12.11.2015

Nicht-Euklidische Geometrie (Weiss)
WS 2015-16
Vorlesungsnotizen, Woche 4

4.1. Die hyperbolische Ebene als metrischer Raum

Definition 4.1.1. Die hyperbolische Ebene ist

$$\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$$

mit der Metrik d^Φ bestimmt (wie in Vorl.notizen Woche 3) durch die Kosten- oder Gewichtsfunktion Φ, wobei $\Phi(x) = 1/x_2$ für $x \in \mathbb{H}$. Also ist für Elemente x und y von $\mathbb{H}$ der Abstand $d^\Phi(x,y)$ das Infimum der Zahlen $L^\Phi(\gamma)$, genommen über alle stückweise glatten Kurven $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{H}$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Zur Erinnerung: im Fall von glatter Kurve γ ist

$$L^\Phi(\gamma) = \int_a^b \Phi(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \frac{\|\gamma'(t)\|}{\gamma_2(t)} \, dt$$

bei dieser Kostenfunktion, $\Phi(x) = 1/x_2$. (Dabei bezeichnet $\gamma_2(t)$ die zweite Koordinate von $\gamma(t)$.) Wenn γ stückweise glatt ist, muss man eine etwas kompliziertere Formel mit Summenzeichen hinschreiben.

Diese Definition ist sehr langwierig, und wir haben schon gesehen, dass die explizite Bestimmung der Abstände $d^\Phi(x,y)$ manchmal schwierig ist. Wir werden aber auch noch sehen, dass diese langwierige Definition einen Vorteil hat: sie macht es uns leicht, viele Isometrien von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$ zu konstruieren. Damit können wir die Berechnung von Abständen $d^\Phi(x,y)$ für beliebige x und y auf einfache Spezialfälle zurückführen. Diese Spezialfälle kommen jetzt dran.

Lemma 4.1.2. *Für x und y aus $\mathbb{H}$ mit $x_1 = y_1$ ist*

$$d^\Phi(x,y) = |\ln y_2 - \ln x_2| \,.$$

Beweis. OBdA ist $y_2 \geq x_2$. Sei $\beta\colon [a,b] \to \mathbb{H}$ irgendeine stückweise glatte Kurve von x nach y. Wir sollten erstmal zeigen, dass $L^\Phi(\beta) \geq \ln y_2 - \ln x_2$. Ich tue das unter der Annahme, dass β glatt ist; der allgemeine Fall ist ähnlich. Dann haben wir

$$L^\Phi(\beta) = \int_a^b \frac{\|\beta'(t)\|}{\beta_2(t)} \, dt \geq \int_a^b \frac{\|\beta_2'(t)\|}{\beta_2(t)} \, dt \geq \int_a^b \frac{\beta_2'(t)}{\beta_2(t)} \, dt$$

$$= \ln(\beta_2(t))\Big|_{t=a}^{t=b} = \ln y_2 - \ln x_2 \,.$$

Gut. Wenn jetzt $\beta_1'(t)$ immer Null ist und $\beta_2'(t)$ immer ≥ 0, dann werden die Zeichen $\geq$ in diesen Abschätzungen zu Gleichheitszeichen, und wir sehen $L^\Phi(\beta) = \ln y_2 - \ln x_2$. (Wir können zB definieren $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{H}$ mit $\beta(t) = (x_1, x_2 + t(y_2 - x_2))$, um all das zu erreichen.) $\square$

Korollar 4.1.3. *Für festes* $a \in \mathbb{R}$ *ist die Abbildung* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ *definiert durch* $f(t) = (a, \exp(t))$ *abstandserhaltend (mit der Standardmetrik auf* $\mathbb{R}$*). Also ist ihr Bild*

$$\{x \in \mathbb{H} \mid x_1 = a\}$$

eine Gerade in $\mathbb{H}$ *(gemäss Definition von* Gerade in metrischem Raum *gegeben in Vorl.notizen Woche 2).*

Beweis. $d^\Phi(f(t), f(s)) = |\ln(\exp(t)) - \ln(\exp(s))| = |t - s|$. $\square$

