25.11.2015

Nicht-Euklidische Geometrie (Weiss)
WS 2015-16
Vorlesungsnotizen, Woche 6

In den nächsten Wochen (wahrscheinlich bis gegen Weihnachten) sind diese Notizen nur noch ausführliche Kommentare zu dem Buch von Iversen.

6.1. Strikte Dreiecksungleichung

I.1.7-I.1.9 im Buch.

Wir setzen voraus: metrischer Raum X mit Metrik d (manchmal d_X genannt), der das Axiom I erfüllt. Also: zu je zwei verschiedenen Elementen von X existiert genau eine Gerade in X, die die beiden enthält. *Gerade* in X bedeutet immer noch: bild(f) für ein abstandserhaltendes $f\colon \mathbb{R} \to X$.

Proposition 6.1.1. *Wenn A, B, C Elemente von X sind, die nicht auf einer Geraden liegen, dann gilt die strikte Dreiecksungleichung*

$$d(A, C) < d(A, B) + d(B, C).$$

Beachten, dass $d(A, C) \leq d(A, B)+d(B, C)$ schon klar ist, weil X metrischer Raum. *Idee des Beweises*: wir nehmen mal an

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$$

und konstruieren dann eine Gerade L, die A, B, C enthält. Dieser Konstruktion liegt folgende schlaue Beobachtung zugrunde. Sei $g\colon [u, v] \to X$ eine Abbildung, wobei $[u, v]$ Intervall in $\mathbb{R}$.

- Angenommen, es gibt $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_k \in [u, v]$ so dass
$$u = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = v$$
und so dass g auf jedem Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ abstands-nicht-vergrössernd ist. Dann ist g insgesamt abstands-nicht-vergrössernd.
- Wenn ausserdem noch $d(g(u), g(v)) = v-u$ gilt, dann ist g abstanderhaltend.

(Das ist eine nette Übungsaufgabe.) Um jetzt die Gerade L zu konstruieren, wählen wir abstandserhaltende Abbildungen $\varphi, \lambda, \mu\colon \mathbb{R} \to X$ derart, dass bild(φ) die Gerade durch A und C ist, dass bild(λ) die Gerade durch A und B ist und dass bild(μ) die Gerade durch B und C ist. Es geht wegen Axiom I. Genauer können wir $a, b, c \in \mathbb{R}$ wählen, so dass $b - a = d(A, B)$, $c - b = d(B, C)$ und dann automatisch $c - a = d(A, C)$. Dann können wir ϕ, λ und μ so einrichten, dass $\phi(a) = A$ und $\phi(c) = C$; $\lambda(a) = A$ und

$\lambda(b) = B$; $\mu(b) = B$ und $\mu(c) = C$. Aus diesen Angaben kochen wir dann eine einzige Abbildung

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to X.$$

Sie soll auf $[a, b]$ mit λ, auf $[b, c]$ mit μ und auf dem Rest von $\mathbb{R}$ mit φ übereinstimmen. Wenn wir jetzt $u < a$ und $v > c$ wählen, dann erfüllt γ eingeschränkt auf $[u, v]$ die Bedingungen in der schlauen Beobachtung und ist deswegen abstandserhaltend. Da u und v fast beliebig waren (nur $u < a$ und $v > c$ war verlangt), ist γ abstandserhaltend. Wir setzen $L := \mathrm{bild}(\gamma)$. □

Korollar 6.1.2. *Für $u, v \in X$ kann das Segment $[u, v] \subset X$ neu definiert werden wie folgt:*

$$[u, v] = \{x \in X \mid d(u, x) + d(x, v) = d(u, v)\}.$$

Erklärung. Iversen nimmt diese Beschreibung als Definition von $[u, v]$. *Unsere* Definition im Fall $u \neq v$ ging so: wähle abstandserhaltende Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to X$ mit $u, v \in \mathrm{bild}(f)$. Setze $a = f^{-1}(u)$ und $b = f^{-1}(v)$. Dann ist $[u, v] := f([a, b])$ falls $a < b$, bzw. $[u, v] = f([b, a])$ falls $b < a$.

