

Nicht-Euklidische Geometrie (Weiss)

WS 2015-16

Vorlesungsnotizen, Woche 2

2.1. Die Axiome

Hier sollen Euklids Axiome für die (Euklidische) Geometrie formuliert werden auf der Grundlage des Begriffs *metrischer Raum*, wie bei Iversen. Es sind in dieser Fassung drei Stück. Die ersten beiden erfordern etwas Vorbereitung.

Sei also X ein metrischer Raum. (Genauer: da ist eine Menge X gegeben und eine Metrik auf X , der wir nicht unbedingt einen Namen geben wollen. Im Notfall kann sie mit d_X bezeichnet werden.) Wir wollen Bedingungen an den metrischen Raum X stellen.

Definition 2.1.1. Eine Teilmenge L von X soll *Gerade* in X heissen, wenn sie das Bild einer abstandserhaltenden Abbildung von \mathbb{R} nach X ist. Dabei soll \mathbb{R} mit der üblichen Metrik ausgestattet sein: $d_{\mathbb{R}}(y, z) = |z - y|$.

Axiom Euklid I. Zu je zwei verschiedenen Elementen y und z von X existiert genau eine Gerade in X , die y und z enthält. Ausserdem: X hat mehr als ein Element.

Bemerkung 2.1.2. (Wir nehmen an, dass X das Axiom I erfüllt.) Sei L die eindeutige Gerade in X , die y und z enthält. Diese Gerade ist nach Definition Bild einer abstandserhaltenden Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow X$. Weil f injektiv ist, existieren eindeutige a und b in \mathbb{R} mit $f(a) = y$, $f(b) = z$. Das Bild vom Intervall $[a, b]$ bzw. $[b, a]$ unter f ist eine Teilmenge von L , also auch von X , die wir das *Segment* von y nach z nennen und gerne mit $[y, z]$ bezeichnen! Also Vorsicht,

$$[y, z] \subset X.$$

Übrigens haben wir gesehen, dass f durch $L = \text{bild}(f)$ nicht eindeutig bestimmt ist; trotzdem ist diese Definition vom Segment $[y, z]$ als Teilmenge von L in Ordnung, d.h. es ist für diesen Zweck egal, welches f wir wählen, solange es abstandserhaltend ist und L als Bild hat.

Um auch eine Definition von $[y, z]$ für den Fall $y = z$ zu haben, sagen wir in diesem Fall, dass $[y, y] = \{y\}$ ist, d.h., das Segment von y nach y ist die einelementige Menge $\{y\}$.

Sei jetzt L eine Gerade in X . Wir nehmen an, dass Axiom 1 erfüllt ist. Wir wollen eine Relation ρ_L auf der Menge $X \setminus L$ definieren. Dazu seien zwei

Elemente $u, v \in X \setminus L$ gegeben. Wir sagen $(u, v) \in \rho_L$, falls das Segment $[u, v]$ in X ganz zu $X \setminus L$ gehört.¹

Diese Relation ist offenbar symmetrisch (also $(u, v) \in \rho_L$ genau dann, wenn $(v, u) \in \rho_L$) und reflexiv (also $(u, u) \in \rho_L$ für alle $u \in X \setminus L$).

Axiom Euklid II. (Hier wird Axiom I schon vorausgesetzt.) Für jede Gerade L in X ist die Relation ρ_L auch *transitiv*, also eine Äquivalenzrelation. Als solche hat sie genau *zwei* Äquivalenzklassen. Es existiert eine Isometrie $r_L: X \rightarrow X$, die die beiden Äquivalenzklassen miteinander vertauscht und $r_L(y) = y$ erfüllt für alle $y \in L$.

Bemerkung 2.1.3. Der erste Teil (betreffend ρ_L) von diesem zweiten Axiom wurde erst im 19. Jahrhundert von Moritz Pasch so formuliert und heisst deswegen auch *Paschs Axiom*. Damit soll nicht unbedingt gesagt sein, dass Euklid diese Forderung vergessen hat; aber es ist jedenfalls denkbar, dass er sie nur unklar ausgedrückt hat. Dass er Begriffe wie *Menge* und *Äquivalenzrelation* nicht hatte, ist übrigens keine gute Entschuldigung, denn es geht auch ohne diese Begriffe (siehe Übungsaufgaben).

