

Vorlesungsnotizen Woche 13

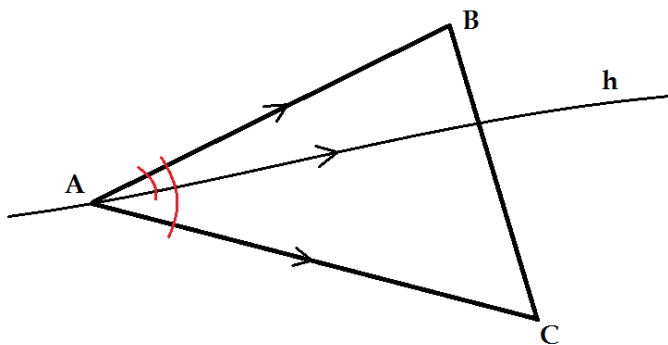
Nichteuklidische Geometrie, WS 2015-2016 (Weiss)

Es geht weiter um einen metrischen Raum X , der (wenn nicht anders gesagt) Axiome I und II erfüllt, aber Axiom III verletzt.

Bemerkung 13.0.1. Die folgende Aussage über Winkel (ziemlich identisch mit Aufgabe 1 von Übungsblatt 10) ist oft sehr praktisch. Gegeben Dreieck ΔABC in X und zusätzlich eine Gerade h durch A , wobei $B \notin h$. Die Gerade durch A und B soll h_B heissen und die Gerade durch A und C soll h_C heissen. Die Geraden werden wie folgt orientiert: h_B so, dass $A < B$ und h_C so, dass $A < C$, und h so, dass Punkte $D \in h$ mit $A < D$ auf derselben Seite von h_B liegen wie C . Dann sind die folgenden Bedingungen gleichwertig:

- (i) $h \cap [B, C] \neq \emptyset$.
- (ii) (Winkel zwischen h_B und h) \leq (Winkel zwischen h_B und h_C).

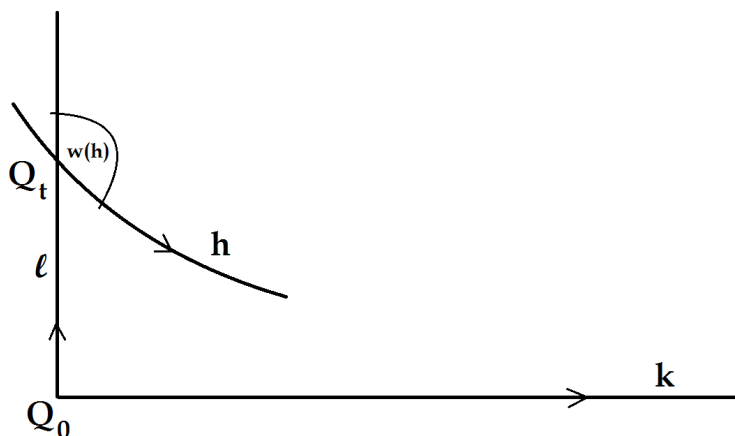
(Das Bild unten zeigt nur den Fall, in dem beide Bedingungen erfüllt sind.) Wie beweist man diese Behauptung, die doch so einleuchtend ist? Es hat eine ganze Menge mit Paschs Axiom zu tun. Man versteht das, wenn man zu den Definitionen zurückkehrt: *Winkel ... Bogenlänge ... minimaler Kreisbogen*. Das soll man. Natürlich ist es hier egal, ob Axiom III verletzt ist oder nicht.



