06.11.2015

Nicht-Euklidische Geometrie (Weiss)
WS 2015-16
Vorlesungsnotizen, Woche 3

3.1. Kostenfunktionen und gewichtete Kurvenlänge

Definition 3.1.1. (*Stückweise glatte Kurve.*) Eine stetige Abbildung γ von einem Intervall $[a, b]$ nach $\mathbb{R}^n$ heisst stückweise glatt, wenn es endlich viele Elemente

$$t_0, t_1, t_2, \dots t_{k-1}, t_k \in [a, b]$$

gibt derart, dass $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ und γ eingeschränkt auf jedes Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ glatt (= unendlich oft differenzierbar) ist.

Beispiel 3.1.2. Die Abbildung $\gamma\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} (\sin(t), \cos(t)) \in \mathbb{R}^2 & \text{für } t \in [0, \pi/2] \\ (0, 1 - t + \pi/2) \in \mathbb{R}^2 & \text{für } t \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

ist stückweise glatt. (Erläuterung. Die Einschränkung von γ auf $[0, \pi/2]$ ist glatt, was man gerne glaubt, wenn man die Formel $\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t))$ sieht. Hier können wir aber nur von den linksseitigen Ableitungen an der Stelle $\pi/2$ reden, während die rechtsseitigen als nicht sinnvoll oder nicht definiert betrachtet werden. Ebenso ist die Einschränkung von γ auf $[\pi/2, \pi]$ glatt, was man gerne glaubt, wenn man die Formel $\gamma(t) = (0, 1 - t + \pi/2)$ sieht. Hier können wir aber nur von den rechtsseitigen Ableitungen an der Stelle $\pi/2$ reden. Die Kurve γ insgesamt ist *nicht* glatt, weil an der Stelle $\pi/2$ die linksseitige erste Ableitung nicht mit der rechtsseitigen ersten Ableitung übereinstimmt.)

Definition 3.1.3. Gegeben $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Die Länge einer glatten Kurve $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| \; dt.$$

(Im Fall $a = b$ setzen wir $L(\gamma) := 0$.) Die Länge einer stückweise glatten Kurve $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit Unterteilungspunkten $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ ist

$$L(\gamma) = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t)\| \; dt.$$

(Man sollte sich überlegen, dass dieser Ausdruck wohldefiniert ist, denn die Menge der Unterteilungspunkte ist nicht eindeutig vorgegeben. Normalerweise wählt man nur diejenigen Stellen als Unterteilungpunkte aus, an denen γ tatsächlich nicht glatt ist.)

Lemma 3.1.4. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise glatte Kurve. Sei ausserdem $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ eine glatte Funktion, die eine glatte Inverse besitzt, $\varphi^{-1}\colon [a,b] \to [c,d]$. Wir setzen voraus $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, also φ wachsend. Dann ist*

$$L(\gamma) = L(\gamma \circ \varphi).$$

(In Worten: Kurvenlänge ist unabhängig von Parameterisierung.)

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

Beispiel 3.1.5. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (t,t)$. Sei

$$\zeta\colon [0,1000] \to \mathbb{R}^2$$

gegebn durch $\zeta(t) = (t/1000, t/1000)$. Dann ist $L(\gamma) = L(\zeta) = \sqrt{2}$. Beide Kurven beschreiben ein Segment von $(0,0)$ nach $(1,1)$.

Zur Erinnerung: eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ heisst *offen* in $\mathbb{R}^n$, wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert derart, dass alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $d(x,y) < \varepsilon$ zu U gehören. (Dabei ist d die Euklidische Metrik.)

Beispiel 3.1.6. Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ ist offen in $\mathbb{R}^2$. Dagegen ist $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$ nicht offen in $\mathbb{R}^2$.

