04.12.2015

Nicht-Euklidische Geometrie (Weiss)
WS 2015-16
Vorlesungsnotizen, Woche 7

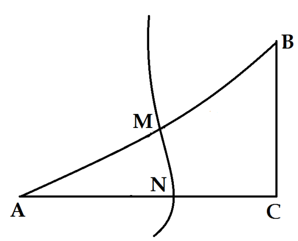
7.1. Ein paar Ungleichungen für Abstände

I.3.7 bis I.3.8. im Buch.

Dazu ein paar neue Vokabeln: Unter einem *Dreieck* in X verstehen wir eine Auswahl von drei Elementen A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen und deshalb verschieden sind. Eigentlich könnte man ganz gut $\{A, B, C\}$ dafür schreiben, aber bei Iversen wird ΔABC geschrieben. So ein Dreieck ΔABC bestimmt drei verschiedene Geraden: die durch A und B, die durch B und C und die durch A und C. Das Dreieck wird *rechtwinklig* genannt, wenn zwei von diesen Geraden senkrecht zueinander sind; siehe Definition von *senkrecht* in Vorl.notizen Woche 6. Genauere Angaben sind erwünscht/erforderlich, zum Beispiel rechter Winkel bei C.

Lemma 7.1.1. *Sei* ΔABC *ein rechtwinkliges Dreieck in* X *mit rechtem Winkel bei* C*. Wir schreiben* b *für die Gerade durch* A *und* C*, usw. Sei* M *der Mittelpunkt von* $[A, B]$*. Sei* $N = M^b$ *die Projektion von* M *auf die Gerade* b*. Dann gilt*

$$d(M, N) \leq d(B, C)/2\,,$$
$$d(A, N) \geq d(A, C)/2\,.$$



Beweis. Der Beweis bei Iversen ist Klasse: unerwartete Anwendung von Punktspiegelung kombiniert mit Saccheris Ungleichung. In dem Bild dazu (oben nur teilweise reproduziert) wird so getan, als ob der Punkt $N = M^b$ zum Segment $[A, C]$ gehören muss. (Wird das auch benutzt? Ich denke schon, denn ganz am Ende des Beweises wird $d(A, N) + d(N, C) = d(A, C)$ benutzt, obwohl es nicht hingeschrieben wird.) Natürlich muss $N = M^b$ zur Geraden b durch A und C gehören, aber das bedeutet ja nicht automatisch $N \in [A, C]$. Also, mein Gefühl war, das muss bewiesen werden. Ich bin der Sache nachgegangen und kann dazu folgendes Lemma anbieten.

Lemma 7.1.2. *Sei* k *eine Gerade in* X *und* $[A, B]$ *ein Segment in* X*, wobei* $A \neq B$. *Sei* $f\colon [A, B] \to k$ *die Einschränkung der Projektion auf* k. *Dann ist* f *entweder konstant, oder* f *ist stetig und injektiv mit* $\mathrm{bild}(f) = [A^k, B^k]$.

Beweis. Angenommen C, D sind verschiedene Elemente von $[A, B]$ und $f(C) = f(D)$, das heisst, $C^k = D^k$. Dann gehören C und D beide zu der eindeutigen Geraden n, die senkrecht zu k ist und durch $C^k = D^k \in k$ geht. Sie gehören aber auch zu der Geraden durch A und B. Also ist n die Gerade durch A und B. Also ist $[A, B]$ Teilmenge der Geraden n, die $\perp k$ ist. Bei der Projektion auf k wird diese ganze Gerade n auf einen einzigen Punkt abgebildet; also ist auch f konstant.

Anders ausgedrückt, wenn f nicht konstant ist, dann ist es injektiv. Ausserdem ist f stetig. Das folgt sofort aus Saccheris Ungleichung, denn sie sagt $d(f(C), f(D)) = d(C^k, D^k) \leq d(C, D)$ für beliebige C, D aus X und speziell aus $[A, B]$. Eine stetige injektive Abbildung von einem Segment $[A, B]$ in eine Gerade k ist wachsend oder fallend. (Diese Aussage wird allerdings erst sinnvoll, wenn wir eine Isometrie von einem Intervall in $\mathbb{R}$ mit dem Segment $[A, B]$ wählen und eine Isometrie von k mit $\mathbb{R}$.) Daraus folgt, dass $\mathrm{bild}(f) = [A^k, B^k]$. $\square$

Zurück zum Thema Ungleichungen für Abstände.

