\mathcal{S})$, wobei $\text{isom}(\mathcal{S})$ die Gruppe der Isometrien von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ ist. Dabei ist $\mathcal{S}$ mit der normierten Bogenlängemetrik ausgestattet.
(2) Dieser Homomorphismus ist ein Isomorphismus.
(3) Wegen Lemma 10.1.19 ist aber $\text{isom}(\mathcal{S})$ isomorph zu $\text{isom}(\mathcal{S}')$, Isometriegruppe vom Einheitskreis $\mathcal{S}' \subset \mathbb{E}$ mit der Bogenlängemetrik.
(4) Ausserdem ist natürlich $\text{isom}(\mathcal{S}')$ isomorph zu $O(2)$.

Das ist alles leicht zu zeigen. Bemerkung zu (1): wir haben hier, wie schon gesagt, die Wahl zwischen Unterraummetrik auf $\mathcal{S}$ und normierter Bogenlängemetrik, aber wir nehmen die normierte Bogenlängemetrik. Man muss sich überzeugen, dass die Einschränkung einer Isometrie $\tau\colon X \to X$ mit $\tau(Q) = Q$ auf den Kreis $\mathcal{S}$ eine Isometrie $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist für die normierte Bogenlängemetrik. Bemerkung zu (3): eine Isometrie $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ (für die normierten Bogenlängemetriken) bestimmt einen Isomorphismus von Gruppen

$$\psi_f\colon \text{isom}(\mathcal{S}) \longrightarrow \text{isom}(\mathcal{S}')$$

durch $\Psi_f(g) = f \circ g \circ f^{-1}$ für $g \in \mathrm{isom}(\mathcal{S})$. (Überprüfen: Ψ_f ist eine Abbildung von $\mathrm{isom}(\mathcal{S})$ nach $\mathrm{isom}(\mathcal{S}')$, ist ein Homomorphismus, ist bijektiv.) Bemerkung zu (2): Man sollte sich erst um die Injektivität kümmern. Wir zeigen also, dass $\ker(\Phi)$ nur ein Element hat. Sei $\tau\colon X \to X$ eine Isometrie, die Q festlässt und jeden Punkt von $\mathcal{S}$ festlässt. Dann ist $\tau = \mathrm{id}$ wegen Korollar 9.1.3. Fertig. Surjektivität: Es genügt, zu zeigen, dass $\Psi_f \circ \Phi$ (ein Homomorphismus von G_Q nach $\mathrm{isom}(\mathcal{S}')$) surjektiv ist. Jedes Element in $\mathrm{isom}(\mathcal{S}')$ kann als Zusammensetzung von höchstens zwei Geradenspiegelungen geschrieben werden (Spezialfall von Korollar 9.1.3; Spiegelungen an Geraden in $\mathbb{E}$, die den Nullpunkt enthalten). Also genügt es, zu zeigen, dass jede dieser Geradenspiegelungen zum Bild von $\Psi_f \circ \Phi$ gehört. Das ist eigentlich klar. Eine Gerade ℓ in $\mathbb{E}$ durch den Nullpunkt hat zwei Schnittpunkte A', B' mit $\mathcal{S}'$. Dann sind $f^{-1}(A') =: A$ und $f^{-1}(B') =: B$ zwei verschiedene Elemente von $\mathcal{S}$, die auf einer Geraden k mit dem Zentrum Q liegen. Dann ist $\Psi_f(\Phi(\sigma_k)) = \sigma_\ell$, wobei $\sigma_k\colon X \to X$ die Spiegelung an der Geraden k bezeichnet und $\sigma_\ell\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ die Spiegelung an ℓ. $\square$