Was ist gemeint mit: *die Isometrie r_L vertauscht die beiden Äquivalenzklassen?* Gemeint ist, dass für jedes $z \in X \setminus L$ gilt: $r_L(z) \in X \setminus L$ und $(z, r_L(z)) \notin \rho_L$. Anders ausgedrückt, das Segment $[z, r_L(z)]$ hat mindestens einen Punkt gemeinsam mit der Geraden L . (Übrigens ist es *genau ein* Punkt ... denn sonst hätte die Gerade durch z und $r_L(z)$ mindestens zwei Punkte gemeinsam mit L und müsste dann wegen Axiom I mit L übereinstimmen ... so dass insbesondere $z \in L$, Widerspruch.)

Die Isometrie r_L heisst *Spiegelung an der Geraden L* . Das Axiom II verlangt ausdrücklich nicht, dass sie eindeutig ist, so dass die Benutzung des bestimmten Artikels hier unvorsichtig ist. Wir werden aber später sehen, dass sie eben doch eindeutig ist. Das Axiom verlangt ausdrücklich nicht, dass $r_L \circ r_L = \text{id}$, aber wir werden später sehen, dass das auch gilt.

Diese Form von Axiom II stammt aus der ersten Ausgabe von Iversens Buch. In der neueren zweiten Ausgabe hat er Axiom II etwas anders formuliert. Mir gefällt aber die Formulierung der ersten Ausgabe besser.

Definition 2.1.4. Zwei Geraden L und L' in X heissen *parallel*, wenn entweder $L = L'$ oder $L \cap L' = \emptyset$. Wir schreiben manchmal $L \parallel L'$ dafür.

Axiom Euklid III. Zu jeder Geraden L in X und jedem $z \in X \setminus L$ existiert genau eine Gerade L' in X , die z enthält und parallel zu L ist.

Bemerkung 2.1.5. Axiom III ist das berühmte Parallelenaxiom (allerdings umformuliert, nicht so sehr von Iversen, sondern lange davor von

¹Zur Erinnerung: eine Relation auf einer Menge S ist eine Teilmenge von $S \times S$.

Proklus). Im jahrtausendelangen Streit über dieses Axiom ging es darum, ob es aus den Axiomen I und II abgeleitet werden kann oder nicht. Wir werden bald sehen, dass man aus den Axiomen I und II leicht ableiten kann: *zu jeder Geraden L in X und jedem $z \in X \setminus L$ existiert mindestens eine Gerade L' in X , die z enthält und parallel zu L ist.* Also geht es bei Axiom III, und bei den Streitereien, eigentlich nur um die Eindeutigkeit einer Geraden L' mit den genannten Eigenschaften.

Übrigens können wir es auch so schreiben: *Zu jeder Geraden L in X und jedem $z \in X$ existiert genau eine Gerade L' in X , die z enthält und parallel zu L ist.* (Denn wenn $z \in L$, dann kommt ohnehin nur $L' := L$ in Frage.)

Vokabeln. Line (=Gerade), segment, reflection at the line L (=Spiegelung an der Geraden L), parallel lines.

2.2. Überblick

— Es soll sehr bald gezeigt werden, dass der metrische Raum $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ (mit der euklidischen Metrik) die drei Axiome erfüllt. Das ist nicht schwer.

— Irgendwann später soll auch mal Folgendes gezeigt werden. Wenn ein metrischer Raum X die drei Axiome erfüllt, dann gibt es eine Isometrie von X nach \mathbb{E} . Das ist nicht sehr schwer, aber schon ganz interessant.

— Es soll bald gezeigt werden: es existiert ein metrischer Raum \mathbb{H} , der die Axiome I und II erfüllt, aber nicht Axiom III. (Name: die *hyperbolische Ebene*.) Damit wäre gezeigt, dass Axiom III nicht aus den Axiomen I und II folgt. Das ist auch nur mässig schwer (weil es andere im 19. Jahrhundert herausgefunden haben und weil wir nun schon fast die richtige Sprache dafür haben). Es erfordert aber ein paar neue Ideen und Begriffe. Also wieder ganz schön interessant.

— Schliesslich soll gezeigt werden: wenn ein metrischer Raum X die Axiome I und II erfüllt, aber nicht Axiom III, dann existiert eine positive reelle Zahl c und eine Bijektion $f: X \rightarrow \mathbb{H}$ derart, dass

$$d_X(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = c \cdot d_{\mathbb{H}}(f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z}))$$

für alle $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$. (Das heisst, f ist eine Isometrie von X mit dem metrischen Raum, der aus \mathbb{H} durch Multiplikation der Metrik mit dem Faktor c entsteht.) Das ist dann richtig schwer. Die Zahl c ist übrigens eindeutig, das heisst, durch den metrischen Raum X bestimmt (unter der Voraussetzung, dass X die Axiome I und II erfüllt, aber Axiom III verletzt).

