25.11.2015

Nicht-Eukl. Geometrie (Weiss), WS 2015-16
Übungsblatt 6

1. Sei X ein metrischer Raum, der das Axiom I erfüllt. Zeigen Sie: Die Elemente der Geraden durch zwei verschiedene Elemente P, Q von X sind genau diejenigen $A \in X$, für die $d(P, A) + d(A, Q) = d(P, Q)$ oder $d(A, P) + d(P, Q) = d(A, Q)$ oder $d(P, Q) + d(Q, A) = d(P, A)$ gilt.[1] [4]

2. Sei k eine Gerade in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$; dazu Vorlesungsnotizen §5.3 lesen. Weil $\mathbb{H}$ die Axiome I und II erfüllt, gibt es genau eine Isometrie $\sigma_k \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, die nicht die Identität ist, aber trotzdem alle Punkte von k festlässt. (Sie heisst *Spiegelung an der Geraden* k.) Zeigen Sie, dass σ_k die Form f_M hat für eine Matrix M (wie in Übungsblatt 5, Aufgabe 1; also $M \in G$). [5]

3. Zwei Geraden k und ℓ in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$ sind gegeben durch

$$k = \{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}\, z = 0\}, \qquad \ell = \{z \in H \mid \mathrm{Re}\, z = 1\}.$$

(Siehe dazu Vorlesungsnotizen §5.3.)

- Zeigen Sie: wenn eine Gerade n in $\mathbb{H}$ (im Sinn der hyperbolischen Metrik) senkrecht zu k ist, §6.3, dann ist sie ein Halbkreis (im Sinn der Euklidischen Metrik), und dessen Tangente am Schnittpunkt von n und k ist horizontal. Ebenso: wenn eine Gerade n in $\mathbb{H}$ (im hyperbolischen Sinn) senkrecht zu ℓ ist, dann ist sie ein Halbkreis (im Euklidischen Sinn), und dessen Tangente am Schnittpunkt von n und ℓ ist horizontal. [4]
- Schliessen Sie daraus (ganz im Sinn der hyperbolischen Metrik): Obwohl k und ℓ parallel zueinander sind, gibt es keine Gerade n in $\mathbb{H}$, die sowohl k als auch ℓ senkrecht trifft. [1]

4. *Zur Saccheri-Ungleichung*: Sei k die Menge aller $z \in \mathbb{H}$ mit $\mathrm{Re}\, z = 0$; das ist bekanntlich eine Gerade in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$. Sei $A = (1 + i)/\sqrt{2}$ und $B = \sqrt{2}(1 + i)$.

- Bestimmen Sie $A^k \in k$ und $B^k \in k$. (Siehe §6.2.) [3]
- Zeigen Sie, dass $d(A, A^k) = d(B, B^k)$. [2]
- Zeigen Sie, dass $d(A, B) > d(A^k, B^k)$ (strikte Ungleichung). [1]

Skizze dazu.

Zur Abgabe am Do dem 3.12. vor 16:00: alle Aufgaben.

[1] Keine Romane. 5 Zeilen sollten genügen.