19.11.2015

Nicht-Euklidische Geometrie (Weiss)
WS 2015-16
Vorlesungsnotizen, Woche 5

5.1. Die hyperbolische Ebene erfüllt Axiom I

Lemma 5.1.1. *Wenn drei verschiedene Elemente* $u, v, w \in \mathbb{H}$ *zusammen die Gleichung*

$$d^\Phi(u, v) + d^\Phi(v, w) = d^\Phi(u, w)$$

erfüllen, und wenn zwei von ihnen Realteil $= 0$ *haben, dann hat auch das dritte Realteil* $= 0$.

Beweis. Fall 1: wir nehmen an, dass Re $u = 0 =$ Re w, aber Re $v \neq 0$. Sei $v' \in \mathbb{H}$ das Element mit Im $v' =$ Im v und Re $v = 0$. Dann ist $|v-u| > |v'-u|$ und $|v-w| > |v'-w|$ wegen Pythagoras. Aus unserer Formel für $\cosh(d^\Phi(\ldots))$ folgt dann, dass

$$\cosh(d^\Phi(v, u)) > \cosh(d^\Phi(v', u)), \quad \cosh(d^\Phi(v, w)) > \cosh(d^\Phi(v', w)).$$

Dann ist auch

$$d^\Phi(v, u)) > d^\Phi(v', u), \quad d^\Phi(v, w) > d^\Phi(v', w)$$

weil die cosh-Funktion eingeschränkt auf die nicht-negativen reellen Zahlen wachsend ist. Die Dreiecksungleichung für die Metrik d^Φ gibt uns ausserdem

$$d^\Phi(v', u) + d^\Phi(v', w) \geq d^\Phi(u, w),$$

so dass $d^\Phi(v, u) + d^\Phi(v, w) > d^\Phi(u, w)$ im Widerspruch zur Annahme. (Diesen Fall 1 hätte man auch mit Bemerkung 4.1.4 aus Vorl.notizen Woche 4 behandeln können.)

Fall 2: wir nehmen an, dass Re $u = 0 =$ Re v, aber Re $w \neq 0$. Nach Lemma 4.3.10 in Notizen Woche 4 gibt es eine Isometrie der Form f_M von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$, die Re $f_M(u) = 0$ und Re $f_M(w) = 0$ erfüllt. Dabei ist

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

eine reelle Matrix mit $\det(M) = 1$, und $f_M(z)$ bedeutet $(az + b)/(cz + d)$. Nach dem, was wir in Fall 1 gezeigt haben (angewandt mit $f_M(u)$, $f_M(v)$ und $f_M(w)$ anstelle von u, v, w), ist dann auch Re $f_M(v) = 0$. Was bedeutet das für M ? Sei $u = ri$ und $v = si$. Dann ist

$$\text{Re } (f_M(u)) = \text{Re } ((ari + b)/(cri + d)) = 0,$$

gleichwertig dazu: Re $((ari + b)(-cri + d)) = 0$, also $acr^2 + bd = 0$. Ebenso $acs^2 + bd = 0$, weil der Realteil von $f_M(v)$ gleich Null ist. Daraus folgt $ac(s^2 - r^2) = 0$, also $ac = 0$, und dann auch noch $bd = 0$. Also gilt entweder $a = d = 0$ und $b, c \neq 0$; oder $a, d \neq 0$ und $b = c = 0$. Man sieht dann schnell, dass $\mathrm{Re}\, f_M(w) \neq 0$ wegen $\mathrm{Re}\, w \neq 0$. Widerspruch zur Wahl von M.

Fall 3: wir nehmen an, dass $\mathrm{Re}\, v = 0 = \mathrm{Re}\, w$, aber $\mathrm{Re}\, u \neq 0$. Geht ungefähr wie Fall 2. □

Korollar 5.1.2. *$\mathbb{H}$ mit der Metrik d^Φ erfüllt das Axiom I.*

Beweis. Gegeben verschiedene $u, v \in \mathbb{H}$. Wir müssen zeigen, dass es genau eine Gerade L in $\mathbb{H}$ gibt, die u und v enthält. Dabei bedeutet *Gerade* immer noch: Bild eine abstandserhaltenden Abbildung von $\mathbb{R}$ mit Standardmetrik nach $\mathbb{H}$ mit Metrik d^Φ.