Ich bleibe bei diesen Bezeichnungen (und bei der alten Definition vom Segment) und nehme auch noch an $a < b$. Wenn jetzt $x \in [u, v]$, dann $x = f(c)$ für ein $c \in [a, b]$. Da f abstandserhaltend ist und $|c-a|+|b-c| = |b - a|$, folgt $d(u, x) + d(x, v) = d(u, v)$. Wenn x zur Geraden $\mathrm{bild}(f)$ gehört, aber nicht zum Segment $[u, v]$, dann ist $x = f(c)$ für ein c mit $c < a$ oder $c > b$. Da f abstandserhaltend ist und $|c - a| + |b - c| > |b - a|$ in diesem Fall, gilt $d(u, x)+d(x, v) > d(u, v)$ in diesem Fall. Wenn x nicht zur Geraden $\mathrm{bild}(f)$ gehört, dann haben wir nach Proposition 6.1.1 auch wieder: $d(u, x) + d(x, v) > d(u, v)$. Damit sind alle Fälle abgehakt. □

6.2. Lot fällen (senkrechte Projektion auf eine Gerade)

I.2.1 bis I.2.4 im Buch. Iversen benutzt Grossbuchstaben wie A, B, C, P, Q für Punkte in X (= Elemente von X) und Kleinbuchstaben wie $k, \ell, m, n, \dots$ für Geraden in X. Für Isometrien (von X nach X) benutzt er gerne griechische Kleinbuchstaben. Ich versuche, mich daran zu halten. (Leider habe ich in den Vorelsungsnotizen zu den vergangenen Wochen dagegen verstossen.)

Voraussetzungen an den metrischen Raum X: er soll jetzt Axiom I und Axiom II erfüllen. Dabei bleiben wir wahrscheinlich für längere Zeit.

Bemerkung 6.2.3. Vorsicht: die Formulierung von Axiom II, die ich gegeben habe, ist etwas stärker als die, die Iversen gibt. (Ich habe sie aus der ersten Ausgabe von Iversens Buch.) Die stärkere/ältere Formulierung geht so: Für jede Gerade k in X zerfällt die Menge $X \setminus k$ in genau zwei nichtleere Teile derart, dass $A, B \in X \setminus L$ genau dann zum gleichen Teil gehören, wenn das Segment $[A, B]$ leeren Schnitt mit k hat. Die schächere/neuere Formulierung geht so: Für jede Gerade k in X zerfällt die Menge $X \setminus k$ in genau zwei nichtleere Teile derart, dass $A, B \in X \setminus L$ genau dann zum gleichen Teil gehören, wenn sie durch eine stetige Kurve γ in $X \setminus L$ verbunden werden können.

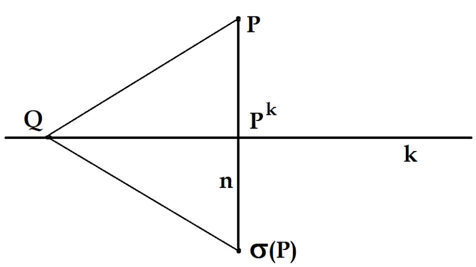
Iversen beweist allerdings, dass die scheinbar schwächere Version von Axiom II die scheinbar stärkere impliziert. Darauf will ich nicht weiter eingehen.

Vorsicht: die beiden Teile von $X \setminus k$, die oben erwähnt sind, werden bei Iversen *sides of* k genannt und hier entsprechend *Seiten* von k. Das kann man leider falsch verstehen — man könnte zum Beispiel glauben, dass eine Seite von k eine Teilmenge von k ist, was aber absolut nicht richtig ist.

Lemma 6.2.4. *Gegeben Gerade $k \subset X$ und Punkt $P \in X$. Dann existiert unter den Elementen von k ein einziges, für das der Abstand zu P minimal ist. Bezeichnung dafür: P^k.*

Beweis. Fall $P \in k$ ist klar. Jetzt nehmen wir an $P \notin k$. Konstruktion: wähle Isometrie $\sigma\colon X \to X$, die $\sigma(Q) = Q$ erfüllt für alle $Q \in k$ und die die beiden *Seiten von* k (Äquivalenzklassen der Relation ρ_k wie beschrieben[1] in Axiom II) miteinander vertauscht. Isometrie σ existiert wegen Axiom II. Sei n die Gerade durch P und $\sigma(P)$ und sei $[P, \sigma(P)] \subset n$ das Segment wie üblich. Weil P und $\sigma(P)$ auf verschiedenen Seiten von k, muss $[P, \sigma(P)]$ mindestens ein Element mit k gemeinsam haben; und sogar genau eins, weil sonst $n = k$ im Widerspruch zu $P \notin k$. Dieses Element nennen wir P^k.