13.1. Lobatschewski-Funktion

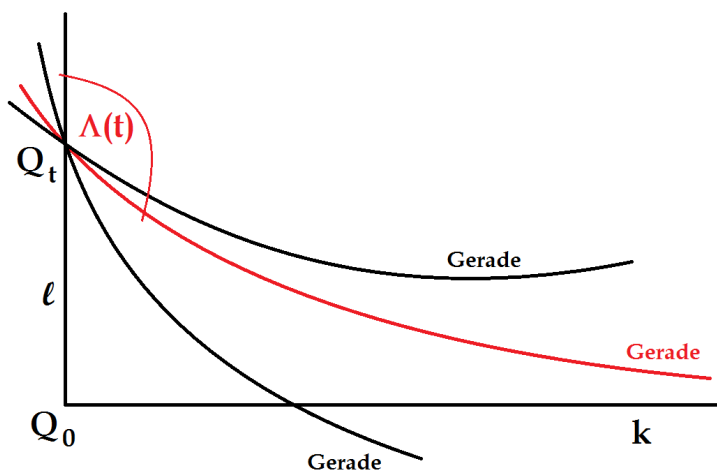
Gegeben: zwei orientierte Geraden k, ℓ in X mit Schnittpunkt Q_0 , senkrecht zueinander. Für $t \geq 0$ sei $Q_t \in \ell$ der eindeutige Punkt mit $d(Q_t, Q_0) = t$ und $Q_t \geq Q_0$ im Sinn der Orientierung von ℓ . Ebenso: für $s \geq 0$ sei $P_s \in k$ der eindeutige Punkt mit $d(P_s, Q_0) = s$ und $P_s \geq Q_0$ im Sinn der Orientierung von ℓ . Zum Beispiel ist $P_0 = Q_0$.

Für jede Gerade h durch Q_t nicht parallel zu ℓ haben wir eine Standardorientierung und daher den Winkel $w(h)$ zwischen dieser Geraden und ℓ . Wir erlauben jetzt nur Geraden h mit $w(h) \geq \pi/2$.



Dann ist $w(h)$ im Intervall $[\pi/2, \pi)$. Wenn $w(h) = \pi/2$, dann ist h senkrecht zu ℓ und daher parallel zu k (schon bekannt). Wenn $t > 0$ und $w(h) > \pi/2$, dann hat der Teil von h auf linker Seite von ℓ keinen Schnittpunkt mit k (weil sonst das Dreieck bestehend aus Q_t , Q_0 und diesem Schnittpunkt eine Winkelsumme $> \pi$ hätte). Das heisst, wenn es überhaupt ein Element in $h \cap k$ gibt, dann ist das ein P_s wie oben, $s > 0$.

Lemma 13.1.2. *Es existiert $\Lambda(t) \in [\pi/2, \pi)$ derart, dass eine Gerade h durch Q_t wie oben genau dann parallel zu k ist, also $h \cap k = \emptyset$, wenn $w(h) \leq \Lambda(t)$.*



Beweis. Der Fall $t = 0$ ist einigermaßen klar: $\Lambda(0) = \pi/2$. Sei jetzt also $t > 0$. Sei h_s die Gerade durch Q_t (fest) und P_s (eher variabel, $s > 0$). Die Abbildung

$$s \mapsto w(h_s)$$

ist injektiv (klar) und monoton fallend. (Dazu Bemerkung 13.0.1 benutzen.) Ausserdem hat diese Abbildung die Zwischenwerteigenschaft; es ist leichter, sich das direkt zu überlegen, statt erst die Stetigkeit zu beweisen. (Dazu ebenfalls Bemerkung 13.0.1 benutzen.) Damit ist klar, dass die Winkel $w(h_s)$ mit $s \in [0, \infty)$ ein offenes Intervall der Form (c, π) ausfüllen, wobei $c = \lim_{s \rightarrow \infty} w(h_s)$. Also setzen wir $\Lambda(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} w(h_s)$. \square

Damit ist die Lobatschewski-Funktion $\Lambda: [0, \infty) \rightarrow [\pi/2, \pi)$ definiert.

Proposition 13.1.3. *Gegeben $t > 0$ und $s > 0$. Sei h die orientierte Gerade durch Q_t mit Winkel $\Lambda(t)$ zu ℓ . Sei n die Senkrechte zu k durch $P_s \in k$. Dann ist $n \cap h \neq \emptyset$.*

Anders gesagt: das Bild von h unter senkrechter Projektion auf k enthält alle $P_s \in k$, mit $s > 0$.