Bemerkung 4.1.4. Der Beweis von Lemma 4.1.2 beweist noch etwas mehr, als behauptet wurde. Wir haben gesehen: es gibt (unter den Voraussetzungen des Lemmas) eine glatte Kurve β von x nach y in $\mathbb{H}$, für die $L^\Phi(\beta) = d^\Phi(x,y)$ gilt. (Das heisst, obwohl wir $d^\Phi(x,y)$ als Infimum von gewissen gewichteten Kurvenlängen definiert hatten, wissen wir jetzt: das Infimum ist ein Minimum.) Ausserdem: wenn β eine glatte Kurve von x nach y ist, bei der β_1 nicht konstant ist, die also nicht $\beta_1'(t) = 0$ erfüllt für alle t, dann ist $L^\Phi(\beta) > d^\Phi(x,y)$ (strikte Ungleichung). Denn dann ist eine der Ungleichungen in unseren Abschätzungen strikt:

$$\int_a^b \frac{\|\beta'(t)\|}{\beta_2(t)}\, dt > \int_a^b \frac{\|\beta_2'(t)\|}{\beta_2(t)}\, dt\,.$$

Diese Bemerkung, $L^\Phi(\beta) > d^\Phi(x,y)$ falls β_1 nicht konstant, gilt auch wieder im stückweise glatten Fall.

4.2. Selbst-Isometrien der hyperbolischen Ebene

Um einige interessante Isometrien von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$ zu beschreiben, benutzen wir komplexe Zahlen. Insbesondere werden dabei die Elemente (x_1, x_2) von $\mathbb{H}$ als komplexe Zahlen $z = x_1 + x_2 i$ mit positivem Imaginärteil x_2 aufgefasst. Die Abbildungen f von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$, die wir betrachten wollen, haben die Gestalt

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

für $z \in \mathbb{H}$, wobei a, b, c, d feste reelle Zahlen sind mit $ad - bc = 1$. Die Division muss in $\mathbb{C}$ ausgeführt werden! Zur Erinnerung oder Belehrung, falls nötig:

- Eine komplexe Zahl $w = k + \ell i$ hat einen Realteil $k = \mathrm{Re}\, w \in \mathbb{R}$ und einen Imaginärteil $\ell = \mathrm{Im}\, w \in \mathbb{R}$. Warnung: Der Imaginärteil von $w = k + \ell i$ ist eine *reelle* Zahl, nämlich ℓ.

- Der *Betrag* von w ist $|w| = \sqrt{k^2 + \ell^2} \in \mathbb{R}$.
- Addition von komplexen Zahlen wird koordinatenweise durchgeführt. Beispiel: $(3+5i)+(2-7i) = 5-2i$. Analog dazu: Subtraktion koordinatenweise.
- Bei der Multiplikation von komplexen Zahlen benutzen Sie bitte das Distributivgesetz und denken Sie daran, dass $i^2 = -1$ sein soll, genauer gesagt, $(0+1i)^2 = -1+0i$. Beispiel: $(3+5i)(2+7i) = 6+35i^2+10i+21i = -29+31i$.
- Der Betrag von einem Produkt ist das Produkt der Beträge; also $|uv| = |u| \cdot |v|$. Beweis: Nachrechnen.
- Die *Konjugierte* von $w = k+\ell i$ ist $\bar{w} = k - \ell i$. Die Konjugierte von einem Produkt ist das Produkt der Konjugierten; die Konjugierte von einer Summe ist die Summe der Konjugierten.
- Wenn eine komplexe Zahl w nicht Null ist, dann erhebt sich die Frage, wie man w^{-1} bestimmt. Man findet w^{-1} meist am leichtesten in der Form
$$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}.$$
Und Teilen durch w ist dasselbe wie Multiplizieren mit $1/w$.
- Wie schon angedeutet: statt $k+0i$ schreiben wir gerne k. Auf diese Weise wird $\mathbb{R}$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ gleichgesetzt (d.h. eine reelle Zahl ist eine komplexe Zahl w mit $\operatorname{Im} w = 0$). Statt $0+\ell i$ schreiben wir gerne ℓi. Statt $0+1i$ schreiben wir gerne i. Undsoweiter.

