

# Nichteuklidische Geometrie, WS 2015-2016 (Weiss)

## Übungsaufgaben zur Klausurvorbereitung

### A. METRISCHE RÄUME ALLGEMEIN

**Aufgabe A.1.** Sei  $U \subset \mathbb{R}$  das offene Intervall zwischen  $-\pi/2$  und  $\pi/2$ . Zeigen, dass  $d^*: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $d^*(x, y) = |\tan(x) - \tan(y)|$  eine Metrik ist. Zeigen, dass es eine Isometrie von  $(U, d^*)$  nach  $\mathbb{R}$  mit der Standardmetrik gibt.

**Aufgabe A.2.** Sei  $d^*$  die Metrik auf  $\mathbb{R}$  definiert durch  $d^*(x, y) = |x| + |y|$  falls  $x \neq y$  (und natürlich  $d^*(x, x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ). Sei  $X$  irgendein anderer metrischer Raum, mit Metrik  $d_X$ . Man zeige, dass eine Abbildung  $f: \mathbb{R} \rightarrow X$  genau dann stetig ist für die Metriken  $d^*$  und  $d_X$ , wenn sie stetig an der Stelle 0 ist für die Standardmetrik  $d$  auf  $\mathbb{R}$  (und  $d_X$ ).

**Aufgabe A.3.** Sei  $X$  das Achsenkreuz in  $\mathbb{R}^2$ , also

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\}.$$

Eine Metrik  $d$  auf  $X$  ist definiert durch  $d(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$ . Zeigen: es gibt genau 6 Geraden in  $X$ . (Definition von *Gerade in metrischem Raum* in Erinnerung rufen.)

**Aufgabe A.4.** Sei  $C \subset \mathbb{R}^2$  der obere Halbkreis bestehend aus allen  $x \in \mathbb{R}^2$  mit  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  und  $x_2 \geq 0$ . Sei  $d_C$  die Unterraummetrik auf  $C$  bestimmt durch die Euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^2$ , also

$$d_C(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

für  $x, y \in C$ . Zeigen: es gibt keine abstandserhaltende Abbildung von  $C$  mit Metrik  $d_C$  nach  $\mathbb{R}$  mit Standardmetrik.

**Aufgabe A.5.** Gegeben metrische Räume  $X$  und  $Y$  (mit Metriken  $d_X$  bzw  $d_Y$ ). Oft möchte man sagen: die Metriken  $d_X$  und  $d_Y$  bestimmen eine Metrik  $d_{X \times Y}$  auf  $X \times Y$ . Es gibt leider keine "beste Wahl" für so eine Metrik  $d_{X \times Y}$ , aber es gibt ein paar vernünftige Möglichkeiten. Man möchte auf jeden Fall erreichen: eine Abbildung  $f$  von einem metrischen Raum  $V$  (mit Metrik  $d_V$ ) nach  $X \times Y$  (mit Metrik  $d_{X \times Y}$ ) ist genau dann stetig, wenn die dazugehörigen Abbildungen  $f_1: V \rightarrow X$  und  $f_2: V \rightarrow Y$  stetig sind.

- (i) Man kann definieren  $d_{X \times Y}((x, y), (x', y')) := \max\{d(x, x'), d(y, y')\}$  für alle  $x, x' \in X$  und  $y, y' \in Y$ . Zeigen: Es ist eine Metrik.
- (ii) Man kann stattdessen definieren  $d_{X \times Y} := ((d(x, x'))^2 + (d(y, y'))^2)^{1/2}$  für alle  $x, x' \in X$  und  $y, y' \in Y$ . Zeigen: Es ist eine Metrik.

- (iii) Zeigen: eine Abbildung  $f$  von einem metrischen Raum  $V$  (mit Metrik  $d_V$ ) nach  $X \times Y$  (mit Metrik  $d_{X \times Y}$  wie in (i) oder (ii)) ist genau dann stetig, wenn die dazugehörigen Abbildungen  $f_1: V \rightarrow X$  und  $f_2: V \rightarrow Y$  stetig sind.
- (iv) Aus (iii) folgt auch, dass die Metriken auf  $X \times Y$  in (i) und (ii) *äquivalent* sind. (Das heisst: die Identitätsabbildung  $X \times Y \rightarrow X \times Y$  ist stetig, wenn man für die Quelle  $X \times Y$  eine beliebige der beiden vorgeschlagenen Metriken nimmt, und für das Ziel  $X \times Y$  die andere.)

