19.10.2015

Nicht-Euklidische Geometrie (Weiss) WS 2015-16 Vorlesungsnotizen, Woche 1

Bei Iversen (*An Invitation to Geometry*, Univ Aarhus Lecture Notes Series No.59) werden die Axiome von Euklid zur Geometrie der Ebene als Bedingungen an einen metrischen Raum verstanden. Deswegen fangen wir mit dem Begriff *metrischer Raum* an.

1.1. Metrische Räume

Definition 1.1.1. Ein *metrischer Raum* besteht aus einer Menge X und einer Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Für beliebige Elemente y, z von X gilt $d(y,z) \geq 0$, und es gilt $d(y,z) = 0$ genau dann, wenn $y = z$.
(2) Für beliebige Elemente y, z von X ist $d(y,z) = d(z,y)$.
(3) Für beliebige Elemente w, y, z von X gilt $d(w,z) \leq d(w,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung).

Die Abbildung d wird auch eine *Metrik* auf der Menge X genannt (vorausgesetzt, dass sie diese Eigenschaften erfüllt).

Bemerkung 1.1.2. *Was man hier alles missverstehen kann.* Erstmal kann man missverstehen: $X \times X$. Allgemein: wenn X und Y beliebige Mengen sind, dann soll $X \times Y$ die Menge sein, deren Elemente die geordneten Paare (a,b) mit $a \in X$ und $b \in Y$ sind. *Was kann man hier schon wieder missverstehen*: das Wort *geordnet*. Im Ausdruck *geordnetes Paar* ist das Wort *geordnet* nur ein Hinweis dahingehend, dass es uns wichtig ist, wer in dem geordneten Paar die linke (erste) Koordinate besetzt und wer die rechte (zweite) Koordinate besetzt. Es bedeutet nicht, dass $a > b$ oder $a < b$ sein muss, was in den meisten Fällen auch garnicht sinnvoll wäre, etwa wenn a ein Apfel und b eine Birne ist. Es ist eine Art Ermahnung mit dem Inhalt, dass (a,b) zum Beispiel nicht mit der Menge $\{a,b\}$ verwechselt werden soll. Denn diese wäre ja bekanntlich nicht zu unterscheiden von der Menge $\{b,a\}$, womit wir über die Besetzung der Koordinaten schon sehr im Unklaren wären.

Beispiel: wenn $X = \{\text{Apfel}, \text{Birne}, \text{Zitrone}\}$ ist, dann hat $X \times X$ neun Elemente. Eines davon ist das geordnete Paar $(\text{Apfel}, \text{Zitrone})$. Ein anderes (!) ist das geordnete Paar $(\text{Zitrone}, \text{Apfel})$.

Wie man es verstehen soll. In Bedingung (1) wird gesagt, dass die Abbildung d für jedes geordnete Paar (y,z) mit Koordinaten y und z aus X eine nicht-negative reelle Zahl $d(y,z)$ auswählt. Man soll sich diese Zahl als den *Abstand* von y nach z vorstellen. Wenn man dieses Wort *Abstand* so benutzt, dann bedeutet der Rest von (1), dass der Abstand von y nach

z, also die reelle Zahl $d(y,z)$, genau dann 0 ist, wenn $y = z$ ist. Weiter bedeutet (2), dass der Abstand von y nach z gleich dem Abstand von z nach y ist (für alle y und z aus der Menge X). Wir können deswegen auch sagen: *Abstand zwischen* y *und* z (womit wir immer noch $d(y,z)$ meinen). Das ist angenehm. Schliesslich sagt (3) aus, dass der Abstand von w nach z niemals grösser ist als die Summe aus Abstand von w nach y und Abstand von y nach z.

Etwas Allgemeines zu Definitionen in der Mathematik. In der Mathematik werden durch eine Definition normalerweise Pflichten auferlegt, aber auch Rechte gegeben. Eine Definition ist nicht nur Beschreibung von Dingen, die die Natur uns geschenkt hat (so, wie man das von einer Definition in der Zoologie vielleicht erwarten darf). Also: wenn jemand eine Menge X *erfindet* und dazu eine Abbildung d von $X \times X$ nach $\mathbb{R}$, so dass X und d zusammen die Eigenschaften oben erfüllen, dann ist der/diejenige berechtigt, das Ding einen metrischen Raum zu nennen.