Jetzt sei $Q \in k$, $Q \neq P^k$. Dann $Q \notin n$ weil sonst wieder $n = k$.



Deswegen (mit Proposition 6.1.1) ist

$$d(\sigma(P), Q) + d(Q, P) > d(\sigma(P), P).$$

Linke Seite dieser Ungleichung: $= 2d(P, Q)$ weil $Q = \sigma(Q)$ und $d(\sigma(P), Q) = d(\sigma(P), \sigma(Q)) = d(P, Q)$. Rechte Seite: $= 2d(P, P^k)$ wegen

$$d(\sigma(P), P) = d(\sigma(P), P^k) + d(P^k, P) = d(\sigma(P), \sigma(P^k)) + d(P^k, P).$$

Also $d(P, Q) > d(P, P^k)$. $\square$

[1]Tut mir leid, dass ich einen griechischen Kleinbuchstaben für die Relation gewählt habe ... denn nach Iversen sollten diese ja für Isometrien reserviert sein.

Der Beweis zeigt mehr. In der Konstruktion von P^{k} haben wir eine Wahl von Isometrie σ getroffen. Trotzdem hat sich P^{k} als eindeutig herausgestellt, weil es unter den Elementen von k durch minimalen Abstand von P charakterisiert ist. Ausserdem haben wir festgestellt $d(\sigma(P), P^k) = d(P, P^k)$. Jetzt können wir den Spiess umdrehen und sagen:

Korollar 6.2.5. *Für jede Gerade* k *in* X *gibt es* genau eine *Isometrie* $\sigma\colon X \to X$*, die* $\sigma(Q) = Q$ *erfüllt für alle* $Q \in k$ *und die die* Seiten *von* k *miteinander vertauscht. Sie kann wie folgt beschrieben werden. Für* $P \notin k$ *bestimme erst das eindeutige* $P^k \in k$ *mit dem minimalen Abstand von* P*, dann die Gerade durch* P *und* P^k*; auf dieser Geraden ist* $\sigma(P)$ *der einzige Punkt* $\neq P$*, der denselben Abstand zu* P^k *hat wie* P*.*

Ausserdem haben wir im Beweis von Lemma 6.2.4 festgestellt:

$$d(\sigma(P), Q) = d(P, Q) > d(P, P^k) = d(\sigma(P), P^k)$$

für beliebige $Q \in k$ mit $Q \neq P^k$. Das heisst, der Punkt von k mit dem minimalen Abstand zu $\sigma(P)$ ist wieder P^k. Daraus folgt $\sigma(\sigma(P)) = P$. Da P ziemlich beliebig war, bedeutet das:

Korollar 6.2.6. *Die Isometrie* σ *oben erfüllt* $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$*.* □

Definition 6.2.7. Die einzige Isometrie $\sigma\colon X \to X$, die $\sigma(Q) = Q$ erfüllt für alle $Q \in k$ und die die Seiten von k miteinander vertauscht, dürfen wir jetzt mit gutem Gewissen die *Spiegelung an der Geraden* k nennen (reflection at the line k). Die Abbildung $P \mapsto P^k$ von X nach k heisst *Projektion auf* k oder vielleicht *senkrechte Projektion auf* k (projection to k).

Für $P \notin k$ kann die Gerade n durch P und P^k das *Lot* von P auf k genannt werden. Dafür hat Iversen anscheinend kein englisches Wort und mir fällt auch keines ein (ausser: the *perpendicular* to k through P). Er schreibt wahrscheinlich n, weil er an *Normale* denkt; *normal* wird oft als Synonym für *senkrecht* benutzt.

