15.01.2016

Vorlesungsnotizen Woche 11
Nichteuklidische Geometrie, WS 2015-2016 (Weiss)

In diesem Kapitel arbeiten wir mit einem metrischen Raum X, der die Axiome I, II und jetzt auch III erfüllt. Ziel ist es, zu zeigen, dass es eine Isometrie von X nach $\mathbb{E}$ (euklidische Ebene) gibt. Die Resultate zu den Themen Kreise, Winkel und Bogenlänge vom vorigen Kapitel (Wochen 9 und 10) spielen dabei keine grosse Rolle; davon bin ich selber etwas überrascht. (Wir werden sie aber in den nächsten Kapiteln noch sehr brauchen. Wenn überhaupt noch Zeit für weitere Kapitel bleibt.)

Strategisch gesprochen hat die Argumentation zwei grössere Teile. Nach Vorbereitungen (Abschnitte 11.1 und 11.2) wird im ersten Teil (in den Abschnitten 11.3 und 11.4) gezeigt, dass es eine Isometrie von X nach T gibt, wobei T ein normierter reeller Vektorraum ist — mit der Metrik, die durch die Norm bestimmt wird. Im zweiten Teil (Abschnitt 11.5) wird gezeigt: Wenn X ein normierter reeller Vektorraum ist, der als metrischer Raum die Axiome I und II erfüllt, dann hat X als reeller Vektorraum die Dimension 2 und die Norm N ist eine euklidische Norm. Das bedeutet

$$N(v) = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}$$

für beliebiges $v \in X$, wobei $v = v_1 e(1) + v_2 e(2)$ mit einer geeigneten Vektorrraumbasis für X bestehend aus Vektoren $e(1)$ und $e(2) \in X$.

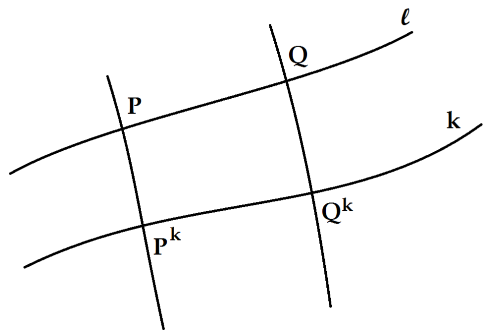
11.1. Erste Konsequenzen aus Axiom III

Proposition 11.1.1. *Die Relation* parallel *ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Angenommen keine Äquivalenzrelation; dann nicht transitiv. Also gibt es verschiedene Geraden k, ℓ, m mit k parallel zu ℓ und k parallel zu m, aber ℓ nicht parallel zu m. Dann haben ℓ und m einen Schnittpunkt. Durch diesen Schnittpunkt gehen also zwei verschiedene Geraden, die beide parallel zu k sind. Widerspruch zu Axiom III. □

Lemma 11.1.2. *Gegeben verschiedene Geraden k und ℓ, die parallel sind. Sei $P, Q \in \ell$. Dann ist*

(i) *die Gerade durch P und P^k senkrecht zu ℓ (und sowieso zu k);*
(ii) *die Gerade durch Q und Q^k senkrecht zu ℓ (und sowieso zu k);*
(iii) $d(P^k, Q^k) = d(P, Q)$*;*
(iv) $d(P^k, P) = d(Q^k, Q)$.



Beweis. (i) und (ii): Die Senkrechte durch P zur Geraden durch P und P^k ist, wie wir schon wissen, eine Gerade, die parallel zu k ist (und durch P geht). Wegen Axiom III muss sie dann mit ℓ übereinstimmen.

(iii) Wegen Saccheri-Ungleichung haben wir $d(P^k, Q^k) \leq d(P, Q)$. Wegen (i) und (ii) haben wir aber auch $P = (P^k)^\ell$ und $Q = (Q^k)^\ell$. Also folgt wieder mit Saccheri $d(P, Q) \leq d(P^k, Q^k)$.

(iv) Hier sollte man Namen für die Geraden durch P, P^k bzw Q, Q^k einführen, zum Beispiel m und n. Dann $P^k = (Q^k)^m$ und $P = Q^m$, also $d(P^k, P) \leq d(Q^k, Q)$ wegen Saccheri. Ungleichung $d(Q^k, Q) \leq d(P^k, P)$ genauso. □

Korollar 11.1.3. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 11.1.2 ist die Abbildung $\ell \to k$ gegeben durch $P \mapsto P^k$ für $P \in \ell$ eine Isometrie (wobei k, ℓ mit Unterraum-Metriken ausgestattet).* □

Definition 11.1.4. Zwei orientierte Geraden k, ℓ heissen *orientiert parallel*, wenn parallel und wenn die Isometrie aus Korollar 11.1.3 die Orientierungen erhält.