Beweis. Sei B ein Punkt auf n , oberhalb von k , mit $d(B, P_s) = t = d(Q_t, Q_0)$. Die Gerade h' durch Q_t und B ist dann parallel zu k (kein Schnittpunkt mit k im Segment $[Q_t, B]$, weil Q_t und B zur selben Seite von k gehören; kein anderer Schnittpunkt mit k weil sonst gleich zwei wegen Symmetrie). Also macht h' einen Winkel $\leq \Lambda(t)$ mit ℓ . Dann folgt aber mit Bemerkung 13.0.1, dass h das Segment $[B, P_s]$ treffen muss. \square

Theorem 13.1.4. Gegeben $t > 0$. Sei h die orientierte Gerade durch Q_t mit Winkel $\Lambda(t)$ zu ℓ .

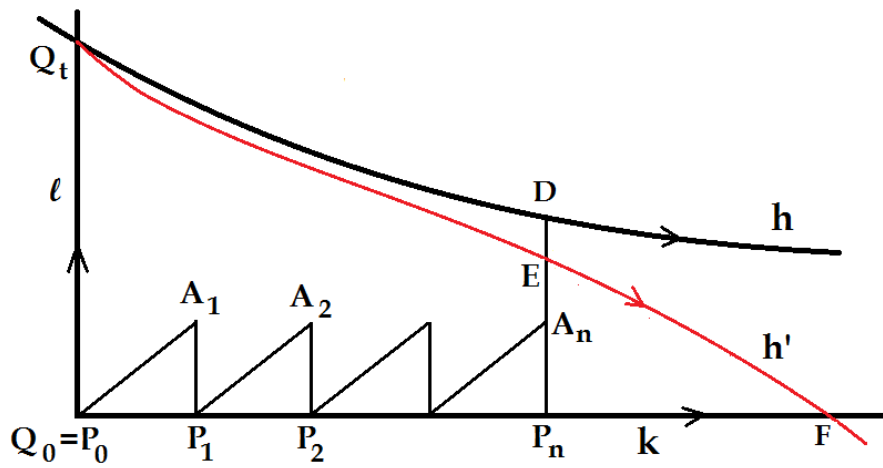
- (i) Die Funktion $h \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $B \mapsto d(B, B^k)$ ist stetig, injektiv und monoton fallend.
- (ii) $\lim_{B \in h, B \rightarrow +\infty} d(B, B^k) = 0$.

Beweis. Sei

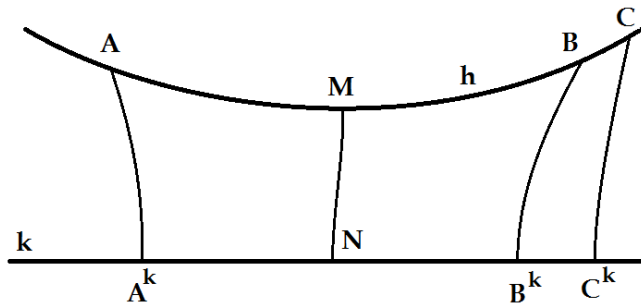
$$c = \inf_{B \in h, B \geq Q_t} d(B, B^k).$$