Sei jetzt U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $\Phi\colon U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, wobei $\Phi(x) > 0$ für alle $x \in U$. Wir denken uns Φ als eine Art Kostenfunktion, die bestimmt, wie teuer es ist, sich in der Nähe von einem beliebigen $x \in U$ fortzubewegen (nämlich ungefähr so teuer: $\Phi(x)$ mal zurückgelegte Strecke). Weil sich die Gebühr ändern kann, während wir uns fortbewegen, müssen die Kosten so berechnet werden. Der Preis für eine Reise in U entlang einer glatten Kurve $\gamma\colon [a,b] \to U$ ist

$$L^{\Phi}(\gamma) := \int_a^b \Phi(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Wir nennen das auch die *gewichtete Kurvenlänge* von γ, bei Gewichtsfunktion Φ. (*Erklärung.* Die Preiszuwachsrate zum Zeitpunkt $t \in [a,b]$ sollte sein:

$$\Phi(\text{wo man ist zur Zeit } t) \cdot (\text{wie schnell man ist zur Zeit } t);$$

also $\Phi(\gamma(t))$ mal $\|\gamma'(t)\|$. Das müssen wir integrieren, um die Gesamtkosten zu ermitteln, denn Totalpreis ist gleich

$$\int_a^b \text{Preiszuwachsrate}(t)\ dt$$

nach dem Hauptsatz der Diff.- und Int.-Rechnung.) Etwas allgemeiner: wir erlauben, dass γ stückweise glatt ist, mit Unterteilungspunkten $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$. Dann sagen wir: der Preis für eine Reise in U entlang Kurve γ ist

$$L^\Phi(\gamma) = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Phi(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\ dt.$$

Lemma 3.1.7. *Sei* $\gamma\colon [a,b] \to U$ *eine stückweise glatte Kurve. Sei ausserdem* $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ *eine glatte Funktion, die eine glatte Inverse besitzt,* $\varphi^{-1}\colon [a,b] \to [c,d]$. *Wir setzen voraus* $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, *also* φ *wachsend. Dann ist*

$$L^\Phi(\gamma) = L^\Phi(\gamma \circ \varphi).$$

(In Worten: Gewichtete Kurvenlänge ist unabhängig von Parameterisierung.)

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beispiel 3.1.8. Frage: Gegeben $z \in U$ und $z' \in U$; wie kommen wir am billigsten von z nach z' ? Erlaubt sind Reisen im Sinne von stückweise glatten Kurven $\gamma\colon [a,b] \to U$ mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = z'$. Der Preis für so eine Reise soll $L^\Phi(\gamma)$ sein.

Wir haben folgendes Beispiel ausprobiert: $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ mit der Kostenfunktion Φ definiert durch

$$\Phi(x) = 1/x_2$$

für alle $x \in U$. Sei $z = (0,1) \in U$ und $z' = (1000,1) \in U$. *Eine* mögliche Reise von z nach z ist gegeben durch die glatte Kurve $\gamma\colon [0,1000] \to U$ mit $\gamma(t) = (t,1)$. Kosten:

$$L^\Phi(\gamma) = 1000.$$

Das ist aber bestimmt nicht die billigste Reise. Eine andere Möglichkeit ist nämlich die stückweise glatte Kurve $\psi\colon [-1,1001]$ definiert durch $\psi(t) = (0, t+2)$ für $t \in [-1,0]$ und $\psi(t) = (t,2)$ für $t \in [0,1000]$ und $\psi(t) = (1000, 1002-t)$ für $t \in [1000,1001]$. Kosten: nur

$$L^\Phi(\psi) = (\ln 2) + 500 + (\ln 2).$$

Leider kann man sich schon denken, dass das auch nicht die billigste Reise von z nach z' ist. Also was ist nun die biligste Reise oder wieviel muss man im besten Fall bezahlen, um von z nach z' zu kommen ? Schwierig.