Lemma 11.1.5. Orientiert parallel *ist eine Äquivalenzrelation. (Die Äquivalenzklassen heissen ... wahrscheinlich ...* Richtungen.*)* □

11.2. Wirkung der Isometriegruppe auf Menge der Richtungen

Sei $\mathcal{R}$ die Menge der Richtungen. Sei $Q \in X$ fest gewählt und sei $\mathcal{S}$ der Kreis um Q mit Radius r, wie in Vorlesungsnotizen Woche 9 und 10 (also $r > 0$ auch fest gewählt, klein genug).

Lemma 11.2.6. *Die Abbildung $u \colon \mathcal{S} \to \mathcal{R}$, die jedem $P \in \mathcal{S}$ die Gerade durch Q und P zuordnet (so orientiert, dass $Q < P$), ist eine Bijektion.*

Beweis. Injektion: wenn $u(P_1) = u(P_2)$, dann ist Gerade durch Q und P_1 parallel zu Gerade durch Q und P_2, also sind diese Geraden gleich (Name k).

Da k nur höchstens zwei Schnittpunkte mit $\mathcal{S}$ hat, ist entweder $P_1 = P_2$ oder $Q \in [P_1, P_2]$. Im zweiten Fall finden wir aber, dass P_1 und P_2 verschiedene Orientierungen auf k bestimmen, Widerspruch zu $u(P_1) = u(P_2)$.

Surjektion: Zu jeder Geraden k in X gibt es eine dazu parallele Gerade ℓ, die durch Q geht. Zu ℓ gehören zwei Schnittpunkte mit $\mathcal{S}$, etwa P_1 und P_2. Wenn k auch noch orientiert ist, dann ist entweder $u(P_1)$ oder $u(P_2)$ orientiert parallel zu k. □

Sei $G = \text{isom}(X)$. Wir haben jetzt eine Wirkung von G auf $\mathcal{R}$. (Isometrie $\sigma\colon X \to X$ kann losgelassen werden auf Richtung, d.h. Äquivalenzklasse von orientierten Geraden unter der Relation *orientiert parallel* ... dazu sollte man Repräsentanten wählen usw.).

Definition 11.2.7. Eine Isometrie $\psi\colon X \to X$ heisst *Translation*, wenn sie trivial wirkt auf der Menge $\mathcal{R}$ der Richtungen ... das heisst, für jede orientierte Gerade k ist die orientierte Gerade $\psi(k)$ orientiert parallel zu k.

Bemerkung 11.2.8. Wirkung von G auf $\mathcal{R}$ bedeutet, dass wir einen Homomorphismus von G nach symmetrischer Gruppe $\Sigma_{\mathcal{R}}$ haben. Die Translationen sind genau die Elemente von G, die zum Kern dieses Homomorphismus gehören. Also bilden die Translationen eine *normale Untergruppe* T von G.

Theorem 11.2.9. *Zu beliebigen* $P, Q \in X$ *existiert genau eine Translation* $\psi\colon X \to X$, *die* $\psi(Q) = P$ *erfüllt.*

Beweis. Sei M der Mittelpunkt vom Segment $[Q, P]$. Wir versuchen es mit $\psi = \tau_P\tau_M = \tau_P \circ \tau_M$, wobei τ_M die Punktspiegelung an M ist (*half-turn* bei Iversen) und τ_P die Punktspiegelung an P. Dann ist $\tau_M(Q) = P$ und $\tau_P(P) = P$, also $\psi(Q) = P$ wie erhofft.

Ausserdem: für eine Gerade k und irgendeine Punktspiegelung τ ist $\tau(k)$ parallel zu k. (Kleine Übungsaufgabe. Gedanke: wenn da ein Schnittpunkt $C \in k \cap \tau(k)$ ist, dann auch $\tau(C) \in k \cap \tau(k)$.) Allerdings, wenn k orientiert ist, dann hat $\tau(k)$, obwohl parallel zu k, die falsche Orientierung. Also wissen wir, wie τ auf $\mathcal{R}$ wirkt: ersetzt jede Richtung durch die Entgegengesetzte (gleiche Gerade mit der anderen Orientierung). Also: eine Hintereinanderausführung von zwei Punktspiegelungen (gerne an verschiedenen Punkten) ist eine Translation. Speziell: $\psi = \tau_P\tau_M$ ist damit eine Translation. Damit ist der Existenzteil vom Beweis abgehakt.