Beispiel 4.2.5.
$$\frac{1+5i}{3-2i} = \frac{(1+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{(3-10)+(15+2)i}{9+4} = \frac{7}{13} + \frac{17}{13}i\,.$$

Beispiel 4.2.6. $a, b, c, d = 1, -2, 3, -5$ und $z = 2+i = 2+1i$. Dann ist
$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{1(2+i)-2}{3(2+i)-5} = \frac{i}{1+3i} = \frac{i(1-3i)}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i\,.$$

Bemerkung 4.2.7. Für eine Matrix mit reellen Einträgen
$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
mit $\det(M) = 1$ und ein $z \in \mathbb{H}$ definieren wir versuchsweise
$$f_M(z) := \frac{az+b}{cz+d}\,.$$
Dann stellt sich heraus:

(i) f_M ist eine wohldefinierte und stetige Abbildung von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$;

(ii) $f_M \circ f_N = f_{MN}$, wobei MN das Matrixprodukt bezeichnet;

(iii) $f_{I_2} = \mathrm{id}$ für die Identitätsmatrix I_2.

Aus (ii) folgt, dass jedes f_M eine invertierbare stetige Abbildung von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$ definiert; als Inverse bietet sich nämlich f_N an, wobei $N = M^{-1}$.

Erklärung von (i). (Jetzt vereinfacht im Vgl zur Vorlesung.) Sei $z \in \mathbb{H}$ und $w = f_M(z)$. Wir bemerken erstmal, dass $cz + d \neq 0$, denn sonst $0 = \mathrm{Im}\,(cz + d) = c \cdot \mathrm{Im}\, z$, damit $c = 0$, und dann $d = 0$. Weiter: Die Konjugierte von $cz + d$ ist $c\bar{z} + d$, daher

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2},$$

so dass

$$\mathrm{Im}\, w = \frac{(ad - bc)\mathrm{Im}\, z}{|cz + d|^2} = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{|cz + d|^2}\,.$$

Also ist $\mathrm{Im}\, w > 0$, weil $\mathrm{Im}\, z > 0$.

Die Aussagen (ii) und (iii) können durch Nachrechnen bestätigt werden.

Theorem 4.2.8. *Jedes f_M wie in Bemerkung 4.2.7 ist eine Isometrie von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$, wobei $\mathbb{H}$ mit der Metrik d^Φ ausgestattet ist wie in Definition 4.1.1.*

Beweis. Wegen Bemerkung 4.2.7 ist f_M eine Bijektion von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$, denn eine inverse Abbildung dazu ist f_N mit $N = M^{-1}$.

Die erste Ableitung von f_M ist

$$f'_M(z) = \frac{a(cz + d) - (az + b)c}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}$$

nach der Quotientenregel. Man darf die Quotientenregel hier etwa so benutzen, wie man sie aus der reellen Analysis kennt, weil die Abbildungen $z \mapsto az + b$ und $z \mapsto cz + d$ *komplex* differenzierbar sind[1]. Andererseits haben wir schon herausgefunden (in Bemerkung 4.2.7):

$$\mathrm{Im}\,(f_M(z)) = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|cz + d|^2}\,.$$

[1]Dabei sollte $f'_M(z)$ als *lineare Abbildung* von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden, oder, wenn eine weniger gesunde Sichtweise vorgezogen wird, als 2×2-Matrix mit reellen Einträgen — die Matrix der ersten partiellen Ableitungen, auch Jacobi-Matrix genannt. Die rechte Seite $(cz + d)^{-2}$ muss demnach auch als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden, und das geht. Denn Multiplikation mit einer komplexen Zahl $k + \ell i$ ist tatsächlich eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Ihre Matrix ist

$$\begin{bmatrix} k & -\ell \\ \ell & k \end{bmatrix}.$$

(Diese beiden Formeln, für $f'_M(z)$ und für Im $(f_M(z))$, sind ungeheuer nützlich.) Sei jetzt $\gamma\colon [p,q] \to \mathbb{H}$ eine glatte Kurve. Dann ist auch $f_M \circ \gamma$ eine glatte Kurve. Die Kettenregel ergibt