Bemerkung 6.2.8. Sei k Gerade in X. Es gibt genau zwei Isometrien $\tau\colon X \to X$, die $\tau(Q) = Q$ erfüllen für alle $Q \in k$. Eine ist die Spiegelung an k, die andere ist die Identität. (Dem Beweis bei Iversen habe ich nichts hinzuzufügen.)

6.3. Die Relation *senkrecht* und rechte Winkel

I.2.5 bis I.2.7 im Buch.

Definition 6.3.9. Gegeben verschiedene Geraden k und n in X. Wir schreiben $n \perp k$ und sagen n *ist senkrecht zu* k, wenn $\sigma_k(n) = n$, wobei σ_k die Spiegelung an der Geraden k ist.

Bemerkung: wenn k und n parallel sind, $n \cap k = \emptyset$, dann ist $n \cap \sigma_k(n) = \emptyset$, also gilt nicht $n \perp k$. Denn dann ist offenbar n in einer Seite von k enthalten und $\sigma_k(n)$ ist demnach in der anderen Seite von k enthalten.

Lemma 6.3.10. *Für verschiedene Geraden* k *und* n *in* X *ist* $n \perp k$ *genau dann, wenn* $\sigma_k \circ \sigma_n = \sigma_n \circ \sigma_k$.

Beweis wie bei Iversen: wir bemerken, dass $\sigma_k \circ \sigma_n \circ (\sigma_k)^{-1}$ dasselbe ist wie Spiegelung an der Geraden $\sigma_k(n)$. Also ist $\sigma_k \circ \sigma_n \circ (\sigma_k)^{-1} = \sigma_n$ gleichwertig zu: Spiegelung an $\sigma_k(n)$ ist Spiegelung an n, und das ist gleichwertig zu: $\sigma_k(n) = n$. □

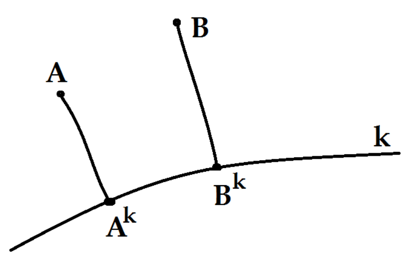
Korollar 6.3.11. $n \perp k$ *genau dann, wenn* $k \perp n$. □

Wenn $n \perp k$, dann haben n und k genau einen Punkt P gemeinsam, und wir sagen etwas formlos, dass n und k bei P einen *rechten Winkel* machen. Das ist formlos, weil wir bis jetzt noch keinen allgemeineren Begriff von *Winkel* haben (wenn zwei verschiedene Geraden sich an einem Punkt treffen). Wir sind aber dabei, uns in dieser Richtung vorzuarbeiten.

6.4. Saccheris Ungleichung

Diese wichtige Ungleichung besagt, dass die Projektion auf eine Gerade k in X Abstände nicht vergrössert. Also:

Theorem 6.4.12. $d(A^k, B^k) \leq d(A, B)$ *für alle* $A, B \in X$.



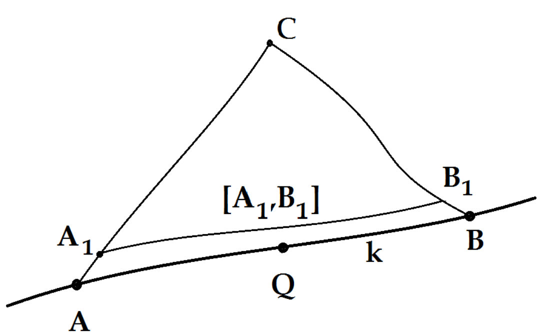
Der Beweis bei Iversen ist prima. Das Bild dazu bei Iversen könnte einen dazu verleiten, zu glauben, dass der Beweis nur funktioniert, wenn A und B auf der selben Seite von k liegen. Das ist aber nicht so. Wenn sie auf verschiedenen Seiten von k liegen, oder wenn einer von A und B zu k gehört, dann muss man ein etwas anderes Bild malen (zackiger). □

Geschichtliche Bemerkung: Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733) hat in einer Abhandlung (1733 erschienen) wichtige Konsequenzen aus der Negation des Parallelenaxioms (für uns Axiom III) gezogen, unter Beibehaltung der weniger umstrittenen Axiome (für uns Axiom I und II und die Bedingungen aus der Definition von *metrischer Raum*). Er hoffte zweifellos, einen Widerspruch zu finden und auf diese Weise das Parallelenaxiom aus den anderen abzuleiten. Er fand eigentlich keinen Widerspruch, aber er fand allerhand Konsequenzen, die er hinreichend absurd fand, um die Angelegenheit damit abzutun. Er glaubte also nicht an die nicht-Euklidische Geometrie, hat aber trotzdem Wichtiges für ihre Grundlegung geleistet.