Eindeutigkeit: Wenn es Kandidaten ψ_1 und ψ_2 gibt, dann ist

$$\varphi := \psi_1^{-1}\psi_2$$

eine Translation, die $\varphi(Q) = Q$ erfüllt, also $\varphi \in T \cap G_Q$. Weil φ Translation, wirkt es trivial auf $\mathcal{R}$ und damit auch trivial auf $\mathcal{S}$ (grob gesprochen wegen Lemma 11.2.6; wir benutzen hier die Bijektion u, um $\mathcal{R}$ mit $\mathcal{S}$ zu verwechseln). Es ist leicht, zwei Punkte P_1 und P_2 in $\mathcal{S}$ zu finden, so dass P_1, P_2 und Q nicht auf einer Geraden liegen. Da φ diese drei festlässt (jeden für sich), ist es die Identität. $\square$

Lemma 11.2.10. *Sei* ψ *eine Translation,* $\psi(Q) = P$*, wobei* $Q \neq P$*. Sei* k *die Gerade durch* Q *und* P*. Dann ist* $\psi(k) = k$*.*

Beweis. $\psi(k)$ ist parallel zu k nach Voraussetzung an ψ. Sowohl k als auch $\psi(k)$ enthalten den Punkt P. Also $k = \psi(k)$. $\square$

11.3. Mehr über die Gruppe der Translationen

Theorem 11.3.11. *Die Untergruppe* $T \subset G$ *ist kommutativ.*

Beweis. Wir wählen ein festes $Q \in X$. Sei $\psi \in T$ und sei $\tau \in G_Q$ die Punktspiegelung am Punkt Q. Wir wollen zuerst zeigen:

$$\tau\psi\tau^{-1} = \psi^{-1}.$$

Dazu sei $P = \psi(Q)$. Dann ist $\tau\psi\tau^{-1}(Q) = \tau(\psi(Q)) = \tau(P)$. Also ist $\tau\psi\tau^{-1}$ die eindeutige Translation, die Q auf $\tau(P)$ abbildet. (Hier wird auch Bemerkung 11.2.8 benutzt.) Wenn wir zeigen können, dass ψ^{-1} ebenfalls Q auf $\tau(P)$ abbildet, dann haben wir gewonnen. Das ist aber ziemlich klar, weil die Einschränkung von ψ auf k als eine Isometrie von k nach k aufgefasst werden kann wegen Lemma 11.2.10. Wir verstehen diese Einschränkung gut genug, weil wir wissen, dass sie orientierungserhaltend ist und Q auf P abbildet.

Jetzt weiter: die Formel $\tau\psi\tau^{-1} = \psi^{-1}$ zeigt, dass die Abbildung $\psi \mapsto \psi^{-1}$ ein Homomorphismus ist, denn die Abbildung $\psi \mapsto \tau\psi\tau^{-1}$ ist ein Homomorphismus. Wenn aber $\psi \mapsto \psi^{-1}$ ein Homomorphismus (von T nach T) ist, dann ist T kommutativ. $\square$

Korollar 11.3.12. *Für* $\psi, \tau \in T$ *und* $A, B \in X$ *ist*

$$d(\psi(A), \tau(A)) = d(\psi(B), \tau(B)),$$

das heisst, $d(\psi(A), \tau(A))$ *hängt nur von* $\psi, \tau \in T$ *ab, dagegen nicht von* $A \in X$*.*

Beweis. Sei $\lambda\colon X \to X$ die eindeutige Translation mit $\lambda(A) = B$. Weil λ eine Isometrie ist, erhalten wir $d(\psi(A), \tau(A)) = d(\lambda(\psi(A)), \lambda(\tau(A)))$, und da $\lambda\tau = \tau\lambda$ und $\lambda\psi = \psi\lambda$, ist dieser Ausdruck gleich $d(\psi(\lambda(A)), \tau(\lambda(A))) = d(\psi(B), \tau(B))$. $\square$

Definition 11.3.13. Wir benutzen das Korollar, um eine Metrik auf T zu definieren wie folgt: $d_T(\psi, \tau) := d_X(\psi(A), \tau(A))$ für irgendein $A \in X$. (Es ist dabei egal, welches $A \in X$ genommen wird.) Die Bedingungen für eine Metrik sind erfüllt.