Proposition 7.1.3. *Gegeben zwei verschiedene Geraden* h *und* k *in* X*, die sich in einem Punkt treffen. Sei* $g\colon \mathbb{R} \to X$ *eine abstandserhaltende Abbildung mit* $\mathrm{bild}(g) = h$ *und* $g(0) =$ *Schnittpunkt von* h *und* k. *Dann ist*

$$\lim_{t \to +\infty} d(g(t), g(t)^k) = +\infty \ ,$$

wobei $g(t)^k$ *die senkrechte Projektion von* $g(t) \in h$ *auf die Gerade* k *bezeichnet. Genauer: die Abbildung* $t \mapsto d(g(t), g(t)^k)$ *von* $[0, \infty[$ *nach* $[0, \infty[$ *ist eine monoton wachsende Bijektion.*

Iversen formuliert das etwas anders und benutzt dazu den Begriff *Orientierung einer Geraden* in X. Das wird bei ihm weiter nicht erklärt und ist vielleicht auch "intuitiv klar".

Definition 7.1.4. Eine Orientierung einer Geraden k in X ist eine Regel w, die jeder abstandserhaltenden Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to X$ mit $\mathrm{bild}(f) = k$ ein Element $w(f) \in \{+1, -1\}$ zuordnet und dabei folgende Eigenschaft hat:

- für zwei beliebige abstandserhaltende Abbildungen $f, g\colon \mathbb{R} \to X$ mit $\mathrm{bild}(f) = k = \mathrm{bild}(g)$ ist $w(f) = w(g)$ genau dann, wenn die Isometrie $g^{-1} \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Translation ist (also die Form $x \mapsto x + b$ hat für festes $b \in \mathbb{R}$).

Beispiel 7.1.5. Sei $f\colon \mathbb{R} \to X$ irgendeine abstandserhaltende Abbildung und $k := \text{bild}(f)$. Es gibt dann genau eine Orientierung w von k, bei der $w(f) = +1$ ist. Denn wir bestimmen: für abstandserhaltendes $g\colon \mathbb{R} \to X$ mit $\text{bild}(g) = k = \text{bild}(f)$ ist $w(g) = +1$ falls $g^{-1} \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Form $x \mapsto x + b$ hat und $w(g) = -1$ falls $g^{-1} \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Form $x \mapsto -x + b$ hat. Andere Möglichkeiten gibt es nicht, denn jede Isometrie von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ hat eine der Formen $x \mapsto x + b$, $x \mapsto -x + b$.

Iversen schreibt die Ungleichung in Proposition 7.1.3 dann so:

$$\lim_{P \to +\infty} d(P, P^k) = +\infty$$

wobei $P \in h$ gesagt wird und vorausgesetzt wird, dass die Gerade h orientiert ist. Das heisst, er verzichtet darauf, ein abstandserhaltendes $g\colon \mathbb{R} \to X$ zu wählen mit $\text{bild}(g) = h$, weil weniger genug ist.

Beweis von Proposition 7.1.3: kann bei Iversen nachgelesen werden. Iversen schreibt O für den Schnittpunkt von h und k.

7.2. Für den Überblick: Gruppen

Aus verschiedenen Gründen wird hier die Arbeit mit den Axiomen (wie im Buch von Iversen) unterbrochen. Wir bemühen uns stattdessen um Überblick, Strategie undsoweiter.

Geometrie bei Euklid und erst recht bei Iversen ist die Lehre von den metrischen Räumen kombiniert mit Symmetriebedingungen. Die Symmetrie ist besonders in Axiom II ausgedrückt, wo die Existenz von gewissen Isometrien gefordert wird. Wir haben gerade in den letzten Tagen gesehen, dass das starke Auswirkungen hat. In dieser Unterbrechung geht es um die mathematische Theorie von Symmetrie an sich, also ohne ausdrücklichen Bezug zu metrischen Räumen. Diese Theorie heisst *Gruppentheorie*.