3.2. Eine besondere Art, metrische Räume zu konstruieren

Definition 3.2.9. Eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ heisst wegzusammenhängend, wenn es zu zwei beliebigen Punkten $x, y \in U$ eine stetige Abbbildung γ von $[0,1]$ nach U gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. (Ohne Beweis: wenn es so eine stetige Kurve γ gibt, dann gibt es auch eine glatte.)

Sei jetzt $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend. Die Frage nach der billigsten Reise (wie in Beispiel 3.1.8) ist schwer zu entscheiden, aber man kann etwas naseweis den Infimumpreis nennen:

$$d^\Phi(x,y) = \inf \{L^\Phi(\gamma) \mid \gamma \text{ stückweise glatte Kurve in } U \text{ von } x \text{ nach } y\}.$$

In Worten: $d^\Phi(x,y)$ ist das Infimum der gewichteten Kurvenlängen $L^\Phi(\gamma)$, die sich ergeben, wenn man von x nach y entlang Kurve γ reist ... wobei natürlich γ stückweise glatte Kurve in U von x nach y. Weil wir vorausgesetzt haben, dass U wegzusammenhängend ist, ist $d^\Phi(x,y)$ eine nichtnegative reelle Zahl.

Lemma 3.2.10. *Wenn $\Phi \geq \Psi$, dann $d^\Phi(x,y) \geq d^\Psi(x,y)$. Wenn Φ konstant, $\Phi \equiv A$, dann $d^\Phi(x,y) \geq A \cdot d(x,y)$, wobei d die Euklidische Metrik bezeichnet.*

Beweis. Der erste Teil ist klar. Sei nun Φ konstant, also $\Phi(z) = A$ für alle $z \in U$, wobei $A > 0$. Gegeben $x, y \in U$ mit $x \neq y$ und eine glatte Kurve $\gamma\colon [a,b] \to U$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Wir schreiben

$$\gamma(t) = \gamma(a) + \alpha(t) + \beta(t)$$

wobei $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ parallel zu $y - x$ ist und $\beta(t) \in \mathbb{R}^2$ senkrecht zu $y - x$. (Das heisst, wir zerlegen für jedes $t \in [a,b]$ den Vektor $\gamma(t) - \gamma(a)$ in einen Teil, der parallel zu $y - x$ ist, und einen anderen Teil, der senkrecht zu $y - x$ ist. Diese Zerlegung ist eindeutig.) Dann ist

$$L^\Phi(\gamma) = \int_a^b A \cdot \|\gamma'(t)\|\ dt = \int_a^b A \cdot \|\alpha'(t) + \beta'(t)\|\ dt \geq \int_c^d A \cdot \|\alpha'(t)\|\ dt.$$

Jetzt schreiben wir noch $\alpha(t) = \psi(t)(y - x)$ mit $\psi(t) \in \mathbb{R}$, so dass speziell $\psi(a) = 0$ und $\psi(b) = 1$. Dann erhalten wir

$$\int_a^b A \cdot \|\alpha'(t)\|\ dt = \int_a^b A \cdot \|\psi'(t)\| \cdot \|y - x\|\ dt = A\|y - x\| \int_a^b \|\psi'(t)\|\ dt$$

$$\geq A\|y-x\| \int_a^b \psi'(t)\ dt = A\|y-x\|(\psi(b) - \psi(a)) = A\|y-x\| = A \cdot d(x,y).$$

Also zusammengenommen $L^\Phi(\gamma) \geq A \cdot d(x,y)$. Eine ähnliche Rechnung (mit mehr Summenzeichen) ergibt dieselbe Abschätzung bei *stückweise* glatter

Kurve γ. Deswegen

$$d^{\Phi}(x,y) = \inf_{\gamma} \{L^{\Phi}(\gamma) \mid \gamma \text{ stü.gl.Kve in } U \text{ von } x \text{ nach } y\} \geq A \cdot d(x,y)$$

wie behauptet. $\square$

Theorem 3.2.11. *Die eben und oben definierte Funktion* $d^{\Phi}\colon U \times U \to \mathbb{R}$ *ist eine Metrik auf* U.