Bemerkung 2.2.6. Für eine feste reelle Zahl $c > 0$ sei \mathbb{E}_c der metrische Raum, der aus \mathbb{E} entsteht durch Multiplikation der Metrik $d_{\mathbb{E}}$ mit c . Dann

gibt es eine Isometrie f von \mathbb{E}_c nach \mathbb{E} . Mit anderen Worten, f ist eine Bijektion von $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft

$$\forall \mathbf{y}, \forall \mathbf{z} \in \mathbb{E}: \quad d_{\mathbb{E}}(f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z})) = c \cdot d_{\mathbb{E}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Man kann nämlich $f(\mathbf{y}) = c\mathbf{y}$ setzen, unter Benutzung der Vektorraumstruktur von \mathbb{R}^2 .

Wenn man dasselbe mit \mathbb{H} versucht, geht es schief, wie oben schon angedeutet. Für festes $c > 0$, $c \neq 1$, gibt es keine Bijektion $g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, die $d_{\mathbb{H}}(g(\mathbf{y}), g(\mathbf{z})) = c \cdot d_{\mathbb{H}}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ erfüllt für alle $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{H}$.

Vokabeln. Euclidean plane, hyperbolic plane; dilatation (=Streckung).

2.3. Die Euklidische Ebene \mathbb{E} erfüllt die drei Axiome

Wir haben das meiste davon schon in Vorlesungsnotizen Woche 1 gesehen. Beachten: \mathbb{E} bedeutet \mathbb{R}^2 mit der Euklidischen Metrik,

$$d_{\mathbb{E}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}.$$

Zu Axiom I: Gegeben $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{E}$, wobei $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$. Sei $\mathbf{a} = d_{\mathbb{E}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Setze $\mathbf{v} := \mathbf{a}^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{p})$, mit Benutzung der Vektorraumstruktur von \mathbb{R}^2 . Dann ist die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x) = \mathbf{p} + x\mathbf{v}$$

eine abstandserhaltende Abbildung (wie wir gezeigt haben). Demnach ist $\text{bild}(f)$ eine Gerade in \mathbb{E} . Sie enthält \mathbf{p} und \mathbf{q} (wähle $x = 0$ und $x = \mathbf{a}$).

Jetzt sei L irgendeine Gerade in \mathbb{E} , die \mathbf{p} und \mathbf{q} enthält. Wir wissen, dass $L = \text{bild}(g)$ für eine Abbildung $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ von der Form

$$g(x) = \mathbf{s} + x\mathbf{w}$$

wobei $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ fest gewählt sind, $w_1^2 + w_2^2 = 1$. Dann gibt es $t \in \mathbb{R}$ und $t' \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} + t\mathbf{w}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{s} + t'\mathbf{w}.$$

Es folgt $t \neq t'$ und $\mathbf{v} = \mathbf{a}^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = \mathbf{a}^{-1}(t' - t)\mathbf{w}$, das heisst, \mathbf{v} ist skalares Vielfaches von \mathbf{w} , das heisst, $\mathbf{v} = \pm\mathbf{w}$ (weil beide die Länge 1 haben). OBdA ist $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ (denn $\text{bild}(g)$ ändert sich nicht, wenn wir \mathbf{w} durch $-\mathbf{w}$ ersetzen in der Formel für g). Dann haben wir $\mathbf{s} = \mathbf{p} - t\mathbf{w} = \mathbf{p} - t\mathbf{v}$, also

$$g(x) = \mathbf{p} - t\mathbf{v} + x\mathbf{w} = \mathbf{p} - t\mathbf{v} + x\mathbf{v} = f(x - t)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $\text{bild}(g) = \text{bild}(f)$, wzbw.