**Aufgabe A.6.** Beispiel 1.3.23 aus Vorlesungsnotizen erklären.

## B. AXIOME I, II, III UND ERSTE KONSEQUENZEN

Hier ist (wenn nicht anders gesagt)  $X$  ein metrischer Raum, der die Axiome I und II erfüllt.

**Aufgabe B.1.** Vier verschiedene  $A, B, C, D \in X$ . Sei  $k$  eine Gerade in  $X$ , die  $[A, B]$  und  $[C, D]$  nicht trifft. Wenn  $k \cap [B, C] \neq \emptyset$ , dann auch  $k \cap [D, A] \neq \emptyset$ .

**Aufgabe B.2.** Gegeben  $A, B, C \in X$ , nicht auf einer Geraden. Zeigen:

- Die Mittelsenkrechten von  $[A, B]$ ,  $[B, C]$ ,  $[A, C]$  sind verschieden (drei verschiedene Geraden).
- Wenn zwei von ihnen sich in einem Punkt treffen, dann geht auch die dritte durch diesen Punkt.
- Dieser Schnittpunkt ist dann das Zentrum eines Kreises, der  $A, B, C$  enthält.

**Aufgabe B.3.** Zeigen: eine stetige injektive Abbildung von einem Intervall  $[a, b]$  nach  $\mathbb{R}$  ist monoton, d.h., wachsend oder fallend. (Aufgabe gehört vielleicht nicht hierher, wird aber oft von uns benutzt.)

**Aufgabe B.4.** Zeigen: eine monotone surjektive Abbildung von Intervall  $[a, b]$  nach Intervall  $[p, q]$  ist stetig. (Aufgabe gehört vielleicht nicht hierher, wird aber auch manchmal von uns benutzt.)

**Aufgabe B.5.** (*Eher leichte Aufgabe — unbedingt lösen.*) Sei  $k$  eine Gerade in  $X$ . Zeigen: Die Abbildung *senkrechte Projektion auf  $k$* , als Abbildung von  $X$  nach  $k$ , ist stetig. (Dabei soll  $k$  mit der Unterraum-Metrik ausgestattet werden, Unterraum von  $X$  also.)

**Aufgabe B.6.** (*Hübsche Aufgabe! Unbedingt lösen.*) Gegeben zwei Geraden  $k$  und  $\ell$  in  $X$ , die nicht zueinander parallel sind. Wir schreiben  $q_k: X \rightarrow k$  und  $q_\ell: X \rightarrow \ell$  für die senkrechten Projektionen. Dann haben wir eine Abbildung

$$(q_k, q_\ell): X \rightarrow k \times \ell.$$

Zeigen: diese Abbildung ist *injektiv*.

(Obwohl das für die Lösung der Aufgabe keine Rolle spielt, kann man auch sagen, dass diese injektive Abbildung stetig ist, unter Benutzung von Aufgabe B.5. Man muss sich aber dazu überlegen, wie man das Produkt  $k \times \ell$  mit einer Metrik ausstattet. Dazu Aufgabe A.5.)

### C. WEITERE KONSEQUENZEN AUS DEN AXIOMEN I,II,III

Hier ist wieder (wenn nicht anders gesagt)  $X$  ein metrischer Raum, der die Axiome I und II erfüllt. Wenn in einer Aufgabe auch Axiom III vorausgesetzt werden soll, dann wird es ausdrücklich gesagt.

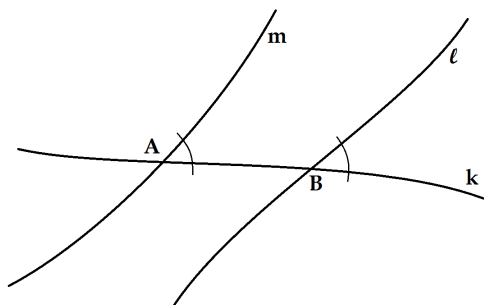
**Aufgabe C.1.** Sei  $k \subset X$  Gerade,  $A, C \in X$  mit  $A \notin k$  und  $C \in k$ . Zeigen: Die Funktion vom Segment  $[A^k, C]$  nach  $\mathbb{R}$  gegeben durch  $B \mapsto d(A, B)$  (für beliebiges  $B$  aus dem Segment) ist injektiv.