6.5. Konstruktion von Senkrechten

I.2.9. im Buch. Gegeben Gerade k in X und $Q \in k$. Gesucht: Gerade n senkrecht zu k, derart dass $n \cap k = \{Q\}$. Dazu genügt es, $P \in X \smallsetminus k$ zu finden mit $P^k = Q$, denn dann nehmen wir für n die Gerade durch P und $Q = P^k$. Aber es ist überraschend schwierig, so ein P zu konstruieren. Iversen benutzt dazu den Zwischenwertsatz. Mir fällt auch nichts Besseres ein.

Skizze der Konstruktion, so wie ich sie verstehe. Gegeben also Gerade k in X und $Q \in k$. Wir schreiben $k = \text{bild}(f)$ wobei $f\colon \mathbb{R} \to X$ abstandserhaltend. Wir können annehmen $f(0) = Q$. Sei $A = f(-1)$ und $B = f(1)$. Es existiert $C \in X$ mit $C \notin k$; wir wählen so eins. Aus dem Segment $[A, C]$ wählen wir Element A_1 mit $0 < d(A_1, A) < 1/2$. Aus dem Segment $[B, C]$ wählen wir B_1 mit $0 < d(B, B_1) < 1/2$. Dann gehören A_1 und B_1 zur selben Seite von k, nämlich zu der Seite, zu der auch C gehört. Also $[A_1, B_1] \cap k = \emptyset$.



Sei $h\colon X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(P) = f^{-1}(P^k)$; also Projektion auf die Gerade k gefolgt von f^{-1}. Wegen Saccheri ist h abstands-nicht-vergrössernd und damit stetig. Insbesondere gilt

$$d(A_1^k, A) \le d(A_1, A) < 1/2$$

und daher $h(A_1) < -1/2$. Ebenso $h(A_2) > +1/2$. Wegen Zwischenwertsatz existiert also $P \in [A_1, B_1]$ mit $h(P) = 0$. Das bedeutet $f^{-1}(P^k) = 0$, also $P^k = f(0) = Q$. Beachten, dass $P \notin k$ weil $P \in [A_1, B_1]$. $\square$

6.6. Spiegelung an einem Punkt

I.3.1 im Buch; I.3.2 und I.3.3. fallen weg oder werden trivial, weil wir die stärkere Form von Axiom II zugrundelegen.

Gegeben Geraden n und k in X mit $n \perp k$. Sei P das einzige Element von $n \cap k$. Sei σ_k die Spiegelung an k und σ_n die Spiegelung an n.

Theorem 6.6.13. *Die Isometrie $\tau_P := \sigma_k \circ \sigma_n$ hängt nur von P ab, weiter nicht von der Wahl von n und k. Sie kann wie folgt beschrieben werden: $\tau_P(P) = P$, und für $Q \in X$ mit $Q \neq P$ ist $\tau_P(Q)$ der einzige Punkt $\neq Q$ auf der Geraden durch Q und P, der denselben Abstand zu P hat wie Q.*

Dazu beweisen wir erst:

Lemma 6.6.14. *Wenn $Q \in X \setminus n$, dann ist $\sigma_k(Q)$ auf derselben Seite von n wie Q.*

Beweis. Weil $\sigma_k(n) = n$ nach Definition von $\perp$, und weil σ_k bijektiv ist, folgt aus $Q \notin n$, dass auch $\sigma_k(Q) \notin n$. Wir wissen schon, dass jede Seite von n Elemente von k enthält. Demnach gibt es $A \in k \setminus n$, das zur selben Seite von n gehört wie Q. Dann gehört $\sigma_k(A) = A$ zur selben Seite von $\sigma_k(n) = n$ wie $\sigma_k(Q)$. Also gehört Q zur selben Seite von n wie $\sigma_k(Q)$. $\square$