Auf der Suche nach Widerspruch nehmen wir an $c > 0$. Klar ist $c \leq t$. Wir bauen ein rechtwinkliges Dreieck $\Delta P_0 P_1 A_1$ mit $P_0 = Q_0$, $P_1 \in k$, gerne $d(P_0, P_1) = 1$, rechtem Winkel bei P_1 und Höhe $d(P_1, A_1) = c/2$. Wir vervielfältigen das, d.h. wir wählen eine grosse natürliche Zahl n und machen dann n kongruente Dreiecke $\Delta P_{j-1} P_j A_j$ mit einer Seite $[P_{j-1}, P_j]$ auf k , nebeneinander aufgereiht; $j = 1, 2, \dots, n$. (Bild unten.) Wegen Proposition 13.1.3 können wir $D \in h$ finden mit $D^k = P_n \in k$. Auf dem Segment $[D, D^k] = [D, P_n]$ können wir einen Punkt E wählen, der von D verschieden ist, aber trotzdem Abstand $< c/4$ zu einem Punkt von h hat. Sei h' die Gerade durch Q_t und E . Die Gerade h' hat keinen Schnittpunkt mit den Ecken oder Kanten der n kleinen Dreiecke, weil wegen Proposition 7.1.3 (Vorlesungsnotizen Woche 7) so ein Schnittpunkt einerseits Abstand $\leq c/2$ zu einem geeigneten Punkt von k hätte, andererseits Abstand $\leq c/4$ zu einem geeigneten Punkt von h . Das hätte eine gewisse Nähe zwischen h und k zur Folge, im Widerspruch zu unserer Definition von c . — Andererseits ist der Winkel, den h' mit ℓ macht, grösser als der Winkel $\Lambda(t)$, den h mit ℓ macht. Also muss h' einen Schnittpunkt F mit k haben (auf rechter Seite von ℓ) nach Definition von $\Lambda(t)$. Dann enthält das Dreieck $\Delta Q_0 Q_t F$ die n kleinen Dreiecke und hat daher einen Winkeldefekt¹, der mindestens n mal so gross ist wie der Winkeldefekt ε von $\Delta P_0 P_1 A_1$. Da n beliebig war, kann auch $n > \pi/\varepsilon$ gewählt werden. Dann ist der Winkeldefekt von $\Delta Q_0 Q_t F$ grösser als π , was unmöglich ist. Damit haben wir unseren Widerspruch. Also $c = 0$.

¹Dieses Argument müsste ein bisschen formalisiert werden. Man sollte dazu das grosse Dreieck $\Delta Q_0 Q_t F$ in viele kleinere Dreiecke aufteilen, unter denen sich auch die n kleinen Dreiecke $\Delta P_{j-1} P_j A_j$ befinden. In der Zeichnung ist das nicht durchgeführt worden.



Weiter mit dem Beweis: Jetzt kehren wir zu (i) zurück und zeigen Injektivität. Auf der Suche nach Widerspruch nehmen wir an, dass es verschiedene $A, B \in h$ gibt mit $d(A, A^k) = d(B, B^k)$. Sei M der Mittelpunkt von $[A, B]$ und $N = M^k$. Spiegelung an der Geraden durch M und N vertauscht A und B . Diese Gerade ist daher senkrecht zu h (auch zu k , nach Definition von M^k). Wegen Saccheri-Ungleichung (Bild) ist dann $d(C, C^k) \geq d(M, N)$ für jedes $C \in k$. Das widerspricht aber der Aussage $\inf_{C \in h} d(C, C^k) = 0$, die wir schon bewiesen haben; wir haben sogar eine etwas stärkere Aussage bewiesen.



Stetigkeit in (i): für $A, B \in h$ ist wegen Dreiecksungleichung

$$|d(A, A^k) - d(B, B^k)| \leq d(A, B) + d(A^k, B^k) \leq 2d(A, B)$$

wobei die zweite Ungleichung ein Spezialfall der Saccheri-Ungleichung ist. Stetigkeit bewiesen.

Wenn $B \mapsto d(B, B^k)$ schon stetig und injektiv ist, dann entweder monoton wachsend oder monoton fallend. Monoton wachsend kommt aber nicht in Frage, weil dann $c = t > 0$ wäre. Also monoton fallend.