(Skizze dazu. Skizze soll zeigen, wo das Segment  $[A^k, C]$  ist. Lösung steht irgendwo bei Iversen. Idee: angenommen nicht injektiv; dann fällt uns etwas mit einer Mittelsenkrechten ein. Bemerkung: diese injektive Funktion ist auch stetig, daher monoton wegen Aufgabe B.3.)

**Aufgabe C.2.** Sei  $P$  ein Punkt in  $X$  und  $\tau_P: X \rightarrow X$  die dazu gehörende Punktspiegelung. Zeigen: die Gerade  $\tau_P(k)$  ist parallel zu  $k$ .

(Die Gerade  $\tau_P(k)$  ist das Bild von  $k$  unter der Isometrie  $\tau_P$ . Lösung steht wahrscheinlich irgendwo bei Iversen.)

**Aufgabe C.3.** Gegeben verschiedene Geraden  $k, \ell, m$  in  $X$ , wobei  $\ell$  nicht parallel zu  $k$  und  $m$  nicht parallel zu  $k$ . Bezeichnung der Schnittpunkte wie in folgender Skizze:



Angenommen, die eingezeichneten Winkel bei A und B sind gleich. (Das soll präzisiert werden.) Zeigen: dann sind  $\ell$  und  $m$  parallel.

(*Hinweis:* Aufgabe C.2 benutzen. Wie Sie das mit den Winkeln präzisieren, sollte dabei keine grosse Rolle spielen — deswegen können Sie das ruhig etwas aufschieben. Zur Definition von Winkeln: Vorlesungsnotizen Wochen 9 und 10.)

**Aufgabe C.4.** Zeigen: Wenn der metrische Raum  $X$  das Axiom III erfüllt, zusätzlich zu I und II, dann ist die Relation *parallel* (für Geraden in  $X$ ) eine Äquivalenzrelation. Umgekehrt: Wenn nur bekannt ist, dass  $X$  die Axiome I und II erfüllt, und dass die Relation *parallel* (für Geraden in  $X$ ) eine Äquivalenzrelation ist, dann erfüllt  $X$  auch das Axiom III.

**Aufgabe C.5.** Gegeben Gerade  $k$  in  $X$ . Zeigen: zu jeder Isometrie  $f: k \rightarrow k$  existiert eine Isometrie  $\psi: X \rightarrow X$  mit  $\psi(A) = f(A)$  für alle  $A \in k$  (das heisst grob gesagt,  $f$  ist die Einschränkung von  $\sigma$  auf  $k$ ). Genauer gefragt: wieviele solche  $\psi$  gibt es bei gegebenem  $f$ ?

#### D. ALLGEMEINES UND SPEZIELLES ÜBER GRUPPEN UND WIRKUNGEN

**Aufgabe D.1.** Sei  $G = \Sigma_3$ , Menge/Gruppe der Bijektionen von  $\{1, 2, 3\}$  nach  $\{1, 2, 3\}$ . Was ist  $|G|$ ? Sei  $\psi \in G$  das Element gegeben durch  $\psi(1) = 2$ ,  $\psi(2) = 1$ ,  $\psi(3) = 3$ . Dann ist  $H = \{\text{id}, \psi\}$  eine Untergruppe. Linksnebenklassen von  $H$  in  $G$  hinschreiben (ohne Verdoppelung). Wieviele gibt es?

**Aufgabe D.2.** Es gibt zwei Gruppen  $G$  und  $H$ , beide mit genau 4 Elementen, aber nicht isomorph zueinander.

**Aufgabe D.3.** Zeigen: Eine Gruppe  $G$  mit genau 23 Elementen hat keine Untergruppen ausser  $G$  selbst und  $\{1\}$ . Folgerung: wenn  $x \in G$  irgendein Element ist, das von 1 verschieden ist, dann ist

$$G = \{x^0, x^1, x^2, \dots, x^{22}\}.$$

**Aufgabe D.4.** Sei  $G$  Gruppe,  $H$  Untergruppe. Man definiere *Rechtsnebenklassen* von  $H$  in  $G$  in Analogie zu Linksnebenklassen. Zeigen: es gibt eine Bijektion von  $G/H$ , Menge der Linksnebenklassen, nach  $H \backslash G$ , Menge der Rechtsnebenklassen. (Vorsicht: sicherstellen, dass sie als Abbildung wohldefiniert ist.)

**Aufgabe D.5.** Sei  $G$  Gruppe,  $x \in G$  fest. Zeigen: Die Abbildung  $G \rightarrow G$  gegeben durch  $y \mapsto xyx^{-1}$  ist ein Homomorphismus, und sogar ein Isomorphismus.