Beweis. Symmetrieeigenschaft. Wenn $\gamma\colon [a,b] \to U$ eine stückweise glatte Kurve in U von x nach y ist, dann ist $\bar{\gamma}\colon [a,b] \to U$ definiert durch $\bar{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$ eine stückweise glatte Kurve in U von y nach x. Auf diese Weise hat man eine bijektive Korrespondenz zwischen den stückweise glatten Kurven in U von x nach y und den stückweise glatten Kurven in U von y nach x. Ausserdem rechnet man nach, dass

$$L^{\Phi}(\gamma) = L^{\Phi}(\bar{\gamma}).$$

Damit ist klar, dass $d^{\Phi}(x,y) = d^{\Phi}(y,x)$.

Dreiecksungleichung. Wenn $\beta\colon [a,b] \to U$ eine stückweise glatte Kurve in U von x nach y ist und $\gamma\colon [a',b'] \to U$ eine stückweise glatte Kurve in U von y nach z, dann können wir eine stückweise glatte Kurve

$$\gamma * \beta\colon [0, b-a+b'-a'] \to U$$

definieren wie folgt: $t \mapsto \beta(t+a)$ falls $t \in [0, b-a]$ und $t \mapsto \gamma(t+a-b+a')$ falls $t \in [b-a, b-a+b'-a']$. Dann ist $\gamma * \beta$ eine stückweise glatte Kurve von x nach z und es ist leicht zu sehen, dass

$$L^{\Phi}(\gamma * \beta) = L^{\Phi}(\gamma) + \text{Ł}^{\Phi}(\beta).$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
d^{\Phi}(x,z) &= \inf\{L^{\Phi}(\alpha) \mid \alpha \text{ stückweise glatte Kurve in } U \text{ von } x \text{ nach } z\} \\
&\leq \inf\{L^{\Phi}(\gamma * \beta) \mid \beta \text{ in } U \text{ von } x \text{ nach } y \text{ und } \gamma \text{ in } U \text{ von } y \text{ nach } z\} \\
&= \inf\{L^{\Phi}(\gamma) + L^{\Phi}(\beta) \mid \beta \text{ in } U \text{ von } x \text{ nach } y \text{ und } \gamma \text{ in } U \text{ von } y \text{ nach } z\} \\
&= d^{\Phi}(x,y) + d^{\Phi}(y,z).
\end{aligned}$$

Nullabstand. Es ist klar, dass $d^{\Phi}(x,x) = 0$ für alle $x \in U$. Aber wir müssen noch zeigen: wenn $x,y \in U$ und $x \neq y$, dann ist $d^{\Phi}(x,y) > 0$. Das ist nicht einfach. Wir halten dazu x und y fest. Sei V ein offener Ball vom Radius δ um x (im Sinn der Euklidischen Metrik). Wir wählen dabei δ so klein, dass $V \subset U$ und $\Phi(z) > \Phi(x)/2$ für alle $z \in V$ gilt, und ausserdem $y \notin V$. Für eine stückweise glatte Kurve $\gamma\colon [a,b] \to U$ existiert das Minimum t_0 von

$$\{t \in [a,b] \mid \|\gamma(t) - x\| \geq \delta/2\}.$$

(Warum?) Dann ist

$$L^{\Phi}(\gamma) \geq L^{\Phi}(\gamma|_{[a,t_0]}) \geq (\Phi(x)/2) \cdot d(x, \gamma(t_0)) = (\Phi(x)/2) \cdot (\delta/2).$$

Für die zweite Ungleichung benutzen wir Lemma 3.2.10 und bedenken dabei, dass der Kurventeil $\gamma|_{[a,t_0]}$ ganz in V verläuft. — Also ist

$$d^{\Phi}(x, y) \geq \Phi(x) \cdot \delta/4 > 0. \quad \square$$