Definition 11.3.14. Wir wählen (oder haben vielleicht schon gewählt) eine festes $Q \in X$ und haben damit eine Abbildung $F\colon T \to X$ durch $F(\psi) = \psi(Q) \in X$, für $\psi \in T$.

Lemma 11.3.15. *Diese Abbildung F ist eine Isometrie von metrischen Räumen, das heisst, von T mit Metrik d_T wie in Definition 11.3.13 nach X mit Metrik $d = d_X$.*

Beweis. Die Abbildung ist bijektiv wegen Theorem 11.2.9. Isometrie ist eigentlich klar wegen Definition von d_T. □

Auf T haben wir die Struktur einer kommutativen Gruppe wegen Theorem 11.3.11. Man kann sich vorstellen, dass so etwas wie eine Verträglichkeit zwischen der Gruppenstruktur auf T und der Metrik auf T besteht. Das ist richtig.

Proposition 11.3.16. *Für $\psi, \tau \in T$ gilt*

$$d_T(\psi, \tau) = d_T(\tau^{-1} \circ \psi, \mathrm{id}).$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ und $\psi, \tau \in T$ gilt $d_T(\psi^n, \tau^n) = |n| d_T(\psi, \tau)$.

Beweis. Für beliebiges $A \in X$ ist

$$d_T(\psi, \tau) = d_X(\psi(A), \tau(A)) = d_X(\tau^{-1}\psi(A)), \tau^{-1}(\tau(A))) = d_T(\tau^{-1} \circ \psi, \mathrm{id}).$$

Das beweist die erste Behauptung. Wir benutzen das, um zu bemerken

$$d_T(\psi^n, \tau^n) = d_T(\tau^{-n} \circ \psi^n, \mathrm{id}) = d_T((\tau^{-1} \circ \psi)^n, \mathrm{id}),$$

wobei wir für das zweite Gleichheitszeichen die Kommutativität benutzt haben (Theorem 11.3.11). Deswegen führen wir ein $\sigma := \tau^{-1}\psi$ und müssen dann nur noch zeigen

$$d_T(\sigma^n, \mathrm{id}) = |n| d_T(\sigma, \mathrm{id}).$$

Dazu können wir annehmen $\sigma \neq \mathrm{id}$. Sei k die Gerade durch A und $\sigma(A)$, mit irgendeiner Orientierung. Wegen Lemma 11.2.10 haben wir $\sigma(k) = k \subset X$. Das heisst, σ schränkt ein zu einer Isometrie von k nach k, die orientierungserhaltend ist, Definition 11.2.7. Damit wird klar, dass

$$d_X(A, \sigma^n(A)) = |n| d_X(A, \sigma(A)),$$

weil wir hier eigentlich X durch den Unterraum k ersetzen können (und dann noch k durch $\mathbb{R}$). □

11.4. Vektorraumstruktur und Norm

Wir haben schon gesehen, dass die Gruppe T kommutativ ist. Von jetzt an soll diese Gruppenstruktur auch *kommutativ geschrieben* werden: das heisst, wir schreiben $\psi + \varphi$ für das, was bis jetzt $\psi\varphi$ hiess, 0 für das neutrale

Element (das vorher id hiess), und $-\psi$ statt ψ^{-1}. Ausserdem schreiben wir auch $n\psi$ für das, was bisher ψ^n geschrieben wurde, wobei $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 11.4.17. *Die kommutative Gruppenstruktur auf* T *lässt sich verfeinern zu einer Struktur von reellem Vektorraum. Ausserdem kommt die Metrik* d_T *von einer Norm* N *auf diesem Vektorraum, so dass* $d_T(\psi, \tau) = d_T(\psi - \tau, 0) = N(\psi - \tau)$ *für alle* $\psi, \tau \in T$.

Bemerkung 11.4.18. Definition von *Norm* auf reellem Vektorraum: Sie kennen das wahrscheinlich aus den Analysisvorlesungen. Eine Norm auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $N\colon V \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $N(v) \geq 0$ für alle $v \in V$ und $N(v) = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.
- $N(cv) = |c| N(v)$ für $v \in V$ und $c \in \mathbb{R}$.
- $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ für alle $v, w \in V$.

Es ist dann üblich, so etwas wie $\|v\|$ statt $N(v)$ zu schreiben (aber manchmal ist es auch ein bisschen gefährlich).

Beispiele: $V = \mathbb{R}^2$ und $N(v) = \max\{|v_1|, |v_2|\}$ oder $N(v) = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}$ oder $N(v) = |v_1| + |v_2|$.

