12.11.2015

Nicht-Eukl. Geometrie (Weiss), WS 2015-16
Übungsblatt 4

In diesem Übungsblatt geht es hauptsächlich um Selbst-Isometrien von $\mathbb{H}$ wie in Vorlesungsnotizen Woche 4, besonders Bemerkung 4.2.7 und Theorem 4.2.8. Bitte tapfer sein im Umgang mit komplexen Zahlen. Hier werden Bezeichnungen benutzt, wie bei komplexen Zahlen üblich; wenn da zB irgendwo $|z|$ geschrieben steht, dann sollen Sie damit rechnen, dass der Betrag einer komplexen Zahl z gemeint ist.

Zu Wiederholungs-, Aufwärm- oder Abkühlzwecken habe ich noch zwei Aufgaben angehängt, die in den Übungen besprochen werden können, aber nicht als schriftliche Hausaufgaben gedacht sind.

1. Aus der Formel für $f'_M(z)$ im Beweis von Theorem 4.2.8 ergibt sich, dass das nur von der zweiten Zeile der Matrix M (und von z) abhängt. Wenn nun M und N zwei Matrizen sind wie in Bemerkung 4.2.7 und Theorem 4.2.8, deren zweite Zeilen übereinstimmen, was könnte man demnach für eine Beziehung zwischen den Abbildungen f_M und f_N vemuten? Kann das durch direktes Nachrechnen bestätigt werden? [2]

2. Sei $z, u \in \mathbb{H}$ (komplexe Bezeichnungen, d.h. wir sagen $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$) und

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

eine Matrix mit reellen Einträgen, $\det(M) = 1$ wie in Bemerkung 4.2.7. Zeigen Sie

$$|z - u| = |f_M(z) - f_M(u)| \cdot |cz + d| \cdot |cu + d|$$

und schliessen Sie daraus (zB mit Zitat aus Vorlesungsnotizen), dass

$$\frac{|z-u|}{(\text{Im } z)^{1/2}(\text{Im } u)^{1/2}} = \frac{|f_M(z) - f_M(u)|}{(\text{Im } f_M(z))^{1/2}(\text{Im } f_M(u))^{1/2}}$$

[8]

3. (i) Welche zusätzlichen Bedingungen muss eine Matrix M wie in Bemerkung 4.2.7 erfüllen, damit $f_M(i) = i$? [2]

(ii) Gegeben reelle Zahl $r > 0$. Eine Matrix M wie in Bemerkung 4.2.7 soll gefunden werden, so dass $f_M(i) = ri$. [2]

(iii) Zeigen: für jedes $z \in \mathbb{H}$ existiert[1] Matrix M wie in Bemerkung 4.2.7 derart, dass $f_M(i) = i$ wie in Teil (i) dieser Aufgabe und ausserdem Re $(f_M(z)) = 0$ für dieses z. [6]

[1]Existenzbeweis ist genug. Notfalls Zwischenwertsatz an geeigneter Stelle benutzen.

4. Das Produkt einer reellen 4×5-Matrix P und einer reellen 5×3-Matrix Q ist bekanntlich eine reelle 4×3-Matrix PQ. Die Definition von PQ ist etwas kompliziert. Warum ist sie eigentlich so, wie sie ist? Haben Sie darauf eine gute Antwort?

5. Jeder komplexen Zahl $z = p + qi$ soll die reelle 2×2-Matrix

$$\mathsf{N}(z) = \begin{bmatrix} p & -q \\ q & p \end{bmatrix}$$

zugeordnet werden. Man zeige, dass $\mathsf{N}(wz) = \mathsf{N}(w) \cdot \mathsf{N}(z)$ (Matrixprodukt) und $\mathsf{N}(w+z) = \mathsf{N}(w) + \mathsf{N}(z)$ ist für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Ausserdem ist $\mathsf{N}(1) = I_2$ und $\mathsf{N}(0)$ ist die 0-Matrix. Demnach ist $z \mapsto \mathsf{N}(z)$ ein Ringhomomorphismus von $\mathbb{C}$ in den Ring der reellen 2×2-Matrizen. Er ist offensichtlich injektiv.

Zur Abgabe am Do dem 19.11. vor 16:00: Aufgaben 1,2,3.