3.12.2015

Nicht-Eukl. Geometrie (Weiss), WS 2015-16
Übungsblatt 7

1. Sei $\mathcal{S}$ der Kreis (im Euklidischen Sinn) in $\mathbb{C}$ mit Zentrum $5i/4$ und Radius $3/4$. Dieses $\mathcal{S}$ ist auch eine Teilmenge von $\mathbb{H}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ auch im Sinn der hyperbolischen Metrik ein Kreis ist. Das heisst: $\mathcal{S}$ besteht aus allen Elementen von $\mathbb{H}$, die von einem gewissen z in $\mathbb{H}$ einen gewissen festen Abstand r (im Sinn der hyperbolischen Metrik) haben. Was ist dieses $z \in \mathbb{H}$ und was ist dieses positive $r \in \mathbb{R}$? [5]

(ii) Bestimmen Sie den *Kreisumfang* von $\mathcal{S}$ als Kreis im Sinn der hyperbolischen Metrik. [6]

Bei (ii) darf/soll geschummelt werden gemäss folgender Anleitung. Wir haben, oder kriegen demnächst, eine komplizierte Definition von Bogenlänge bei Kreisbögen (in metrischen Räumen X, die Axiom I und II erfüllen). Diese komplizierte Definition benutzt Annäherung durch Polygone. Im Fall $X = \mathbb{H}$ kann man sich aber denken, dass die Definition mit Annäherung durch Polygone uns nur zurückführt auf die gewichtete Kurvenlänge bei Kostenfunktion Φ, wobei $\Phi(z) = 1/\text{Im}\,(z)$ für $z \in \mathbb{H}$. Akzeptieren Sie das bitte. Demnach sollen Sie $\mathcal{S}$ durch eine glatte Kurve γ parameterisieren und die gewichtete Kurvenlänge $L^{\Phi}(\gamma)$ bestimmen.[1]

2. In dieser Aufgabe bezeichnet $\mathbb{F}_3$ den Körper der ganzen Zahlen modulo 3. Er hat genau drei Elemente, die Sie zum Beispiel $\underline{0}$, $\underline{1}$ und $\underline{2}$ nennen können.[2]

Sei G die Menge der 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{F}_3$ und Determinante $1 \in \mathbb{F}_3$. Durch Matrixmultiplikation wird aus dieser Menge eine Gruppe.

(i) Wieviele Elemente hat G ? [3]

Sei V der 2-dimensionale Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_3$ bestehend aus den Spaltenvektoren mit 2 Einträgen aus $\mathbb{F}$.

(ii) Wieviele Elemente hat V ? [1]

---

[1] Das kann zu einem schwierigen Integral führen. Nicht gleich aufgeben. Für mich war die Formel $1 + \sin t = 2\cos^2(t/2 - \pi/4)$ nützlich, und danach die Substitution $t = \arctan s$. Zum Schluss hin musste ich feststellen, dass ich den Kreis an einer ungünstigen Stelle aufgetrennt hatte. Das habe ich dann korrigiert. Aber vielleicht machen Sie ja ganz andere Erfahrungen. Es gibt 3 Pkte für korrekten Integralausdruck und 3 Pkte für Auswertung des Integrals.

[2] Wenn Sie das nicht kennen, dann sagen Sie sich, dass jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein $\underline{n} \in \mathbb{F}_3$ bestimmt. Weitere Elemente gibt es nicht in $\mathbb{F}_3$. Finden Sie sich damit ab, dass $\underline{m} = \underline{n}$, wenn $m - n \in \mathbb{Z}$ durch 3 teilbar ist. Produkt und Summe von $\underline{m}$ und $\underline{n}$ finden Sie, indem Sie erst Produkt mn bzw. Summe $m + n$ in $\mathbb{Z}$ bilden und dann einen Strich darunter machen. (Beispiel: $\underline{5} \cdot \underline{7} = \underline{35}$. Andererseits ist natürlich $\underline{5} = \underline{2}$ und $\underline{7} = \underline{4}$. Also ist auch $\underline{5} \cdot \underline{7} = \underline{2} \cdot \underline{4} = \underline{8}$. Also müsste $\underline{35} = \underline{8}$ gelten, sonst haben wir ein Problem! Da ist aber kein Problem.)

(iii) Sei $\mathsf{P}(\mathsf{V})$ die Menge der 1-dimensionalen $\mathbb{F}_3$-Untervektoräume von V. Wieviele Elemente hat $\mathsf{P}(\mathsf{V})$? [1]

Durch Multiplikation von Matrizen mit Spaltenvektoren erhalten wir in der üblichen Weise eine Wirkung α von G auf der Menge V. Das heisst, für $A \in \mathsf{G}$ und $v \in \mathsf{V}$ ist ganz einfach $\alpha(A, v) = Av$, Produkt von 2×2-Matrix A mit 2×1-Matrix v.

(iv) Erklären Sie, wie oder warum diese Wirkung α von G auf V eine Wirkung β von G auf $\mathsf{P}(\mathsf{V})$ bestimmt in der Weise, dass für jedes $\mathsf{L} \in \mathsf{P}(\mathsf{V})$ und $v \in \mathsf{V}$ und $A \in \mathsf{G}$ gilt: wenn $v \in \mathsf{L}$, dann $\alpha(A, v) \in \beta(A, \mathsf{L})$. [1]

Nach einer allgemeinen Beobachtung (Vorlesungsnotizen Woche 7 oder 8) entspricht diese Wirkung einem Homomorphismus von G nach $\Sigma_{\mathsf{P}(\mathsf{V})}$. Statt $\Sigma_{\mathsf{P}(\mathsf{V})}$ kann man auch ganz gut Σ_k schreiben, wobei k die Anzahl der Elemente von $\mathsf{P}(\mathsf{V})$ ist ... die ich Ihnen nicht verraten will.

(v) Ist dieser Homomorphismus bijektiv? Injektiv? Wenn nicht injektiv, was ist sein Kern? [3]

Zur Abgabe am Do dem 10.12. vor 16:00: alle Aufgaben.