Wir wissen: es gibt eine Isometrie $\alpha \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{Re}\, \alpha(u) = 0 = \mathrm{Re}\, \alpha(v)$. Es ist uns erlaubt, u durch $\alpha(u)$ und v durch $\alpha(v)$ zu ersetzen.[1] Also haben wir auf den Fall reduziert, wo Realteil von u und v gleich Null sind. Sei nun $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ eine abstandserhaltende Abbildung, deren Bild u und v enthält. Dann sagt uns das Lemma 5.1.1, dass $\mathrm{bild}(f)$ in der Menge

$$K := \{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}\, z = 0\}$$

enthalten ist.[2] Wir wissen schon, dass K eine Gerade ist, nämlich das Bild der abstandserhaltenden Abbildung g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{H}$ definiert durch $g(t) = \exp(t) \cdot i$. Also ist $g^{-1} \circ f$ sinnvoll (obwohl nicht ordnungsgemäss hingeschrieben), und es ist eine abstandserhaltende Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Solche kennen wir schon ganz gut. Sie sind bijektiv. Demnach ist $\mathrm{bild}(f) = \mathrm{bild}(g) = K$. Also ist K die einzige Gerade, die u und v enthält. □

5.2. Die hyperbolische Ebene erfüllt Axiom II

Lemma 5.2.3. *Wenn drei Elemente $u, v, w \in \mathbb{H}$ die Gleichung*

$$d^\Phi(u, v) + d^\Phi(v, w) = d^\Phi(u, w)$$

erfüllen, und $\mathrm{Re}\, u \leq \mathrm{Re}\, w$, dann ist $\mathrm{Re}\, u \leq \mathrm{Re}\, v \leq \mathrm{Re}\, w$.

Beweis. Versuchsweise sei angenommen $\mathrm{Re}\, v > \mathrm{Re}\, w$. Setze $v' = v - \varepsilon$ wobei $\varepsilon = (\mathrm{Re}\, v - \mathrm{Re}\, w)/2$. Dann ist $\mathrm{Im}\, v' = \mathrm{Im}\, v$. Wegen Pythagoras

---

[1] Denn jede Gerade L, die u und v enthält, bestimmt eine Gerade $\alpha(L)$, die $\alpha(u)$ und $\alpha(v)$ enthält. Wenn $L = \mathrm{bild}(f)$ für eine abstandserhaltendes $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}$, dann $\alpha(L) = \mathrm{bild}(\alpha \circ f)$, wobei $\alpha \circ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ wieder abstandserhaltend ist. Und umgekehrt, jede Gerade L', die $\alpha(u)$ und $\alpha(v)$ enthält, bestimmt eine Gerade $\alpha^{-1}(L')$, die u und v enthält.

[2] Denn wenn $w \in \mathrm{bild}(f)$, dann erfüllen u, v und w zusammen die Gleichung aus dem Lemma, nach geeignetem Vertauschen der Namen u, v, w ... das hinterher wieder rückgängig gemacht werden kann. Also $w \in K$, weil das Lemma es sagt. Also $\mathrm{bild}(f) \subset K$.

und unserer Formel für $\cosh(d^\Phi(\dots))$ erhalten wir $d^\Phi(u,v') < d^\Phi(u,v)$ und $d^\Phi(v',w) < d^\Phi(v,w)$. Weil ausserdem $d^\Phi(u,v') + d^\Phi(v',w) \geq d^\Phi(u,v)$, finden wir, dass $d^\Phi(u,v) + d^\Phi(v,w) > d^\Phi(u,w)$, Widerspruch. Daher $\operatorname{Re} v \leq \operatorname{Re} w$. Ähnlich zeigt man $\operatorname{Re} u \leq \operatorname{Re} v$. □

Lemma 5.2.4. *Jede Gerade* L *in* $\mathbb{H}$ *hat die Form* $\alpha(K)$ *für eine Isometrie* $\alpha\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *und* $K = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$.

Beweis. Wähle zwei verschiedene Elemente $u, v \in L$. Wähle Isometrie $\beta\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ mit $\beta(u) \in K$ und $\beta(v) \in K$. (So ein β existiert nach Lemma 4.3.10.) Dann hat die Gerade $\beta(L)$ zwei verschiedene Elemente gemeinsam mit K, nämlich $\beta(u)$ und $\beta(v)$. Wegen Axiom I, das wir schon für $\mathbb{H}$ und d^Φ bewiesen haben, folgt dann $\beta(L) = K$. Also ist $K = \alpha(L)$ mit $\alpha = \beta^{-1}$. □

Korollar 5.2.5. $\mathbb{H}$ *mit der Metrik* d^Φ *erfüllt das Axiom II.*

Beweis. Das Axiom II handelt von Geraden L in einem metrischen Raum X und der Relation ρ_L auf der Teilmenge $X \smallsetminus L$ von X. In unserer Situation, $X = \mathbb{H}$ usw., können wir mit Lemma 5.2.4 sofort auf den Fall reduzieren, wo

$$L = K := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = 0\}.$$

Denn wenn L *irgendeine* Gerade in $\mathbb{H}$ ist, dann ist $L = \alpha(K)$ wie im Lemma. Wenn wir also Axiom II für $\mathbb{H}$ und die spezielle Gerade K verifizieren können, dann folgt es für $\mathbb{H}$ und die Gerade L durch Übersetzung mittels α und α^{-1}.