Beispiel 1.1.3. Wir setzen $X = \mathbb{R}$ und $d(y,z) = |z - y|$. Die Eigenschaften einer Metrik sind durch d erfüllt. (Zum Beispiel Dreiecksungleichung: behauptet wird $|w - z| \le |w - y| + |y - z|$ für beliebige reelle Zahlen w, y, z. Folgt aus $|a + b| \le |a| + |b|$, wenn man $a = w - y$ und $b = y - z$ setzt. Man beachte dabei, dass manchmal $|a + b|$ tatsächlich kleiner ist als $|a| + |b|$.)

Beispiel 1.1.4. Wir setzen $X = \mathbb{R}$ und $d(y,z) = |z| + |y|$ für den Fall, dass $y, z \in \mathbb{R}$ und $y \neq z$; sonst, also wenn $y = z$, setzen wir $d(y,z) = 0$. Die Eigenschaften einer Metrik sind erfüllt. Diese Metrik auf der Menge $\mathbb{R}$ wird gerne von Franzosen und Frankophilen die *SNCF-Metrik* genannt.

Beispiel 1.1.5. Wir setzen $X = \mathbb{R}^n$ und

$$d(y,z) = \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 + \cdots + (z_n - y_n)^2}.$$

Dabei sind $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Koordinaten von $y \in \mathbb{R}^n$; ähnlich für $z \in \mathbb{R}^n$. Die Eigenschaften einer Metrik sind erfüllt. (Der Nachweis der Dreiecksungleichung ist allerdings garnicht so einfach. Hoffentlich haben Sie das in Analysis I schon gehabt?) Diese Metrik heisst: *Euklidische Metrik* auf $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 1.1.6. Wir setzen $X = \mathbb{R}^n$ und

$$d(y,z) = |z_1 - y_1| + |z_2 - y_2| + \cdots + |z_n - y_n|.$$

Dabei sind $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Koordinaten von $y \in \mathbb{R}^n$; ähnlich für $z \in \mathbb{R}^n$. Die Eigenschaften einer Metrik sind erfüllt. (Der Nachweis der Dreiecksungleichung ist diesmal einfach.)

Beispiel 1.1.7. Sei X die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ nach $\{0, 1\}$. Für $f \in X$ und $g \in X$ setzen wir

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} |f(k) - g(k)|\,.$$

Dann erfüllt d die Eigenschaften einer Metrik auf X. (Statt Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\{0, 1\}$ kann man auch sagen: Folge, bei der nur die Zahlen 0 und 1 als Folgenglieder erlaubt sind.)

Definition 1.1.8. Sei (X, d) ein metrischer Raum, das heisst, X ist eine Menge und d ist eine Metrik auf X. Sei A eine Teilmenge von X. Dann ist die Einschränkung von $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ auf $A \times A$ eine Metrik auf A, die zum Beispiel mit d_A bezeichnet wird. Man sagt: (A, d_A) ist *metrischer Unterraum* von (X, d) usw. Man sagt auch: d_A ist die von d *induzierte Metrik* auf A.

Beispiel 1.1.9. Sei $\mathbb{R}$ versehen mit der üblichen Metrik d, also $d(y, z) = |z - y|$. Sei $A = \{0, 1, 5\}$. Dann ist d_A die Metrik auf A, die gegeben ist durch

$$d(0, 1) = d(1, 0) = 1,\ d(0, 5) = d(5, 0) = 5,\ d(1, 5) = d(5, 1) = 4,$$

$$d(0, 0) = d(1, 1) = d(5, 5) = 0\,.$$

Vokabeln. Set, map (=Abbildung), metric space, metric, distance, distance function, triangle inequality.

1.2. Abstandserhaltende Abbildungen und Isometrien

Definition 1.2.10. Es seien (S, d) und $(T, d^\sharp)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f \colon S \to T$ heisst *abstandserhaltend* (für die Metriken d und $d^\sharp$), falls für alle $x, y \in S$ die Gleichung $d^\sharp(f(x), f(y)) = d(x, y)$ gilt.
Eine abstandserhaltende Abbildung f, die ausserdem *bijektiv* ist, darf *Isometrie* genannt werden.

