07.01.2016

Nicht-Eukl. Geometrie (Weiss), WS 2015-16
Übungsblatt 9

In Aufgabe 1 von diesem Übungsblatt versuche ich, folgende Aussage anzudeuten. Die Winkel, die wir uns in Vorlesungsnotizen Woche 9 und 10 so mühsam erarbeitet haben (Definition 10.1.17 und Bemerkung zu Winkeln kurz danach) sind im Falle von $X = \mathbb{H}$ genau die Winkel, die wir mit unseren Euklidisch geschulten Augen sehen.

1. Wir schreiben Q für das Element i von $\mathbb{H}$.

a) Man bestimme die Untergruppe der Isometriegruppe von $\mathbb{H}$ bestehend aus allen Isometrien, die Q festhalten. (Siehe Übungsblatt 5 Aufgabe 1 und Beispiel 7.2.19, Beispiel 9.1.4. in Vorlesungsnotizen.) [3]

b) In dieser Untergruppe soll ein Element ψ gefunden werden, das $\psi^{100} = 1$ erfüllt (wobei 1 dasselbe wie id bedeutet), aber $\psi^k \neq 1$ für $k = 1, 2, 3, \ldots, 99$. (*Vorsicht*: $\psi^{50} \neq 1$ wird auch verlangt.) [4]

c) Sei $\mathcal{S}$ der Kreis vom Radius r um Q wie in Bemerkung 10.1.16 von Vorlesungsnotizen. Für beliebiges $A \in \mathcal{S}$ und $B = \psi(A) \in \mathcal{S}$ soll die normierte Bogenlänge vom minimalen Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B} \subset \mathcal{S}$ bestimmt werden.[1] [3]

d) Wir wissen (§5.3 von Vorlesungsnotizen und Übungsblatt 5), dass das Dreieck $\Delta QAB = \Delta_{\mathbb{H}} QAB$ (im Sinne der hyperbolischen Metrik) Seiten hat, die im Sinn der euklidischen Metrik von $\mathbb{R}^2$ Kreisbögen sind oder Segmente (letzteres nur, wenn vertikal). Wir können dann versuchen, den Winkel von $\Delta_{\mathbb{H}} QAB$ bei Q im euklidischen Sinn zu bestimmen.[2] [9]

e) Haben Sie dieselbe Antwort in c) und d)? Dann zur Belohnung [1]

2. Sei S^1 der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$, jetzt aber mit Bogenlängemetrik ausgestattet. (Also: Abstand zwischen $(1, 0)$ und $(0, 1)$ ist $\pi/2$, Abstand zwischen $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ ist π, usw.) Jede orthogonale Matrix

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

[1] Hier geht es eigentlich nicht um ein Berechnen, sondern um ein Bedenken. Die Antwort hängt zwar von Ihrer Wahl von ψ ab. Es gibt aber so etwas wie eine Standardwahl, die Sie wahrscheinlich getroffen haben, wenn Sie nichts Böses im Sinne hatten.

[2] Wie macht man das? Theoretisch so: Hyperbolische Gerade k durch Q und A parametrisieren, etwa mit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, differenzierbar, $\text{bild}(f) = k$, $f(0) = Q$, $f'(0) \neq$Nullvektor. Das f muss nicht abstandserhaltend sein. Ebenso hyperbolische Gerade ℓ durch Q und B parametrisieren, etwa mit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}$, differenzierbar, $\text{bild}(g) = \ell$, $g(0) = Q$, $g'(0) \neq$Nullvektor. Das g muss nicht abstandserhaltend sein. Dann wird gefragt: was ist der (euklidische) Winkel zwischen den Vektoren $f'(0)$ und $g'(0)$? Bogenmass bitte. Sie müssen aber nicht den ganzen Zirkus wirklich veranstalten, um die Antwort zu finden.

bestimmt eine Bijektion $S^1 \to S^1$ in der üblichen Weise (Multiplikation von Matrix mit Einheitsvektor). Dabei bedeutet *orthogonale Matrix*, dass a, b, c, d reelle Zahlen sind, $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ und $ac + bd = 0$, kurz gesagt, die Spalten der Matrix bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$). Diese Bijektion bestimmt von M ist auch eine Isometrie. — Es soll gezeigt werden, dass es keine anderen Isometrien von S^1 nach S^1 gibt (mit dieser Metrik).

Zur Abgabe am Do dem 14.01. vor 16:00: Aufgabe 1.