$$(f_M \circ \gamma)'(t) = f'_M(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

wobei die rechte Seite als Produkt von komplexen Zahlen gelesen werden darf und auch muss. Mit den Rechnungen oben erhalten wir für die gewichteten Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned}
\frac{|(f_M \circ \gamma)'(t)|}{\text{Im }(f_M(\gamma(t)))} &= \frac{|f'_M(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|}{\text{Im }(f_M(\gamma(t)))} \\
&= \frac{|c\gamma(t) + d|^2 |f'_M(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|}{\text{Im }(\gamma(t))} \\
&= \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im }(\gamma(t))}.
\end{aligned}$$

(Es ist ganz lustig, dass ich hier $|...|$ statt $\|...\|$ schreiben durfte. Der Betrag tut für Elemente von $\mathbb{C}$ dasselbe wie die Norm $\|...\|$ für Elemente von $\mathbb{R}^2$.) Wenn wir $\int_p^q$ davorschreiben und dt dahinter, ergibt sich für die gewichteten Kurvenlängen

$$L^\Phi(f_M \circ \gamma) = L^\Phi(\gamma).$$

Dieselbe Beziehung ergibt sich für stückweise glatte Kurven γ (mit mehr Schreibarbeit wegen Summenzeichen). Da Zusammensetzung mit f_M eine Bijektion von der Menge der stückweise glatten Kurven γ in $\mathbb{H}$ von u nach w in die Menge der stückweise glatten Kurven in $\mathbb{H}$ von $f_M(u)$ nach $f_M(v)$ ergibt, dürfen wir schliessen

$$d^\Phi(f_M(u), f_M(w)) = d^\Phi(u, w).$$

□

4.3. Bestimmung von Abständen in der hyperbolischen Ebene

Lemma 4.3.9. *Sei* $z, u \in \mathbb{H}$ (komplexe Bezeichnungen, $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$) *und*

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

eine Matrix mit reellen Einträgen, $\det(M) = 1$ *wie in Bemerkung 4.2.7. Dann ist*

$$\frac{|z-u|}{(\text{Im } z)^{1/2}(\text{Im } u)^{1/2}} = \frac{|f_M(z) - f_M(u)|}{(\text{Im } f_M(z))^{1/2}(\text{Im } f_M(u))^{1/2}}.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Lemma 4.3.10. *Für beliebige* $z, u \in \mathbb{H}$ *existiert eine Matrix* M *wie in Bemerkung 4.2.7 derart, dass* Re $(f_M(z)) = 0$ *und* Re $(f_M(u)) = 0$ (für diese speziellen z und u).

Beweis. Wieder Übungsaufgabe. Diese Aufgabe lässt sich allerdings in folgende Schritte zerlegen (unter Benutzung der Formel $f_{XY} = f_X \circ f_Y$ in Bemerkung 4.2.7.)

1. Finde Matrix P derart, dass Re $(f_P(z)) = 0$ für das gegebene z. Das ist leicht, denn wir können P von der Form
$$P = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
nehmen. Dann ist $f_P(y) = y + b$ für *alle* $y \in \mathbb{H}$. Wenn wir also $b = -$Re z wählen (für unser *spezielles* z), dann ist Re $(f_P(z)) = 0$.
2. Schreibe $f_P(z) = ri$ für ein positives reelles r. Konstruiere Matrix Q derart, dass $f_Q(i) = ri$. Dann ist
$$f_{Q^{-1}P}(z) = (f_Q)^{-1}(f_P(z)) = f_{Q^{-1}}(ri) = i\,.$$
3. Setze $w = f_{Q^{-1}P}(u)$. Finde Matrix N derart, dass $f_N(i) = i$ und Re $(f_N(w)) = 0$. Dann ist
$$f_{NQ^{-1}P}(z) = f_N(i) = i\,,$$
$$\text{Re }(f_{NQ^{-1}P}(u)) = \text{Re }(f_N(f_{Q^{-1}P}(u)) = \text{Re }(f_N(w)) = 0\,.$$
Also ist $M = NQ^{-1}P$ eine Lösung. □