Beweis von Thm 6.6.13. Wir zeigen erst, dass $\tau_P(Q) = Q$ dann und nur dann, wenn $Q = P$. *Erster Fall*: $Q = P$. Es ist klar, dass $\tau_P(P) = P$. *Zweiter Fall*: $Q \in n$. Dann ist $\tau_P(Q) = \sigma_k(Q)$, und das ist nur dann gleich Q, wenn $Q \in k$, also $Q \in k \cap n$, also $Q = P$. *Dritter Fall*: $Q \in k$. Weil wir $\tau_P = \sigma_k \circ \sigma_n = \sigma_n \circ \sigma_k$ schreiben dürfen (Lemma 6.3.10), erhalten wir genauso wie im zweiten Fall: $\tau_P(Q) = Q$ nur dann, wenn $Q = P$. *Vierter Fall*: $Q \in X \setminus (n \cup k)$. Der Punkt $\sigma_k(Q)$ liegt auf derselben Seite von n wie Q, wie eben bewiesen. Dagegen liegt $\sigma_n(Q)$ nicht auf derselben Seite von n wie Q. Also ist $\sigma_k(Q) \neq \sigma_n(Q)$. Daraus folgt $Q \neq \tau_P(Q)$ durch beidseitiges Anwenden von σ_k. Fertig.

Als nächstes bemerken wir, dass $\tau_P \circ \tau_P = \mathrm{id}$. Das folgt leicht aus $\sigma_k \circ \sigma_n = \sigma_n \circ \sigma_k$, denn $\tau_P \circ \tau_P = \sigma_k \circ \sigma_n \circ \sigma_n \circ \sigma_k = \sigma_k \circ \sigma_k = \mathrm{id}$.

Wenn Q ein Punkt von X ist, $Q \neq P$, dann muss also τ_P die beiden (verschiedenen) Punkte Q und $\tau_P(Q)$ miteinander vertauschen. Demnach muss τ_P den Mittelpunkt vom Segment $[Q, \tau_P(Q)]$ festhalten. Da aber τ_P nur einen Punkt festhält, nämlich P, muss der Mittelpunkt von $[Q, \tau_P(Q)]$ gleich P sein. Damit haben wir die gewünschte Beschreibung von $\tau_P(Q)$. $\square$

Iversen nennt τ_P einen *half-turn*, nicht *reflection at a point*, wie man erwarten könnte. Er benutzt das Wort *reflection* eher nur für Spiegelungen an Geraden. Ich schlage trotzdem vor, dass wir dafür *Spiegelung am Punkt* P sagen. (Ich schlage nicht vor, dass wir die Buchstaben σ und τ nur für Spiegelungen an Geraden bzw. Punkten reservieren. Dazu haben ist der Vorrat an griechischen Kleinbuchstaben zu gering.)

6.7. Mittelsenkrechte

I.3.4 bis I.3.6 im Buch.

Proposition 6.7.15. *Gegeben verschiedene Elemente* A, B *in* X *und eine Gerade* n*, die senkrecht* ($\perp$) *zur Geraden* k *durch* A *und* B *ist und die* k *am Mittelpunkt von* $[A, B]$ *trifft. Dann ist*

$$n = \{C \in X \mid d(A, C) = d(B, C)\}.$$

Der Beweis bei Iversen ist prima. □

Korollar 6.7.16. *Gegeben verschiedene Elemente* A, B *in* X*. Es gibt genau eine Gerade* n*, die senkrecht zur Geraden* k *durch* A *und* B *ist und die* k *am Mittelpunkt von* $[A, B]$ *trifft.* Sie heisst: Mittelsenkrechte usw. □

Korollar 6.7.17. *Gegeben Gerade* k *in* X *und Element* Q *von* X*. Dann gibt es genau eine Gerade* n *in* X *mit* $Q \in n$ *und* $n \perp k$*.*