Eine Norm N auf einem reellen Vektorraum V bestimmt eine Metrik auf V durch $d_V(x, y) := N(y - x)$. Es ist leicht, die Bedingungen für eine Metrik nachzuweisen.

Umgekehrt: sei d eine Metrik auf einem reellen Vektorraum V. Wie können wir sehen, ob sie zu einer Norm auf V gehört? Sie muss dazu erfüllen

$$d(x, y) = d(x + z, y + z)$$

für alle $x, y, z \in V$ und

$$d(cx, cy) = |c| d(x, y)$$

für alle $x, y \in V$ und $c \in \mathbb{R}$. Das genügt; dann können wir die zugehörige Norm definieren durch $N(x) = d(0, x)$.

Bemerkung 11.4.19. Sei H irgendeine kommutative Gruppe. Wir benutzen additive Schreibweise, also $a + b$ statt wie sonst ab für $a, b \in H$, und 0 statt wie sonst 1, und $-a$ statt a^{-1} für $a \in H$, und na statt a^n für $a \in H$ und $n \in \mathbb{Z}$. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ haben wir dann einen Homomorphismus

$$g_n\colon H \to H$$

definiert durch $g_n(a) = na$.

Jetzt soll angenommen werden, dass dieser Homomorphismus g_n bijektiv ist, und zwar für jede strikt positive ganze Zahl n. (Dann ist g_n auch bijektiv für strikt negatives n.) *Dann hat die Gruppe* H *automatisch die Struktur eines Vektorraums über dem Körper* $\mathbb{Q}$ *der rationalen Zahlen.* Das geht ungefähr so. Sei $c = p/q \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, gerne $q > 0$. Skalarmultiplikation mit c müsste dasselbe sein wie: Skalarmultiplikation mit p gefolgt von Skalarmultiplikation mit q^{-1}, und das ist

$$(g_q)^{-1} \circ g_p \ .$$

Da wir vorausgesetzt haben, dass g_q bijektiv ist, ist das kein Problem und wir haben auch garkeine Wahl.

Bemerkung 11.4.20. Fortsetzung der letzten Bemerkung: Sei H ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$. Angenommen, H ist ausgerüstet mit einer *Norm* $N\colon H \to \mathbb{R}$; das heisst, es soll gelten $N(x) \geq 0$ für alle $x \in H$, $N(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ für alle $x, y \in H$ und $N(cx) = |c|N(x)$ für $c \in \mathbb{Q}$ und $x \in H$. Die Norm bestimmt in der üblichen Weise eine Metrik,

$$d_H(x, y) = N(y - x).$$

Jetzt nehmen wir noch zusätzlich an: für jede Folge von rationalen Zahlen $(c_n)_{n=0,1,2,\dots}$, die in $\mathbb{R}$ konvergiert, gegen eine reelle Zahl c, und jedes $x \in H$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} c_n x \ .$$

Hier reden wir von Konvergenz im metrischen Raum H mit Metrik d_H wie oben definiert. *Dann können wir definieren*

$$cx := \lim_{n\to\infty} c_n x$$

für $x \in H$ *und* $c = \lim_n \ c_n \in \mathbb{R}$*, und damit wird* H *zu einem Vektorraum über* $\mathbb{R}$*, und* N *wird eine Norm im reellen Vektorraum-Sinn.* Wir müssen das natürlich ein bisschen rechtfertigen.

Erstens. Unsere Definition von cx ist un-zweideutig (wohldefiniert). Denn wenn wir eine andere Folge $(c'_n)_{n=0,1,2,\dots}$ von rationalen Zahlen wählen, die ebenfalls gegen c konvergiert, dann können wir die beiden Folgen zu einer einzigen kombinieren, etwa so:

$$c_0, c'_0, c_1, c'_1, c_2, c'_2, \dots .$$

Diese dritte Folge konvergiert immer noch gegen c und daher konvergiert nach Voraussetzung auch die Folge

$$c_0x, c'_0x, c_1x, c'_1x, c_2x, c'_2x, \dots$$

im metrischen Raum H. Woraus wir schliessen dürfen, dass die Folgen $c_0x, c_1x, c_2x, \dots$ und $c'_0x, c'_1x, c'_2x, \dots$ gegen dasselbe Element von H konvergieren.