Korollar 4.3.11. *Für den Abstand* $d^{\Phi}(u, z)$ *von* $u, z \in \mathbb{H}$ *gilt:*
$$\cosh\left(d^{\Phi}(u, z)\right) = 1 + \frac{|z - u|^2}{2(\text{Im } z)(\text{Im } u)}\,.$$

Beweis. Erstmal in Erinnerung rufen, dass $\cosh(t) = (\exp(t) + \exp(-t))/2$ für $t \in \mathbb{R}$. Die cosh-Funktion (Cosinus Hyperbolicus) ist injektiv nach Einschränkung auf die nicht-negativen reellen Zahlen. — Wir suchen uns dann eine Matrix M wie in Lemma 4.3.10, so dass Re $(f_M(u)) = 0 =$ Re $(f_M(z))$. Weil f_M eine Isometrie ist, Theorem 4.2.8, haben wir
$$d^{\Phi}(f_M(u), f_M(z)) = d^{\Phi}(u, z).$$
Aber wegen Lemma 4.3.9 gilt auch
$$1 + \frac{|f_M(z) - f_M(u)|^2}{2(\text{Im } f_M(z))(\text{Im } f_M(u))} = 1 + \frac{|z - u|^2}{2(\text{Im } z)(\text{Im } u)}.$$
Das heisst, es genügt uns jetzt, zu zeigen, dass
$$\cosh\left(d^{\Phi}(f_M(z), f_M(u))\right) = 1 + \frac{|f_M(z) - f_M(u)|^2}{2(\text{Im } f_M(z))(\text{Im } f_M(u))}.$$

Sieht so aus wie vorher, nur mit $f_M(u)$ und $f_M(z)$ anstelle von u und z. Wir können jetzt sagen: $f_M(z)$ ist “das neue” z und $f_M(u)$ ist “das neue” u. Fortschritt: wir haben damit auf den Spezialfall reduziert, dass (die neuen) z und u Realteil gleich Null haben.

Unter dieser zusätzlichen Voraussetzung, also Re $u = 0 =$ Re z, haben wir aber schon eine ausgezeichnete Formel für $d^\Phi(u,z)$. Angenommen $u = pi$ und $z = qi$ für gewisse positive reelle p, q, und oBdA ist $p \geq q$. Die Formel ist dann $d^\Phi(u,z) = \ln p - \ln q = \ln(p/q)$. Das ist (ein Spezialfall von) Lemma 4.1.2 in komplexer Schreibweise. Jetzt muss also nur noch gezeigt werden

$$\cosh\left(\ln(p/q)\right) = 1 + \frac{(p-q)^2}{2pq}.$$

Aber das ist leicht. □

Beispiel 4.3.12. Wir hatten den Fall $u = i = 0 + 1i$ und $z = 1000 + i$ betrachtet. Eine erste grobe Abschätzung ergab $d^\Phi(u,z) \leq 1000$ und eine zweite weniger grobe Abschätzung ergab

$$d^\Phi(u,z) \leq 500 + 2(\ln 2).$$

Wir hatten dazu Kurven γ von u nach z konstruiert und ihre gewichtete Kurvenlänge $L^\Phi(\gamma)$ bestimmt, wussten aber nicht recht, ob wir damit dem Infimum solcher gewichteten Kurvenlängen einigermassen nahegekommen waren. (Man hätte es bestimmt besser machen können mit derselben Strategie.) Jetzt stellt sich jedenfalls heraus: dieses Infimum, genannt $d^\Phi(u,z)$, erfüllt

$$\cosh(d^\Phi(u,z)) = 1 + \frac{|z-u|^2}{2(\mathrm{Im}\ z)(\mathrm{Im}\ u)} = 1 + \frac{10^6}{2} = 500\,001.$$

Mein Rechner sagt dazu, dass

$$d^\Phi(u,z) \approx 13,815512557961274110774597894823.$$