Weil wir jetzt wissen, dass die Funktion $B \mapsto d(B, B^k)$ monoton fallend ist, folgt aus $\inf_{B \in \mathfrak{h}} d(B, B^k) = 0$, dass auch der Limes von $d(B, B^k)$ für $B \in \mathfrak{h}$, $B \rightarrow +\infty$ gleich Null ist. \square

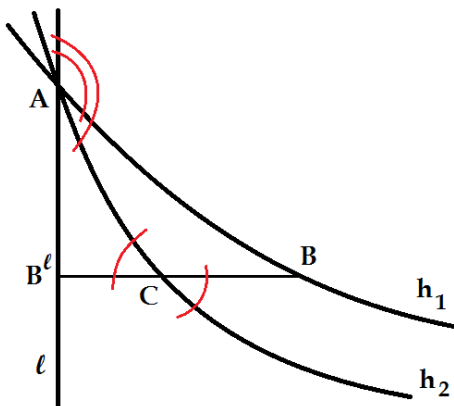
13.2. Die Inverse der Lobatschewski-Funktion

Definition 13.2.5. Für $s \in [\pi/2, \pi)$ sei $\Phi(s) \in [0, \infty)$ wie folgt definiert. Wir wählen feste orientierte Gerade ℓ und $A \in \ell$; damit hat ℓ auch eine Standardparameterisierung². Sei \mathfrak{h} eine andere orientierte Gerade durch A , die mit ℓ den Winkel s macht. In der Standardparameterisierung von ℓ ist $p_\ell(\mathfrak{h})$ ein beschränktes offenes Intervall $(-t, t)$. (Siehe Lemma 12.1.5, Vorlesungsnotizen Woche 12.) Wir setzen $\Phi(s) = t$.

Man kann auch sagen: $t = \Phi(s)$ ist die halbe Länge des offenen Intervalls $p_\ell(\mathfrak{h})$, wobei die orientierte Gerade \mathfrak{h} durch A geht und einen Winkel s mit ℓ macht.

Lemma 13.2.6. Φ ist strikt wachsend: $s_1 < s_2 \Rightarrow \Phi(s_1) < \Phi(s_2)$.

Beweis. Mit den Bezeichnungen von Definition 13.2.5: gegebene Gerade ℓ , Punkt $A \in \ell$ und die beiden Geraden \mathfrak{h}_1 und \mathfrak{h}_2 durch A , die die Winkel s_1 und s_2 mit ℓ machen. (Siehe Bild. Wir reden von stumpfen Winkeln.) Wähle $B \in \mathfrak{h}_1$. Das Segment $[B, B^\ell]$ muss \mathfrak{h}_2 treffen (Bemerkung 13.0.1 ... wegen Annahme $s_1 < s_2$). Sei $C \in \mathfrak{h}_2$ der Schnittpunkt. Dann ist $C^\ell = B^\ell$. Weil $B \in \mathfrak{h}_1$ beliebig war, ist damit gezeigt $p_\ell(\mathfrak{h}_1) \subset p_\ell(\mathfrak{h}_2)$ und $\Phi(s_1) \leq \Phi(s_2)$.



In diesem Argument kann man den Winkel zwischen $[B, B^\ell]$ und \mathfrak{h}_2 (wie eingezeichnet) abschätzen: er ist $< \pi/2$ wegen Winkelsumme $< \pi$ im Dreieck

²D.h. wir haben eine Standardwahl von abstandserhaltender Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ mit $\text{bild}(f) = \ell$. Nämlich orientierungserhaltend und so, dass $f(0) = A$.