Zweitens. Mit unserer Definition von cx müssen wir $(c + c')x = cx + c'x$ zeigen für beliebige $c, c' \in \mathbb{R}$ und $x \in H$. Dazu wählen wir eine Folge von rationalen Zahlen $(c_n)_{n=0,1,\dots}$, die gegen c konvergiert, und eine Folge von rationalen Zahlen $(c'_n)_{n=0,1,\dots}$, die gegen c' konvergiert. Dann konvergiert $(c_n + c'_n)_{n=0,1,\dots}$ gegen $c + c'$. Auserdem ist

$$\begin{aligned} & N((c+c')x - cx - c'x) \\ \leq\ & N((c+c')x - c_n x - c'_n x) + N(c_n x + c'_n x - cx - c'x) \\ =\ & N((c+c')x - (c_n + c'_n)x) + N(c_n x + c'_n x - cx - c'x). \end{aligned}$$

Da der letzte Ausdruck für $n \to \infty$ gegen 0 geht, muss der erste Ausdruck Null sein. Also $(c + c')x = cx + c'x$.

Drittens. Mit unserer Definition von cx müssen wir zeigen $c(x + y) = cx + cy$ für beliebige $c \in \mathbb{R}$ und $x, y \in H$. Dazu wählen wir eine Folge von rationalen Zahlen $(c_n)_{n=0,1,\dots}$, die gegen c konvergiert. Dann ist

$$\begin{aligned} & N(c(x+y) - cx - cy) \\ \leq\ & N(c(x+y) - c_n(x+y)) + N(c_n(x+y) - cx - cy) \\ =\ & N(c(x+y) - c_n(x+y)) + N(c_n x + c_n y - cx - cy) \\ \leq\ & N(c(x+y) - c_n(x+y)) + N(c_n x - cx) + N(c_n y - cy). \end{aligned}$$

Da der letzte Ausdruck für $n \to \infty$ gegen 0 geht, muss der erste Ausdruck Null sein. Also $c(x + y) = cx + cy$.

Viertens. Wir müssen zeigen $N(cx) = |c|N(x)$ für beliebiges $x \in H$ und $c \in \mathbb{R}$. Dazu wählen wir eine Folge von rationalen Zahlen $(c_n)_{n=0,1,\dots}$, die gegen c konvergiert. Dann ist

$$N(cx) = \lim_n N(c_n x) = \lim_n |c_n| N(x) = |c| N(x).$$

Die erste Gleichheit drückt aus, dass N stetig ist. Das ist fast eine Tautologie, weil $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) = d_H(x, y)$ für beliebige $x, y \in H$.

Beweis von Prop. 11.4.17. Wegen Bemerkung 11.4.19 fangen wir damit an, zu zeigen, dass für jede ganze Zahl $n > 0$ der Homomorphismus $g_n \colon T \to T$ gegeben durch $g_n(\psi) = n\psi$ (gleich n-fache Iteration von ψ) bijektiv ist. Dazu beschreiben wir ihn etwas besser: gegeben $\psi \in T$, etwa mit $\psi(Q) = P$, und wir können annehmen $P \neq Q$. Sei k die Gerade durch Q und P. Die Einschränkung von ψ auf k ist dann eine gewöhnliche Translation der Geraden k, die Q nach P schickt, wegen Lemma 11.2.10. (Hier stelle ich mir k "wie $\mathbb{R}$" vor, weil es ja eine Isometrie $f \colon \mathbb{R} \to k$ gibt. Es ist praktisch, so ein f zu wählen mit $f(0) = Q$.) Demnach ist die n-fache Iteration von ψ die eindeutige Translation, die Q auf denjenigen Punkt P' von $k \subset X$ schickt, der n-mal so weit von Q entfernt ist wie P, in derselben Richtung, so dass $P \in [Q, P']$. Damit ist klar, dass g_n bijektiv ist, denn wir können die inverse Abbildung dazu explizit angeben.

Jetzt wollen wir auch noch Bemerkung 11.4.20 ausnutzen. Dazu brauchen wir eine Norm auf dem rationalen Vektorraum T. Die haben wir schon:

$N(\psi) := d_T(\psi, 0)$ (Vorsicht, additive Schreibweise). Die Metrik d_T können wir aus der Norm N rekonstruieren wegen Proposition 11.3.16; Vorsicht, da wird multiplikative Schreibweise benutzt, hier additive Schreibweise. Der zweite Teil dieser Proposition sagt uns auch, dass tatsächlich $N(c\psi) = |c|N(\psi)$ gilt für $c \in \mathbb{Q}$. (Man kann leicht auf den Fall $c \in \mathbb{Z}$ reduzieren.)