Ausser den Hauptbegriffen *Gruppe* und *Homomorphismus von Gruppen* dieser Theorie ist uns auch noch der Begriff *Wirkung* (einer Gruppe auf einer Menge) wichtig.

Definition 7.2.6. Eine *Gruppe* ist eine Menge G mit einem ausgezeichneten Element $1 \in G$ und einer Abbildung $\mu\colon G \times G \to G$ (manchmal *Multiplikation* genannt), die folgende Eigenschaften hat.

- *Neutrales Element*: Für jedes $x \in G$ ist $\mu(1, x) = x = \mu(x, 1)$.
- *Existenz von Inversen*: Für jedes $x \in G$ existiert $y \in G$ mit der Eigenschaft $\mu(x, y) = 1 = \mu(y, x)$.
- *Assoziativität*: Für alle $x, y, z \in G$ gilt $\mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), z)$.

Man sagt oft: die Gruppe G usw., wenn man eigentlich sagen sollte: die Gruppe bestehend aus der Menge G und dem ausgezeichneten Element $1 \in G$ und der Abbildung μ ...

Es ist üblich, statt $\mu(x,y)$ so etwas wie $x \cdot y$ oder noch kürzer xy zu schreiben. Dann sehen die Bedingungen oben so aus:

- *Neutrales Element*: Für alle $x \in G$ ist $1x = x = x1$.
- *Existenz von Inversen*: Für jedes $x \in G$ existiert $y \in G$ mit der Eigenschaft $xy = 1 = yx$.
- *Assoziativität*: Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(xy)z = x(yz)$.

Wegen der Assoziativitätsbedingung braucht man sich um das Setzen von Klammern nicht zu kümmern: man kann zum Beispiel $uvwxyz$ schreiben und damit $(uv)(((wx)y)z)$ oder $(u(vw))((xy)z)$ meinen — es ist jedenfalls dasselbe. ABER: es wurde nicht gefordert, dass xy immer dasselbe ist wie yx. Diese zusätzlich Bedingung heisst *Kommutativität*. Wenn sie erfüllt ist, dann sprechen wir von einer *kommutativen Gruppe* oder von einer *abelschen Gruppe*. Bei einer kommutativen Gruppe benutzt man gelegentlich additive Schreibweise, also $x + y$ statt xy und 0 statt 1 für das ausgezeichnete neutrale Element. (Die erste Bedingung lautet dann zum Beispiel: $0 + x = x = x + 0$.)

Beispiel 7.2.7. (i) Sei S irgendeine Menge. Sei Σ_S die Menge aller bijektiven Abbildungen von S nach S. Dann wird Σ_S zu einer Gruppe durch folgende Definitionen: Als ausgezeichnetes (neutrales) Element nehmen wir $\mathrm{id}\colon S \to S$. Für $\mu\colon \Sigma_S \to \Sigma_S$ wählen wir *die Zusammensetzung* von bijektiven Abbildungen. Das heisst, für bijektive Abbildungen $f\colon S \to S$ und $g\colon S \to S$ ist $\mu(f,g) := f \circ g$. Das ist natürlich dann wieder eine bijektive Abbildung von S nach S, und als solche ein Element von Σ_S.

Diese Gruppe Σ_S heisst *die symmetrische Gruppe* auf der Menge S. Wenn $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, dann schreibt man auch gerne Σ_n statt $\Sigma_{\{1,2,\dots,n\}}$. Die Anzahl der Elemente von Σ_n ist $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Beispiel 7.2.8. Die Menge G der reellen 5×5-Matrizen mit Determinante $\neq 0$ bildet eine Gruppe in der folgenden Weise. Als ausgezeichnetes (neutrales) Element wählen wir I_5, die Identitätsmatrix. Die Abbildung μ definieren wir so, dass $\mu(A,B)$ gleich dem Matrixprodukt AB ist, wenn $A, B \in G$. Es ist bekannt, dass die drei Bedingungen erfüllt sind.