(Manche Leute sagen auch schon *Isometrie*, wenn f nur abstandserhaltend ist, aber ich bin dafür, dass Worte, die mit *Iso ...* anfangen, umkehrbare Dinge bezeichnen.)

Bemerkung 1.2.11. Eine abstandserhaltende Abbildung zwischen metrischen Räumen ist immer injektiv. *Beweis*: mit Bezeichnungen wie oben folgt aus $f(x) = f(y)$ in T, dass $d^\sharp(f(x), f(y)) = 0$, daher $d(x, y) = 0$ weil f abstandserhaltend, daher $x = y$ in S weil d die Bedingungen für eine Metrik erfüllt. Also ist f injektiv.

Mit Blick auf die euklidische Geometrie betrachten wir jetzt genauer die metrischen Räume $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik d, also $d(y,z) = |z-y|$ für Elemente y und z aus $\mathbb{R}$, und $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Metrik D, also

$$D(y,z) = \sqrt{(z_1-y_1)^2 + (z_2-y_2)^2}$$

für Elemente y und z aus $\mathbb{R}^2$.

Beispiel 1.2.12. Was gibt es für abstandserhaltende Abbildungen f von $(\mathbb{R}, d)$ nach $(\mathbb{R}, d)$? Man überlegt sich, dass ein Element x von $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt ist durch seine Abstände von zwei fest gewählten verschiedenen Elementen (zum Beispiel 0 und 1). Daraus folgt, dass eine abstandserhaltende Abbildung f von $(\mathbb{R}, d)$ nach $(\mathbb{R}, d)$ schon festgelegt ist durch die Werte $f(0)$ und $f(1)$. Diese sind nicht ganz beliebig, sondern müssen $|f(1)-f(0)| = |1-0| = 1$ erfüllen. Dann haben wir

$$f(x) = ax + b$$

wobei $a = \pm 1 = f(1) - f(0)$ und $b = f(0)$ beliebig ist in $\mathbb{R}$. Damit ist auch klar, dass f automatisch bijektiv ist, also eine Isometrie.

Beispiel 1.2.13. Was gibt es für abstandserhaltende Abbildungen f von $(\mathbb{R}, d)$ nach $(\mathbb{R}^2, D)$? Angenommen, wir kennen $f(0)$ und $f(1)$. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < 1$. Wenn $f(x)$ nicht auf der Geraden durch $f(0)$ und $f(1)$ liegt, dann bilden die Punkte $f(0)$, $f(1)$ und $f(x)$ ein ordentliches Dreieck und es gilt deswegen die strikte Ungleichung

$$D(f(0), f(x)) + D(f(x), f(1)) > D(f(0), f(1).$$

Andererseits ist $d(0,x) + d(x,1) = d(0,1)$ nach Wahl von x, strikte Gleichheit. Also ist etwas schiefgelaufen; f nicht abstandserhaltend; Widerspruch. Also muss $f(x)$ doch auf der Geraden durch $f(0)$ und $f(1)$ liegen. Das heisst, $f(x)$ muss die Form $f(0) + a_x(f(1) - f(0))$ haben für ein $a_x \in \mathbb{R}$ (vektorartige Bezeichnungen). Dann wird $x = d(0,x) = D(f(0), f(x)) = |a_x|$ und ebenso $1 - x = d(x,1) = D(f(x), f(1)) = |1 - a_x|$. Dann folgt $a_x = x$. Damit ist $f(x) = f(0) + x(f(1) - f(0))$ ausgerechnet.

Ähnlich verfährt man, wenn $x > 1$. Wenn $f(1)$ nicht auf der Geraden durch $f(0)$ und $f(x)$ liegt, dann Widerspruch; also liegt es auf der Geraden; also ist wieder $f(x) = f(0) + a_x((f(1) - f(0))$ mit $a_x \in \mathbb{R}$, und wenn die Abstände passen sollen, muss $a_x = x$ gelten, also wieder

$$f(x) = f(0) + x(f(1) - f(0)).$$

Ähnlich, wenn $x < 0$.