Da war aber noch eine Bedingung in Bemerkung 11.4.20. Die müssen wir überpüfen. Gegeben eine Folge von rationalen Zahlen $(c_n)_{n=0,1,2,\ldots}$, die in $\mathbb{R}$ gegen ein c konvergiert. Gegeben $\psi \in T$. Existiert dann $\lim_n c_n\psi$ im metrischen Raum T ? Wir können annehmen, dass $\psi(Q) = P$ mit $P \neq Q$. Wir parameterisieren die Gerade k durch Q und P mit einer abstandserhaltenden Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to X$, und zwar so, dass $f(0) = Q$. Dann ist $P = f(a)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und daher

$$\lim_n \, (c_n\psi)(Q) = \lim_n \, f(c_n a) = f(ca).$$

Daraus folgt, dass $\lim_n c_n\psi$ existiert und gleich der eindeutigen Translation ist, die Q auf $f(ca) \in k \subset X$ schickt.

Damit ist eigentlich alles gezeigt, was zu zeigen war. □

11.5. Axiome I und II bei normiertem Vektorrraum

Wie versprochen machen wir jetzt folgende Annahmen: X ist ein reeller Vektorraum mit Norm $N\colon X \to \mathbb{R}$, und dadurch auch ein metrischer Raum mit Metrik gegeben durch $d_X(v, w) = N(v - w)$ für $v, w \in X$. Ausserdem soll X als metrischer Raum mit Metrik $d = d_X$ die Axiome I und II erfüllen.

Lemma 11.5.21. *Eine abstandserhaltende Abbildung* $f\colon \mathbb{R} \to X$ *muss die Form*

$$f(t) = v + tw$$

haben, wobei $v, w \in X$ *und* $N(w) = 1$. *Es folgt, dass die Geraden von* X *im metrischen Sinn genau die Geraden im Sinn der linearen Algebra sind, und auch, dass die Segmente im metrischen Sinn genau die Segmente im Sinn der linearen Algebra sind.*

Beweis. Ein f von der angegebenen Form ist abstandserhaltend. Also ist $\mathrm{bild}(f)$ für jedes dieser f eine Gerade im metrischen Sinn. Wenn $k \subset X$ irgendeine Gerade im metrischen Sinn ist, dann können wir zwei Punkte in k wählen und ein f wie oben erfinden, so dass $\mathrm{bild}(f)$ diese beiden Punkte mit k gemeinsam hat; also ist $k = \mathrm{bild}(f)$. Also sind die Geraden im metrischen Sinn genau die Geraden im Sinn der LA. Wenn $g\colon \mathbb{R} \to X$ eine abstandserhaltende Abbildung ist, dann muss demnach $\mathrm{bild}(g) = \mathrm{bild}(f)$ sein für ein f wie oben, $f(t) = v + tw$; also ist $f^{-1} \circ g$ eine abstandserhaltende Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Da wir diese gut kennen, können wir schliessen, dass auch g die Standardform hat. □

Korollar 11.5.22. *Die Dimension von* X *als reeller Vektorraum ist* 2*.*

Beweis. Da die Geraden und Segmente im metrischen Sinn genau die Geraden und Segmente im Sinn der linearen Algebra sind, können wir den ersten Teil von Axiom II (bekannt als Paschs Axiom) leicht überprüfen: ohne Benutzung von Metrik, nur unter Benutzung von LA. Es klappt nur, wenn die Dimension gleich 2 ist.

Korollar 11.5.23. X *erfüllt* Axiom III.

Beweis. Zu jeder Geraden k in X (im Sinn der LA) und Punkt A von $X \smallsetminus k$ existiert genau eine Gerade (im Sinn der LA), die keinen Punkt mit k gemeinsam hat. (Hier wird benutzt, dass X die Dimension 2 hat.) Da die Geraden im Sinn der LA genau die Geraden im Sinn der Metrik ... usw. $\square$

Lemma 11.5.24. *Sei* $k \subset X$ *eine Gerade, die* 0 *enthält. Dann ist die Abbildung* senkrechte Projektion auf k*, als Abbildung von* X *nach* k*, eine* $\mathbb{R}$*-lineare Abbildung.*