**Aufgabe D.6.** Eine Untergruppe  $H$  von  $G$  ist genau dann normal, wenn jede Linksnebenklasse von  $H$  in  $G$  auch eine Rechtsnebenklasse ist. (Vgl Aufgabe D.4.)

**Aufgabe D.7.** Gegeben Gruppe  $G$  und Wirkung von  $G$  auf Menge  $S$ . Sei  $\varphi: G \rightarrow \Sigma_S$  der entsprechende Homomorphismus. Sei  $t \in S$  und  $G_t$  die dazu gehörende Standgruppe der Wirkung. Man zeige, dass  $\ker(\varphi) \subset G_t$ .

**Aufgabe D.8.** Gegeben *endliche* Gruppen  $G$  und  $H$ . Wenn  $\text{ggT}(|G|, |H|) = 1$ , dann gibt es nur einen Homomorphismus von  $G$  nach  $H$ .

**Aufgabe D.9.** Sei  $G$  eine Gruppe,  $H$  eine Untergruppe mit  $[G : H] = n$ , wobei  $[G : H] = \text{Anzahl der Linksnebenklassen von } H \text{ in } G$ . Mit Benutzung von Aufgabe D.7 zeige man, dass eine *normale* Untergruppe  $K$  von  $G$  existiert derart, dass  $K \subset H$  und  $[G : K]$  Teiler von  $n!$ .

**Aufgabe D.10.** Korollar zu Aufgabe D.9: Sei  $G$  endliche Gruppe und  $p$  die kleinste Primzahl, die  $|G|$  teilt. Sei  $H \subset G$  eine Untergruppe mit  $[G : H] = p$ . Dann ist  $H$  eine *normale* Untergruppe.

**Aufgabe D.11.** Sei  $W$  der Standardwürfel in  $\mathbb{R}^3$ , bestehend aus allen  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  mit  $|x_i| \leq 1$  für  $i = 1, 2, 3$ . Sei  $G$  die Gruppe bestehend aus allen linearen Isometrien  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (mit euklidischer Metrik auf  $\mathbb{R}^3$ ) die  $f(W) = W$  erfüllen und als lineare Abbildungen Determinante  $+1$  haben. Beispiel: die lineare Isometrie definiert durch Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man zeige auf jeden Fall:  $G$  hat 24 Elemente. Wenn dann noch Lust, zeige man: es gibt einen Isomorphismus von  $G$  nach  $\Sigma_4$ . (Hinweis:  $G$  wirkt auf der Menge der Ecken vom Würfel. Leider hat diese 8 Elemente. Wäre schön, wenn sie nur 4 Elemente hätte.)

**Aufgabe D.12.** (*Leicht — hätte früher kommen müssen.*) Gegeben Gruppe  $G$  und Elemente  $\alpha, \beta \in G$ . Zeigen: Das Inverse von  $\alpha\beta$  ist  $\beta^{-1}\alpha^{-1}$ .

## E. BEISPIELE $\mathbb{E}$ UND $\mathbb{H}$

**Aufgabe E.1.** Sei  $GL(2, \mathbb{Z})$  die Gruppe der  $2 \times 2$ -Matrizen mit Einträgen aus  $\mathbb{Z}$  und Determinante  $\pm 1$ . In Übungsblatt 5 Aufgabe 1 geht es um einen Homomorphismus von  $GL(2, \mathbb{Z})$  nach  $\text{isom}(\mathbb{H})$ , Gruppe der Isometrien von  $\mathbb{H}$  nach  $\mathbb{H}$ . Was ist der Kern dieses Homomorphismus?

**Aufgabe E.2.** Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in Aufgabe B.6. Man zeige: Diese injektive Abbildung  $(q_k, q_\ell): X \rightarrow k \times \ell$  ist

- auf jeden Fall surjektiv wenn  $X = \mathbb{E}$ ;

- bei geeigneter Wahl von  $k$ ,  $\ell$  nicht surjektiv wenn  $X = \mathbb{H}$ . (Vorschlag:  $k$  ist  $\{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$  und  $\ell$  besteht aus allen  $z \in \mathbb{H}$  mit  $|z| = 1$ . Wenn Sie nicht einsehen wollen, dass das Geraden in  $\mathbb{H}$  sind, dann zurück zu Definition ... und ...)