Nicht-Eukl. Geometrie (Weiss), WS 2015-16
Übungsblatt 8

1. (Bonusaufgabe). Wieviele Worte kann man durch Umordnen der Buchstaben in

$$\mathsf{GOODKINGWENCESLASLOOKEDOUTONTHEFEASTOFSTEPHEN}$$

erhalten? Alle vorhandenen Buchstaben(typen) müssen so häufig verwendet werden, wie sie vorhanden sind. Zum Beipiel muss das O genau sieben mal vorkommen. Wir fragen aber nicht, ob diese Worte einen Sinn ergeben. Zum Beispiel wäre

$$\mathsf{DOOGGNIKSALSECNEWDEKOOLTUONOEHTTSAEFFONEHPETS}$$

eins von den zugelassenen Worten. Auch das Originalwort $\mathsf{GOODK...HEN}$ soll mitgezählt werden. — Die volle Punktzahl gibt es nur für Antworten, die den Begriff *Wirkung einer Gruppe auf einer Menge* vernünftig anwenden. [25]

2. Sei G die Gruppe bestehend aus den 2×2-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$ und Determinante 1; die Gruppenstruktur soll gegeben sein durch Matrixmultiplikation. Sei S die Menge der 2×1-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$. Durch Multiplikation von Matrizen mit "Spaltenvektoren" in der üblichen Weise erhalten wir eine Wirkung α der Gruppe G auf der Menge S. Beispiel:

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

(i) Zeigen Sie: Die Bahn dieser Wirkung, die das Element

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathsf{S}$$

enthält, besteht aus allen

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathsf{S}$$

mit $\mathsf{ggT}(a, b) = 1$. (Dabei bedeutet ggT: grösster gemeinsamer Teiler; auf Englisch *greatest common divisor*, abgekürzt gcd.)[1] [7]

(ii) Zeigen Sie, dass zwei Elemente von S, etwa

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix},$$

genau dann zur selben Bahn dieser Wirkung gehören, wenn $\mathsf{ggT}(u, v) = \mathsf{ggT}(p, q)$ ist. [3]

[1] Wenn a, b nicht beide Null sind, dann ist $\mathsf{ggT}(a, b)$ die grösste positive ganze Zahl, die sowohl a als auch b teilt. Wenn $a = b = 0$, dann soll $\mathsf{ggT}(a, b) = 0$ sein.

3. Es ist bekannt, dass die Gruppe der positiven reellen Zahlen (mit gewöhnlicher Multiplikation als Gruppenstruktur) isomorph ist zur Gruppe $\mathbb{R}$ (mit gewöhnlicher Addition als Gruppenstruktur). Ist die Gruppe der positiven rationalen Zahlen (mit gewöhnlicher Multiplikation als Gruppenstruktur) auch isomorph zur Gruppe $\mathbb{Q}$ (mit gewöhnlicher Addition als Gruppenstruktur) ? [5]

Hilfestellung: suchen Sie sich mal zwei verschiedene Elemente $x, y \in \mathbb{Q}$ aus, wobei $\mathbb{Q}$ die gewöhnliche Addition als Gruppenstruktur hat. Dann gibt es eine kleinste Untergruppe H von $\mathbb{Q}$, die x und y enthält. Was können sie über H als Gruppe *an sich* sagen?

Zur Abgabe am Do dem 17.12. vor 16:00: alle Aufgaben.