$\Delta CB^{\ell}A$. Das hat zur Folge (Aufgabe 4 von Übungsblatt 10), dass C im Segment zwischen A und der senkrechten Projektion von B auf h_2 liegt. Damit ist C selbst auch die senkrechte Projektion auf h_2 von irgendeinem Element auf h_1 , das man im Segment $[A, B]$ suchen sollte. (Vergleiche Lemma 7.1.2, Vorlesungsnotizen Woche 7.) Wir wählen jetzt $P \in h_2$ *nicht* von der Form *senkrechte Projektion eines Elementes von h_1 auf h_2* . Das geht wegen Lemma 12.1.5, Vorlesungsnotizen Woche 12. Die Gerade durch P und P^{ℓ} , auch bekannt als die Senkrechte zu ℓ durch P^{ℓ} , schneidet also h_1 nicht. Demnach ist $P^{\ell} \in p_{\ell}(h_2)$, klarer Fall, aber $P^{\ell} \notin p_{\ell}(h_1)$. Also ist $p_{\ell}(h_1) \neq p_{\ell}(h_2)$. Also $\Phi(s_1) < \Phi(s_2)$. \square

Lemma 13.2.7. $\Lambda \circ \Phi = \text{id}$.

Beweis. Ist eigentlich klar. Wir brauchen hier Bild mit ℓ und $k \perp \ell$, Schnittpunkt Q_0 . Gegeben $s \in [\pi/2, \pi)$. Sei $t = \Phi(s)$. Wir machen Gerade h_1 mit Winkel s zu ℓ durch den Punkt $A = Q_t$. Das Bild von h_1 unter senkrechter Projektion auf ℓ ist ein offenes Intervall der Länge $2t$ mit Mittelpunkt Q^t , enthält also Q_0 gerade nicht. Andererseits: wenn wir eine andere Gerade h_2 durch Q_t mit Winkel $> s$ zu ℓ machen, dann ist das Bild von h_2 unter senkrechter Projektion auf ℓ ein grösseres Intervall ... das also Q_0 enthält. Das bedeutet, dass h_2 einen Schnittpunkt mit k hat. Damit erfüllt s die Bedingungen, mit denen wir $\Lambda(t)$ charakterisiert haben. Also ist $s = \Lambda(t)$. \square

Lemma 13.2.8. $\Phi \circ \Lambda = \text{id}$.

Beweis. Ziemlich klar wegen Theorem 13.1.4. Genauer: sei h die Gerade durch Q_t mit Winkel $\Lambda(t)$ zu ℓ , wie im Beweis von Theorem 13.1.4. Da h keinen Punkt mit k gemeinsam hat, ist schon klar, dass $p_{\ell}(h)$, Bild von h unter der senkrechten Projektion auf ℓ , den Punkt Q_0 nicht enthält. Andererseits folgt aus der Aussage von Theorem 13.1.4 zusammen mit Saccheri-Ungleichung, dass für jedes $\varepsilon > 0$ Elemente von $p_{\ell}(h)$ existieren, deren Abstand von Q_0 kleiner als ε ist. Ausserdem ist klar, dass Q_t der Mittelpunkt des Intervalls $p_{\ell}(h)$ ist. Also hat dieses Intervall Länge $2t$. \square

13.3. Asymptotische Geraden

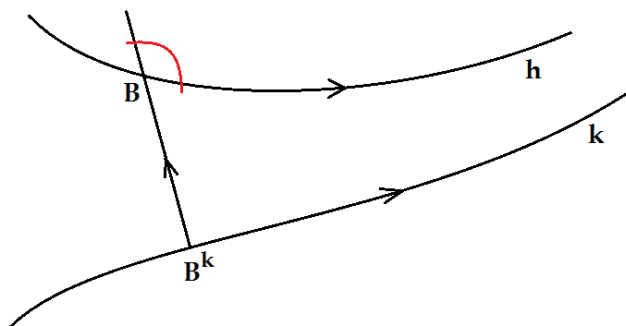
Es wird weiter angenommen, dass der metrische Raum X die Axiome I und II erfüllt, aber III verletzt.