Jetzt betrachten wir also K und die Äquivalenzrelation ρ_K auf $\mathbb{H} \smallsetminus K$. Sie war so definiert: $(u,w) \in \rho_K$ genau dann, wenn das Segment $[u,w]$ leeren Schnitt mit K hat. Nach Lemma 5.2.3 haben wir $(u,w) \in \rho_K$, wenn $\operatorname{Re} u < 0$ und $\operatorname{Re} w < 0$. Denn alle Elemente v von $[u,w]$ erfüllen die Gleichung $d^\Phi(u,v) + d^\Phi(v,w) = d^\Phi(u,w)$, und daher gilt für sie $\operatorname{Re} v < 0$, und daher $[u,w] \cap K = \emptyset$. Ebenso haben wir $(u,w) \in \rho_K$, wenn $\operatorname{Re} u > 0$ und $\operatorname{Re} w > 0$. Wenn dagegen $\operatorname{Re} u < 0$ und $\operatorname{Re} w > 0$, dann muss $[u,w] \cap K \neq \emptyset$ sein wegen Zwischenwertsatz. Denn $[u,w]$ ist das Bild einer stetigen Abbildung von einem Intervall nach $\mathbb{H}$, die wir zusammensetzen können mit der Abbildung $z \mapsto \operatorname{Re} z$ von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{R}$. (Der Zwischenwertsatz wird auf diese Zusammensetzung losgelassen.) Damit haben wir ρ_K ganz gut verstanden: es ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{H} \smallsetminus K$ mit genau zwei Äquivalenzklassen, bestehend aus den Elementen, die negativen bzw. positiven Realteil haben.

Es fehlt uns nur noch eine Isometrie $\beta\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, die die beiden Äquivalenzklassen vertauscht und jedes Element von K festlässt. Die ist aber leicht zu erraten: wir nehmen $\beta(z) = -\bar{z}$. Ein ganz unsportliches Argument dafür, dass β eine Isometrie ist: man sieht es aus der Formel für $\cosh(d^\Phi(\dots))$. □

Wir sind vielleicht ein bisschen erstaunt darüber, dass die Isometrie β am Ende dieses Beweises *nicht* eine von denen ist, die wir in Bemerkung 4.2.7

und Theorem 4.2.8 (Vorlesungsnotizen Woche 4) kennengelernt haben. Das sollte irgendwann nochmal beleuchtet werden.

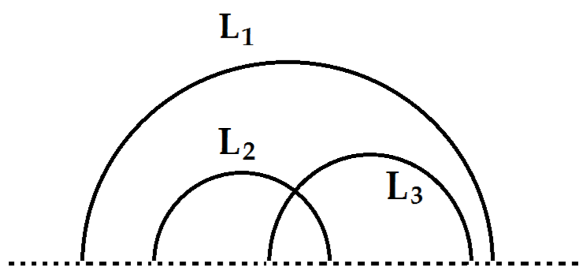
5.3. Die hyperbolische Ebene verletzt Axiom III

Den grössten Teil dieses Abschnitts habe ich in den Übungszettel Nr.5 ausgelagert. Da soll gezeigt werden: Die Geraden in $\mathbb{H}$ (für die hyperbolische Metrik d^Φ) sind genau die Teilmengen

$$\mathsf{T} \cap \mathbb{H}$$

von $\mathbb{H}$, wobei T entweder eine gewöhnliche *vertikale* Gerade in $\mathbb{C}$ ist oder ein gewöhnlicher Kreis (Radius > 0) mit Zentrum auf der reellen Achse.

Daraus folgt sehr leicht, dass die hyperbolische Ebene das Axiom III verletzt. Wir können zum Beispiel drei gewöhnliche Kreise T_1, T_2 und T_3 finden, alle mit Zentrum auf der reellen Achse, so dass $\mathsf{T}_1 \cap \mathsf{T}_2 = \emptyset$ und $\mathsf{T}_1 \cap \mathsf{T}_3 = \emptyset$, während $\mathsf{T}_2 \cap \mathsf{T}_3$ genau zwei Elemente hat (davon genau eins in $\mathbb{H}$). Sei $\mathsf{L}_1 = \mathsf{T}_1 \cap \mathbb{H}$, $\mathsf{L}_2 = \mathsf{T}_2 \cap \mathbb{H}$ und $\mathsf{L}_3 = \mathsf{T}_3 \cap \mathbb{H}$. Dann sind $\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2$ und L_3 Geraden in $\mathbb{H}$ für die Metrik d^Φ. Ausserdem ist $\mathsf{L}_2 \cap \mathsf{L}_1 = \emptyset$ und $\mathsf{L}_3 \cap \mathsf{L}_1 = \emptyset$, aber $\mathsf{L}_2 \cap \mathsf{L}_3$ hat genau ein Element; also gibt es mindestens zwei verschiedene Parallelen zu L_1, nämlich L_2 und L_3, die dieses Element enthalten.



* * *

Es müsste in der Freitagsvorlesung noch etwas Zeit bleiben für einen Anfang mit dem gelben Buch von Iversen. Weil es ein etwas anderes Thema ist, rechne ich die Notizen dazu zur Vorlesungswoche 6.