Beispiel 7.2.9. Sei diesmal G die Menge der 5×5-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und Determinante $\neq 0$. Wir versuchen, daraus eine Gruppe zu machen. Als ausgezeichnetes (neutrales) Element wählen wir wieder I_5, die Identitätsmatrix. Die Abbildung μ definieren wir wieder so, dass $\mu(A,B)$ gleich dem Matrizprodukt AB ist, wenn $A, B \in G$. Es ist leider keine Gruppe. Denn die zweite Bedingung (Existenz von Inversen) ist verletzt.

Bemerkung 7.2.10. In einer Gruppe G gibt es zu jedem $x \in G$ genau ein $y \in G$ derart, dass $yx = 1$ ist. Ebenso gibt es zu jedem $x \in G$ genau ein

$y \in G$ derart, dass $xy = 1$ ist. Demnach gibt es zu jedem $x \in G$ genau ein $y \in G$ derart, dass $yx = 1 = xy$ ist. (Man schreibt gerne $y = x^{-1}$ für dieses Element.) *Beweis der ersten Behauptung.* Gegeben $y_1, y_2 \in G$ mit $y_1 x = 1 = y_2 x$. Wähle $y_3 \in G$ mit $xy_3 = 1$. Dann ist

$$y_1 = y_1(xy_3) = (y_1 x)y_3 = (y_2 x)y_3 = y_2(xy_3) = y_2.$$

Definition 7.2.11. Sei G eine Gruppe mit neutralem Element 1 und Multiplikation $\mu\colon G \times G \to G$. Eine Teilmenge H von G heisst *Untergruppe* von G, wenn folgendes gilt.

- $1 \in H$.
- Wenn $x \in H$ und $y \in H$, dann auch $\mu(x, y) \in H$.
- Wenn $x \in H$ und $y \in G$ mit $\mu(x, y) = 1 = \mu(y, x)$, dann $y \in H$.

Bemerkung 7.2.12. Eine Untergruppe H von G heisst vor allem deshalb Untergruppe, weil sie zu einer Gruppe wird, wenn wir die Multiplikation in H durch Einschränkung der Multiplikation in G definieren. Das heisst, für $x, y \in H$ definieren wir $xy = \mu(x, y)$ wie in G, wobei wir sicher sein dürfen, dass wir auf diese Weise wieder ein Element von H erhalten.

Beispiel 7.2.13. Sei G die Matrizengruppe aus Beispiel 7.2.9. Die Teilmenge H von G bestehend aus den 5×5-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und Determinante ±1 ist eine Untergruppe von G. (Hier sollte man sich klar machen, dass die zweite Bedingung aus der Definition von *Untergruppe* tatsächlich erfüllt ist.)

Beispiel 7.2.14. Sei Σ_S die symmetrische Gruppe aus Beispiel 7.2.9. Sei t irgendein Element von S. Die Teilmenge H von Σ_S bestehend aus allen bijektiven Abbildungen $f\colon S \to S$, die $f(t) = t$ erfüllen (für dieses t), ist eine Untergruppe.

Beispiel 7.2.15. Sei X ein metrischer Raum mit Metrik d. Wenn wir X einfach als Menge auffassen, dann können wir von der symmetrischen Gruppe Σ_X sprechen. Diese Gruppe Σ_X hat eine (für uns sehr wichtige) Untergruppe isom(X). Die Elemente von isom(X) sind diejenigen bijektiven Abbildungen $f\colon X \to X$, die abstandserhaltend sind. Wir nennen isom(X) die *Gruppe der Isometrien von* X *nach* X, oder ähnlich.

Definition 7.2.16. Sei G eine Gruppe mit Multiplikation $\mu\colon G \times G \to G$ und neutralem Element 1_G. Sei ausserdem K eine Gruppe mit Multiplikation $\nu\colon K \times K \to K$ und neutralem Element 1_K. Eine Abbildung $\psi\colon G \to K$ heisst *Homomorphismus* von Gruppen, wenn $\psi(1_G) = 1_K$ und ausserdem für alle $x, y \in G$ gilt

$$\psi(\mu(x, y)) = \nu(\psi(x), \psi(y)).$$

(Dafür kann man natürlich auch kürzer schreiben: $\psi(1) = 1$ und $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ für alle $x, y \in G$.) Ein Homomorphismus heisst *Isomorphismus*, wenn er zusätzlich bijektiv ist.