Gegeben zwei orientierte Geraden k und h in X , die einander nicht schneiden. Senkrechte Projektion p_k auf k gibt eine injektive monotone Abbildung $h \rightarrow k$ wegen Lemma 7.1.2, Vorlesungsnotizen Woche 7. Wir nehmen an, dass diese Orientierungserhaltend ist (also $A < B$ in h hat zur Folge

$p_k(A) < p_k(B) \in k$. Dazu könnte man sagen, dass h *orientiert parallel* zu k ist.³

Für $B \in h$ sei dann

- $t_B := d(B, B^k)$;
- s_B der Winkel zwischen h und der Geraden durch B^k und B (letztere Gerade so orientiert, dass $B^k < B$).



Proposition 13.3.9. *Mit diesen Bezeichnungen sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- Es gibt ein $B \in h$, so dass $s_B = \Lambda(t_B)$.*
- Für alle $B \in h$ ist $s_B = \Lambda(t_B)$.*
- Es gibt eine orientierungserhaltende Isometrie $f: k \rightarrow h$ derart, dass*

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} d(B, f(B)) = 0$$

Bevor wir das beweisen, soll es etwas beleuchtet werden. Bei (i) sollte man in Gedanken auch die orientierte Gerade ℓ durch B und B^k sehen. Dann versteht man, dass h unter den orientierten Geraden, die durch B gehen und parallel zu k sind, diejenige ist, die den grössten Winkel mit ℓ macht. Das ist nämlich die Übersetzung von $s_B = \Lambda(t_B)$.

Die Aussage (i) \Leftrightarrow (ii) bedeutet also, dass ein h , dass diese Schmiege-Eigenschaft für ein $B \in h$ hat, sie auch für alle anderen Punkte von h hat. Das ist vielleicht nicht weiter überraschend.

Die Formulierung (iii) ist sehr wertvoll, weil sie eine ganze Menge Neues andeutet. Zum Beispiel deutet sie an, dass wir da eine Äquivalenzrelation vor uns haben. Und sie führt uns auch zur Definition von *Horozykel*.

³Aber Vorsicht: *orientiert parallel* ist keine Äquivalenzrelation, weil schon *parallel* keine Äquivalenzrelation sein muss, wie wir am Beispiel $X = \mathbb{H}$ gesehen haben. Ich habe auch nicht bewiesen oder behauptet, dass diese Relation symmetrisch ist. Das heisst, ich habe nicht bewiesen, dass k orientiert parallel zu h ist, wenn h orientiert parallel zu k ist.

Beweis von (i) \Rightarrow (iii). Sei p_h die senkrechte Projektion auf h . Für $t \in \mathbb{R}$ sei $a_t: k \rightarrow k$ die (abstandserhaltende) Abbildung gegeben durch Verschieben um den Betrag t nach rechts; das heisst $d(C, a_t(C)) = |t|$ und $a_t(C) \geq C$ falls $t \geq 0$, wohingegen $a_t(C) \leq C$ falls $t \leq 0$. Ebenso sei $b_t: h \rightarrow h$ die Abbildung gegeben durch Verschieben um den Betrag t nach rechts.

Wir brauchen eine Abschätzung für $d(p_h a_t(C), b_t p_h(C))$ bei positivem t . (Ich lasse hier viele \circ -Zeichen weg.) Wegen Saccheri-Ungleichung ist

$$d(p_h(C), p_h a_t(C)) \leq d(C, a_t(C)) = t.$$

Wegen Dreiecksungleichung ist aber auch

$$\begin{aligned} d(p_h(C), p_h a_t(C)) &\geq d(C, a_t(C)) - d(C, p_h(C)) - d(a_t(C), p_h a_t(C)) \\ &= t - d(C, p_h(C)) - d(a_t(C), p_h a_t(C)) \\ &\geq t - 2d(C, p_h(C)). \end{aligned}$$

Also sehen wir, dass $2d(C, p_h(C)) \leq d(p_h(C), p_h a_t(C)) \leq t$. Weil nun $b_t p_h(C)$ genau den Abstand t von $p_h(C)$ hat und rechts von $p_h(C)$ ist, wie $p_h a_t(C)$, und alle drei zu h gehören, können wir schliessen

$$d(p_h a_t(C), b_t p_h(C)) \leq 2d(C, p_h(C)).$$

Das ist die Abschätzung.

