04.11.2015/ 11.11.2015

Nicht-Eukl. Geometrie (Weiss), WS 2015-16
Übungsblatt 3

1. Ist die folgende Aussage richtig? *Eine stetige Abbildung* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *ist genau dann stückweise glatt, wenn es eine endliche Teilmenge* S *von* $[a,b]$ *gibt derart, dass* γ *an jedem Punkt von* $[a,b] \smallsetminus S$ *unendlich oft differenzierbar ist.* [4]

2. Zeigen, dass Kurvenlänge und gewichtete Kurvenlänge unabhängig von Parameterisierung sind. (Siehe Vorl.notizen Woche 3, Lemma 3.1.4 und Lemma 3.1.7.) [6]

3. Sei U eine offene wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und sei $\Phi\colon U \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion mit $\Phi(x) = 1$ für alle $x \in U$. Die Metrik d^Φ auf U (siehe Vorl.notizen Woche 3, Theorem 3.2.11) muss nicht mit der Euklidischen Metrik auf U übereinstimmen. Geben Sie ein Beispiel von nichtleerem U, so dass die beiden Metriken übereinstimmen, und ein anderes Beispiel von nichtleerem U, so dass die beiden Metriken nicht übereinstimmen. [6]

4. (*Schwer.*) (Fehler in Def von U korrigiert, 11.11.) Sei $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_2\}$ und sei $\Phi\colon U \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(x) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \ .$$

Zeigen Sie, dass es eine Isometrie gibt von U mit der Metrik d^Φ nach U mit der Euklidischen Metrik.[1]

Was ist demnach $d^\Phi(z, z')$ wenn $z = (0,1)$ und $z' = (1,3)$? Wie kann eine Kurve γ in U aussehen, die z mit z' verbindet und deren gewichtete Länge $L^\Phi(\gamma)$ genau dieser Abstand $d^\Phi(z, z')$ ist? Zeichnung erwünscht. [4]

Zur Abgabe am Do dem 12.11. vor 16:00: alle Aufgaben.

[1] Hinweis. Erstmal Aufgabe 3 bedenken. Dann: sei $f\colon U \to U$ so eine Isometrie. Wenn sie glatt ist, sollte gelten $\|(f \circ \gamma)'(t)\| = \|\gamma'(t)\| / \|\gamma(t)\|^2$ für beliebige glatte Kurve γ und alle t im Def.bereich von γ. Warum wäre das gut? Und was sagt das über die erste(n) Ableitung(en) von f aus? Kettenregel bedenken.