Zusammenfassend, f ist durch $u = f(0)$ und $v = f(1) - f(0)$ bestimmt und hat dann die Form $f(x) = u + xv$. Dabei kann $u \in \mathbb{R}^2$ beliebig gewählt werden und $v \in \mathbb{R}^2$ unterliegt der Einschränkung $v_1^2 + v_2^2 = 1$.

Bemerkung 1.2.14. Dieses Beispiel erinnert uns auch daran, dass jede Gerade L in $\mathbb{R}^2$ das Bild einer abstandserhaltenden Abbildung f von $(\mathbb{R}, d)$ nach $(\mathbb{R}^2, D)$ ist. Man sollte sich dabei klar machen, dass die Beziehung $L = \text{bild}(f)$ uns zwar erlaubt, L aus f eindeutig zu bestimmen, aber nicht f aus L. Wenn f und g zwei abstandserhaltende Abbildungen von $(\mathbb{R}, d)$ nach $(\mathbb{R}^2, D)$ sind mit $\text{bild}(f) = \text{bild}(g)$, dann ist $h := f^{-1} \circ g$ definiert (wobei die Injektivität von f benutzt wird) und ist eine Isometrie von $(\mathbb{R}, d)$ nach $(\mathbb{R}, d)$. Wir sehen also, dass f und g sich nur unterscheiden durch Zusammensetzung mit einer Isometrie h von $(\mathbb{R}, d)$ nach $(\mathbb{R}, d)$: nämlich $g = f \circ h$.

Beispiel 1.2.15. Was gibt es für abstandserhaltende Abbildungen f von $(\mathbb{R}^2, D)$ nach $(\mathbb{R}^2, D)$? Erstmal bemerken wir, dass so ein f festgelegt ist durch die Werte $f(0,0)$, $f(1,0)$ und $f(0,1)$. Denn zu jedem Punkt p in $\mathbb{R}^2$ können wir

- entweder einen Punkt q auf der Geraden durch $(0,0)$ und $(1,0)$ finden derart, dass p auf der Geraden durch q und $(0,1)$ liegt;
- oder einen Punkt q in $\mathbb{R}^2$ auf der Geraden durch $(0,0)$ und $(0,1)$ finden derart, dass p auf der Geraden durch q und $(1,0)$ liegt;
- oder einen Punkt q in $\mathbb{R}^2$ auf der Geraden durch $(1,0)$ und $(0,1)$ finden derart, dass p auf der Geraden durch q und $(0,0)$ liegt.

Im ersten Fall, weil $f(0,0)$ und $f(1,0)$ schon vorgegeben sind, ist damit $f(q)$ festgelegt (Beweis wie in Beispiel 1.2.13), und weil dann $f(q)$ und $f(0,1)$ festgelegt sind, ist auch $f(p)$ festgelegt (Beweis wie in Beispiel 1.2.13). Ähnlich kann man in den beiden anderen Fällen argumentieren.

Zweitens bemerken wir, dass die Punkte $f(0,0)$, $f(1,0)$ und $f(0,1)$ ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$ mit den Seitenlängen 1, 1 und $\sqrt{2}$ bilden müssen (daher ein rechtwinkliges). Wenn wir also schreiben

$$f(0,0) = u, \quad f(1,0) = u + v, \quad f(0,1) = u + w$$

wobei $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ usw., dann muss $v_1^2 + v_2^2 = 1$ gelten und $w_1^2 + w_2^2 = 1$ und $v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$ (für den rechten Winkel).

Drittens: wenn wir u, v und w in dieser Weise festgelegt haben, dann können wir die dazugehörige abstandserhaltende Abbildung hinschreiben (von der wir schon wissen, dass sie eindeutig ist):

$$f(x) = u + x_1 v + x_2 w = (u_1 + x_1 v_1 + x_2 w_1, u_2 + x_1 v_2 + x_2 w_2).$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass es sich hierbei um eine abstandserhaltende Abbildung handelt. Ausserdem ist sie bijektiv, das heisst, sie ist eine Isometrie. Man kann sie auch in der Vektor-und-Matrix-Form

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

schreiben. Die Bedingungen $v_1^2 + v_2^2 = 1$, $w_1^2 + w_2^2 = 1$ und $v_1 w_1 + v_2 w_2$ gelten natürlich immer noch. Eine 2×2-Matrix, die diese Bedingungen erfüllt, heisst *orthogonale* 2×2*-Matrix*.