Beweis. Sei p der Name dieser Abbildung. Aus unseren Studien von vor langer Zeit wissen wir noch, dass das Urbild $\ell = p^{-1}(0)$ eine Gerade ist (im metrischen Sinn, also hier auch im Sinn der linearen Algebra), die 0 enthält, also ein 1-dimensonaler Untervektorraum von X, verschieden von k. Für jedes $A \in k$ ist $p^{-1}(A)$ eine Gerade (im metrischen Sinn, also hier auch im Sinn der linearen Algebra), die A enthält und parallel zu ℓ ist; also muss $p^{-1}(A) = A + \ell$ gelten. Damit haben wir eine vollständige Beschreibung von p (mit Hilfe von ℓ und k), und sie zeigt, dass p linear ist. $\square$

Korollar 11.5.25. *Die Norm* N *hat die Form* $N(v) = \sqrt{\beta(v,v)}$*, wobei* $\beta\colon X \times X \to \mathbb{R}$ *eine symmetrische* $\mathbb{R}$*-bilineare Abbildung ist, mit der Eigenschaft* $\beta(v,v) \geq 0$ *für alle* $v \in X$*.*

Beweis. Im Fall $v \neq 0$ versuchen wir es mit der Formel

$$\beta(v,w) = (N(v))^2 \cdot w^{\mathbb{R}v}/v$$

die noch erklärt werden muss: $\mathbb{R}v$ ist der von v erzeugte 1-dimensionale Untervektorraum, auch bekannt als Gerade im metrischen Sinn durch 0 und v, und $w^{\mathbb{R}v}$ die senkrechte Projektion von w auf diese Gerade. Schliesslich ist $w^{\mathbb{R}v}/v$ eine praktische Bezeichnung für dasjenige $c \in \mathbb{R}$, das $w^{\mathbb{R}v} = cv$ erfüllt. (Im Fall $v = 0$ setzen wir $\beta(v,w) = 0$.) Wegen Lemma 11.5.24 ist die Abbildung $w \mapsto \beta(v,w) \in \mathbb{R}$ bei festem $v \in X$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. (Etwas genauer: die Abbildung $w \mapsto w^{\mathbb{R}v}$ ist eine lineare Abbildung von X nach $\mathbb{R}v$, die Abbildung $w \mapsto w^{\mathbb{R}v}/v$ ist daher eine lineare Abbildung von X nach $\mathbb{R}$, und dann ist schliesslich $w \mapsto (N(v))^2 \cdot w^{\mathbb{R}v}/v$ eine lineare Abbildung von X nach $\mathbb{R}$.) Ausserdem sehen wir $\beta(v,v) = (N(v))^2 \cdot v/v = (N(v))^2$. Das ist gut. Ausserdem bemerken wir $\beta(bv, w) = b\beta(v, w)$ für beliebiges $b \in \mathbb{R}$. Das ist auch gut. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\beta(v, w) = \beta(w, v)$ für alle $v, w \in X$. Dann haben wir automatisch die Bilinearität. Wenn $v = 0$ oder $w = 0$, dann ist das klar. Also können wir annehmen, dass $v, w \neq 0$. Wir verlieren nichts Wesentliches, wenn wir v durch bv ersetzen für ein reelles $b \neq 0$; also dürfen wir auch noch annehmen $N(v) = N(w) > 0$.

Dazu bemerken wir, dass unsere Definition von $\beta(v, w)$ eigentlich nur metrische Begriffe benutzt, und die Wahl des speziellen Elementes $0 \in X$, sonst aber keine Begriffe aus der linearen Algebra. (Für $\mathbb{R}v$ können wir schreiben *die Gerade durch* 0 *und* v. Für $N(v)$ können wir schreiben $d(0, v)$. Usw.) Das ist gut, denn es gibt eine Isometrie σ von X nach X, die 0 auf 0 abbildet, v auf w und w auf v. Da unsere Definition von β nur metrische Begriffe benutzt, muss gelten

$$\beta(v, w) = \beta(\sigma(v), \sigma(w)) = \beta(w, v).$$

Ich habe das mit den metrischen Begriffen betont, weil ich keine Lust habe, hier etwa zu zeigen, dass die Isometrie σ eine lineare Abbildung ist. $\square$

Es ist jetzt leicht, Elemente $e(1)$ und $e(2)$ von X zu finden, die

$$\beta(e(1), e(1)) = 1 = \beta(e(2), e(2)), \qquad \beta(e(1), e(2)) = 0$$

erfüllen. Dann bilden $e(1)$ und $e(2)$ automatisch eine Basis. Ein beliebiges $v \in X$ kann dann geschrieben werden $v = v_1 e(1) + v_2 e(2)$, wobei $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$. Wegen Bilinearität von β gilt dann

$$\beta(v) = v_1^2 + v_2^2$$

und damit $N(v) = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}$.