19.11.2015

Nicht-Eukl. Geometrie (Weiss), WS 2015-16
Übungsblatt 5

1. Sei G die Menge aller reellen 2×2-Matrizen M mit Determinante $\det(M) = \pm 1$, also $+1$ *oder* -1. Im Fall $\det(M) = 1$ haben wir schon gezeigt, dass die Formel

$$f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{falls } M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

eine Isometrie f_M von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$ definiert (Thm 4.2.8). Im Fall $\det(M) = -1$ definieren wir jetzt noch

$$f_M(z) := \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \qquad \text{falls } M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Formel für f_M auch im Fall $\det(M) = -1$ eine Isometrie von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$ definiert.[1] [3]

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $M, N \in G$ die Gleichung $f_M \circ f_N = f_{MN}$ gilt.[2] [3]

2. Zeigen Sie: Jede Gerade L im metrischen Raum $\mathbb{H}$ (mit der Metrik d^Φ wie in Def. 4.1.1) hat die Form $T \cap \mathbb{H}$, wobei T entweder ein (gewöhnlicher) Kreis in $\mathbb{C}$ ist mit Zentrum auf der reellen Achse, oder eine (gewöhnliche) vertikale Gerade. [7]

Anleitung: Aus Vorlesungsnotizen Woche 5 ist bekannt, dass $L = f_M(K)$ für eine Matrix $M \in G$ wie in Aufgabe 1, mit $\det(M) = +1$; dabei ist $K = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z = 0\}$. Das soll benutzt werden. *Methode 1*: Sie versuchen, es daraus direkt herzuleiten. Dann sollten Sie sich zuerst überlegen, wo das T die reelle Achse treffen könnte. *Methode 2*: Zeigen Sie, dass für M wie oben gilt:

$$z \in f_M(K) \Leftrightarrow \left(f_M \circ f_A \circ f_M^{-1}\right)(z) = z$$

wobei $f_A(z) = -\bar{z}$. (Wie sieht dann die Matrix A aus?) Mit Aufgabe 1 lässt sich der Ausdruck $f_M \circ f_A \circ f_M^{-1}$ vereinfachen.

3. Umkehrung von Aufgabe 2: Wenn T ein gewöhnlicher Kreis in $\mathbb{C}$ ist mit Zentrum auf der reellen Achse (Radius > 0) oder eine gewöhnliche vertikale Gerade, dann ist $T \cap \mathbb{H}$ eine Gerade in $\mathbb{H}$ für d^Φ, die hyperbolische Metrik.[3] [7]

Zur Abgabe am Do dem 26.11. vor 16:00: alle Aufgaben.

---

[1] Man kann das leicht auf Thm 4.2.8 zurückführen.

[2] Wurde schon in Vorl.notizen erwähnt für den Fall $\det(M) = 1 = \det(N)$, aber ohne Beweis.

[3] Dabei darf das Resultat von Aufgabe 2 benutzt werden, auch wenn die Aufgabe nicht gelöst worden ist. Ausserdem darf natürlich benutzt werden, dass die hyperbolische Ebene das Axiom I erfüllt. Noch ein Hinweis: denken Sie an Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Gegeben zwei verschiedene Elemente in $\mathbb{C}$; wie würden Sie einen Kreis konstruieren, der beide enthält und sein Zentrum auf der reellen Achse hat? Geht natürlich nicht immer, aber doch meistens. Warum frage ich das?