Vokabeln. Distance preserving map, isometry, line, euclidean plane, triangle, matrix, orthogonal matrix.

1.3. Stetige Abbildungen

In der Analysis werden metrische Räume gerne eingeführt, weil sie es möglich machen, eine ziemlich allgemeine Definition von Stetigkeit zu geben. Wenn man das versteht, dann versteht man auch nach und nach, dass metrische Räume für die Diskussion von Stetigkeit eigentlich zuviel Information enthalten, und auf diese Weise kommt man vielleicht zum Begriff *topologischer Raum* und überhaupt zur Topologie.

Eigentlich muss uns das alles hier nicht so sehr interessieren, denn wir sagen (mit Iversen): metrische Räume sind vor allem in der *Geo-Metrie* nützlich. Das ist übrigens ein Bruch mit alten Traditionen. Demnach sind uns abstandserhaltende Abbildungen und Isometrien wichtig; Abbildungen zwischen metrischen Räumen, die nur stetig sind, dagegen nicht so sehr.

Trotzdem ist es manchmal ganz gut, zu wissen, was Stetigkeit bedeutet.

Definition 1.3.16. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, wobei $X = (X, d)$ und $Y = (Y, \rho)$ metrische Räume sind. Sei $a \in X$. Wir sagen, dass f *stetig ist im Punkt* a, wenn zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $\delta > 0$ existiert derart, dass $\rho(f(a), f(b)) < \varepsilon$ für jedes $b \in X$ mit $d(a, b) < \delta$. Wir sagen, dass f *stetig* ist, wenn es an jedem $a \in X$ stetig ist.

Beispiel 1.3.17. Eine abstandserhaltende Abbilldung zwischen metrischen Räumen ist stetig. (Denn zu jedem ε gibt es ein δ ... wir können in diesem Fall $\delta := \varepsilon$ nehmen.)

Beispiel 1.3.18. Sei X wie in Beispiel 1.1.7 und $Y = \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik. Die Abbildung, die $g \in X$ abbildet auf

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} g(k) \qquad \in \mathbb{R}$$

ist nicht abstandserhaltend, aber sie ist stetig. Wie sieht eigentlich ihr Bild aus?

Beispiel 1.3.19. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die surjektiv und monoton ist (also $f(x) \geq f(y)$ wann immer $x \geq y$). Dann ist f stetig als Abbildung von $(\mathbb{R}, d)$ nach $(\mathbb{R}, d)$, wobei d die Standardmetrik ist, also $d(y, z) = |z - y|$.

Definition 1.3.20. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ eine Folge in X. Man sagt, dass die Folge $(a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ gegen ein Element $a \in X$ *konvergiert*, wenn $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$ ist.

Proposition 1.3.21. *Sei* $f\colon X \to Y$ *eine Abbildung, wobei* $X = (X, d)$ *und* $Y = (Y, \rho)$ *metrische Räume sind. Sei* $a \in X$ *gegeben. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

- f *ist stetig im Punkt* a*;*
- *für jede Folge* $(a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ *in* X*, die gegen* a *konvergiert, konvergiert die Folge* $(f(a_n))_{n=0,1,2,\dots}$ *in* Y *gegen* $f(a)$*.*

Beweis: nein danke, es wird angenommen, dass Sie das kennen. □

Definition 1.3.22. Zwei Metriken d_1 und d_2 auf derselben Menge X werden *äquivalent* genannt, wenn die Identitätsabbildung von X stetig ist als Abbildung von (X, d_1) nach (X, d_2) und ebenso als Abbildung von (X, d_2) nach (X, d_1).

Beispiel 1.3.23. Die Metriken auf $\mathbb{R}^n$ in Beispielen 1.1.5 und 1.1.6 sind äquivalent. Die Metriken auf $\mathbb{R}$ in Beispielen 1.1.3 und 1.1.4 sind nicht äquivalent.

Vokabeln. Continuous map, continuity, continuous at a point, convergent sequence.