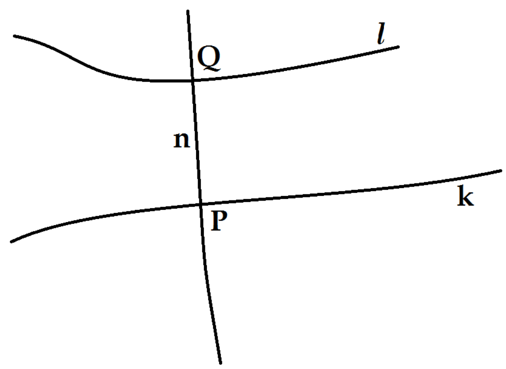
Beweis. Falls $Q \notin k$: da $n \perp k$ sein soll und $Q \in n$, muss gelten $\sigma_k(Q) \in n$ (wobei σ_k die Spiegelung an k ist). Daher auch $Q^k \in n$, also ist n die Gerade durch Q und Q^k. Damit ist sie eindeutig und existent. Falls $Q \in k$: Existenz folgt aus Abschnitt 6.5. Für Eindeutigkeit: wähle $A, B \in k$ derart, dass Q der Mittelpunkt von $[A, B]$ ist, $A \neq B$. Wende Proposition 6.7.15 an. □

6.8. Existenz von Parallelen

Hier geht es um etwas, was ich in der ersten Ausgabe von Iversen gesehen habe, was aber in der zweiten Ausgabe nicht mehr so leicht zu finden ist.

Lemma 6.8.18. *Zwei Geraden* k *und* ℓ *in* X*, die eine gemeinsame Senkrechte* n *haben, sind parallel.*

Beweis. Wenn k und ℓ die Gerade n im selben Punkt P treffen, dann folgt aus Korollar 6.7.17, dass $k = \ell$, und damit auch k parallel zu ℓ. Jetzt nehmen wir an, dass n von k in einem Punkt P getroffen wird und dass n von ℓ in einem Punkt Q getroffen wird, wobei $P \neq Q$.



Angenommen, es gibt $S \in k \cap \ell$. Dann ist $S \notin n$. (Denn sonst $k \cap n \cap \ell \neq \emptyset$, was wir ausdrücklich ausgeschlossen haben.) Aus $S \notin n$ folgt $\sigma_n(S) \neq S$, wobei σ_n die Spiegelung an der Geraden n ist. Aber $\sigma_n(S) \in \sigma_n(k) \cap \sigma_n(\ell) = k \cap \ell$. Also hat $k \cap \ell$ mindestens zwei verschiedene Elemente, S und $\sigma_n(S)$. Wegen Axiom I ist dann $\ell = k$, also auch $\ell \cap n = k \cap n$, also $P = Q$ im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Noch ein Beweis. Wenn k und ℓ die Gerade n im selben Punkt P treffen, dann folgt aus Korollar 6.7.17, dass $k = \ell$, und damit auch k parallel zu ℓ. Jetzt nehmen wir an, dass n von k in einem Punkt P getroffen wird und dass n von ℓ in einem Punkt Q getroffen wird, wobei $P \neq Q$.

Sei $A \in k$ und $B \in \ell$. Dann ist $A^n = P$ und $B^n = Q$. Nach der Ungleichung von Saccheri ist $d(A, B) \geq d(A^n, B^n) = d(P, Q) > 0$. Also $A \neq B$. Da $A \in k$ und $B \in \ell$ beliebig waren, folgt $k \cap \ell = \emptyset$. □

Korollar 6.8.19. *Sei k eine Gerade in X und $Q \in X \setminus k$. Dann existiert eine Gerade ℓ in X mit $Q \in \ell$ und $k \cap \ell = \emptyset$, das heisst, k parallel zu ℓ.*

Das ist bemerkenswert, denn wir setzen hier nur Axiom I und Axiom II voraus. Der Existenzteil von Axiom III folgt also schon aus Axiomen I und II (wie ich schon vor einiger Zeit erwähnt habe).

Beweis. Sei n die Gerade durch Q, die k senkrecht trifft. Sei ℓ die Gerade durch Q, die n senkrecht trifft. Dann ist $\ell \neq k$, weil $Q \in \ell$. Ausserdem haben k und ℓ eine gemeinsame Senkrechte n. Also sind sie parallel wegen Lemma 6.8.18. □