Jetzt sei $f_t: k \rightarrow h$ für $t \geq 0$ definiert als $b_{-t} p_h a_t$. Wir versuchen es mit

$$f(C) := \lim_{t \rightarrow +\infty} f_t(C)$$

für beliebiges $C \in k$. Erstmal muss gezeigt werden, dass dieser Grenzwert (bei festem $C \in k$) existiert. Dazu sollten wir den Abstand $d(f_s(C), f_{s+t}(C))$ anschauen (grosses $s \geq 0$ und beliebiges $t \geq 0$):

$$\begin{aligned} d(f_s(C), f_{s+t}(C)) &= d(b_{s+t} f_s(C), b_{s+t} f_{s+t}(C)) \\ &= d(b_t p_h a_s(C), p_h a_t a_s(C)) \\ &\leq 2d(a_s(C), p_h a_s(C)). \end{aligned}$$

Da wir schon wissen, dass $d(a_s(C), p_h a_s(C))$ gegen Null geht mit $s \rightarrow \infty$, sind wir fertig.

Es muss aber noch gezeigt werden, dass f abstandserhaltend ist. Für feste $B, C \in k$ und $t \geq 0$ betrachten wir

$$d(f_t(B), f_t(C)) = d(b_t f_t(B), b_t f_t(C)) = d(p_h a_t(B), p_h a_t(C)).$$

Wegen Saccheri ist das $\leq d(a_t(B), a_t(C)) = d(B, C)$, und wegen Dreiecksungleichung ist es

$$\begin{aligned} &\geq d(a_t(B), a_t(C)) - d(a_t(B), p_h a_t(B)) - d(a_t(C), p_h a_t(C)) \\ &= d(B, C) - (d(a_t(B), p_h a_t(B)) + d(a_t(C), p_h a_t(C))). \end{aligned}$$

Da wir schon wissen, dass $d(\mathbf{a}_t(\mathbf{B}), \mathbf{p}_h \mathbf{a}_t(\mathbf{B}))$ und $d(\mathbf{a}_t(\mathbf{C}), \mathbf{p}_h \mathbf{a}_t(\mathbf{C}))$ gegen Null gehen mit $t \rightarrow +\infty$, folgt daraus

$$d(f(\mathbf{B}), f(\mathbf{C})) = \lim_t d(f_t(\mathbf{B}), f_t(\mathbf{C})) = d(\mathbf{B}, \mathbf{C}).$$

Beweis von (iii) \Rightarrow (ii). ...

Beweis von (ii) \Rightarrow (i): klar. □

Bemerkung 13.3.10. Die Abbildung $f: \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{h}$ in (iii) mit den genannten Eigenschaften ist eindeutig. Denn wenn wir zwei solche hätten, etwa f und g , dann wäre $f^{-1} \circ g: \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}$ eine abstandserhaltende und orientierungserhaltende Abbildung. Dann ist $d(f^{-1}(g(\mathbf{B})), \mathbf{B})$ konstant, also unabhängig von \mathbf{B} . Weil ausserdem

$$\lim_{\mathbf{B} \rightarrow +\infty} d(f^{-1}(g(\mathbf{B})), \mathbf{B}) = 0$$

ist, folgt, dass $d(f^{-1}(g(\mathbf{B})), \mathbf{B}) = 0$ für alle $\mathbf{B} \in \mathbf{k}$.

Definition 13.3.11. Wenn die Bedingungen in Proposition 13.3.9 erfüllt sind, dann sagt man, dass die orientierten Geraden \mathbf{h} und \mathbf{k} *asymptotisch parallel* sind. — Aus der Formulierung (iii) kann man sofort sehen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation auf der Menge der orientierten Geraden in \mathbf{X} handelt. Die Äquivalenzklassen heissen *Richtungen*.