Beispiel 7.2.17. Die Abbildung exp ist ein berühmter Isomorphismus von der Gruppe G der reellen Zahlen (mit $\mu(x, y) = x + y$ und 0 als neutralem Element) nach Gruppe K der positiven reellen Zahlen (mit $\nu(x, y) = xy$, gewöhnliches Produkt in $\mathbb{R}$, und $1 \in \mathbb{R}$ als neutralem Element). Denn es gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

und natürlich auch $\exp(0) = 1$.

Beispiel 7.2.18. Sei G die Matrizengruppe aus Beispiel 7.2.9. Sei K die Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen (mit $\nu\colon K \times K \to K$ gegeben durch $\nu(a, b) = ab$, das gewöhnliche Produkt von reellen Zahlen, und der üblichen Interpretation von 1). Die Abbildung $\det\colon G \longrightarrow K$ ist ein berühmter Homomorphismus. Denn es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Beispiel 7.2.19. Sei $\mathbb{H}$ die hyperbolische Ebene, aufgefasst als metrischer Raum mit der hyperbolischen Metrik d^{Φ}. Sei G die Gruppe der 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen und Determinante ± 1. In Vorlesungsnotizen 4.2.7, 4.2.8 und in Übungsblatt 5 Aufgabe 1 haben wir aus einer Matrix

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$$

eine Isometrie $f_M\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ gebaut durch $f_M(z) = (az + b)/(cz + d)$ falls $\det(M) = +1$, bzw. $f_M(z) = (a\bar{z} + b)/(c\bar{z} + d)$ falls $\det(M) = -1$. In Übungsblatt 5 Aufgabe 1 sollte gezeigt werden, dass die Abbildung von G nach $\mathrm{isom}(\mathbb{H})$ definiert durch $M \mapsto f_M$ ein Homomorphismus von G nach $\mathrm{isom}(\mathbb{H})$ ist.

Definition 7.2.20. Sei $\psi\colon G \to K$ ein Homomorphismus von Gruppen. Der *Kern von* ψ ist

$$\ker(\psi) := \{x \in G \mid \psi(x) = 1 \in K\}.$$

Proposition 7.2.21. *Der Kern von einem Homomorphismus* $\psi\colon G \to K$ *ist immer eine Untergruppe von* G.

Beweis. Wegen $\psi(1_G) = 1_K$ ist $1_G \in \ker(\psi)$. Wenn $x, y \in \ker(\psi) \subset G$, dann $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y) = 1_K \cdot 1_K = 1_K$, und daraus folgt $xy \in \ker(\psi)$. Wenn $x \in \ker(\psi)$ und $y \in G$ mit $xy = 1_G$, dann $1_K = \psi(1_G) = \psi(xy) = \psi(x)\psi(y) = \psi(y)$, also $y \in \ker(\psi)$. □

Proposition 7.2.22. *Ein Gruppenhomomorphismus* $\psi\colon G \to K$ *ist genau dann injektiv, wenn* $\ker(\psi)$ *nur ein Element hat, das heisst* $\ker(\psi) = \{1_G\}$.

Beweis. Eine Richtung ist trivial. Für die andere Richtung: Angenommen $\ker(\psi) = \{1_G\}$. Wir denken uns zwei Elemente $x, y \in G$, für die $\psi(x) = \psi(y)$ gilt. Wir wählen $z \in G$ mit $yz = 1_G$. Dann ist

$$\psi(xz) = \psi(x)\psi(z) = \psi(y)\psi(z) = \psi(yz) = \psi(1_G) = 1_K$$

und damit $xz \in \ker(\psi)$, und damit $xz = 1_G$. Weil das (Links)inverse von z eindeutig ist, folgt $x = y$. $\square$