Zu Axiom II, erster Teil, auch genannt Paschs Axiom: Die Gerade L ist das Bild einer abstandserhaltenden Abbildung von \mathbb{R} nach \mathbb{E} . Also ist $L = \text{bild}(f)$ wobei f die Form $f(x) = \mathbf{p} + x\mathbf{v}$ hat für eine beliebiges aber festes $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ und ein festes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $v_1^2 + v_2^2 = 1$. Sei $\mathbf{v}^\perp = (-v_2, v_1)$, so dass

v^\perp wieder die Länge 1 hat und $v^\perp \cdot v = 0$ ist (Skalarprodukt von Vektoren bitteschön). Dann sind die Punkte auf der Geraden L genau diejenigen $w \in \mathbb{R}^2$, die die Gleichung

$$w \cdot v^\perp = p \cdot v^\perp$$

erfüllen. (Man kann auch schreiben: $(w - p) \cdot v^\perp = 0$, wodurch ausgedrückt ist, dass $w - p$ senkrecht zu v^\perp , also parallel zu v ... das ist gut.) Demnach sind die Punkte von $\mathbb{R}^2 \setminus L = \mathbb{E} \setminus L$ genau diejenigen $w \in \mathbb{R}^2$, die eine der Ungleichungen

$$w \cdot v^\perp > p \cdot v^\perp, \quad w \cdot v^\perp < p \cdot v^\perp$$

erfüllen. Sie kommen also in zwei Typen, solche mit $>$ und solche mit $<$. Gegeben seien jetzt w, w' in $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Man rechnet leicht durch, dass das Segment $[w, w']$ (ein Teil der Geraden durch w und w') genau dann L nicht schneidet, wenn entweder $w \cdot v^\perp > p \cdot v^\perp$ und $w' \cdot v^\perp > p \cdot v^\perp$; oder aber $w \cdot v^\perp < p \cdot v^\perp$ und $w' \cdot v^\perp < p \cdot v^\perp$. Damit ist die Sache erledigt; die Äquivalenzklassen von ρ_L sind die Mengen $\{w \in \mathbb{R}^2 \mid w \cdot v^\perp > p \cdot v^\perp\}$ und $\{w \in \mathbb{R}^2 \mid w \cdot v^\perp < p \cdot v^\perp\}$.

Zu Axiom II, zweiter Teil: Existenz von Isometrie r_L . Sei K die erste Koordinatenachse in \mathbb{R}^2 , die ja auch eine Gerade in X ist. Wir wählen erstmal eine Isometrie $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ derart, dass $h(K) = L$ ist. Genauer, wenn L das Bild der abstandserhaltenden Abbildung $(x \mapsto p + xv)$ ist, wie oben, dann kann h definiert werden durch $h(y) := p + y_1v + y_2v^\perp$ wobei v^\perp wie oben.

Sei r_K die Isometrie mit $r_K(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$; das ist nämlich Spiegelung an der Geraden K . Dann hat $r_L := h \circ r_K \circ h^{-1}$ die gewünschten Eigenschaften. (Die beiden Äquivalenzklassen der Relation ρ_L sind dann $\{h(y) \mid y_2 > 0\}$ und $\{h(y) \mid y_2 < 0\}$, also die Bilder unter h der oberen Halbebene und der unteren Halbebene, ohne die erste Koordinatenachse.)

Zu Axiom III: Die Gerade L sei das Bild von $(x \mapsto p + xv)$, wie oben. Sei $q \in \mathbb{R}^2 \setminus L$. Dann ist das Bild der abstandserhaltenden Abbildung

$$x \mapsto q + xv$$

eine Gerade M , die $L \cap M = \emptyset$ erfüllt und q enthält. Denn wenn $L \cap M$ nicht leer wäre, dann hätten wir $p + xv = q + x'v$ für gewisse $x, x' \in \mathbb{R}$ und damit $q = p + (x - x')v$, so dass $q \in L$, Widerspruch.

Umgekehrt ist jede Gerade N , die q enthält, Bild einer abstandserhaltenden Abbildung der Form

$$x \mapsto q + xw$$

6

wobei $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ mit $w_1^2 + w_2^2 = 1$. Wenn $L \cap N = \emptyset$ ist, dann hat das Gleichungssystem

$$\mathbf{q} + x\mathbf{w} = \mathbf{p} + x'\mathbf{v}$$

in den Unbekannten x und x' keine Lösung. Das geht aber nur, wenn \mathbf{w} ein skalares Vielfaches von \mathbf{v} ist, also $\mathbf{w} = \pm\mathbf{v}$ (weil beide die Länge 1 haben). Dann ist $N = M$. Also gibt es nur eine Gerade, die parallel zu L ist und \mathbf{q} enthält. \square