29.10.2015

Nicht-Eukl. Geometrie (Weiss), WS 2015-16
Übungsblatt 2

1. Sei X die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ nach $\{0, 1\}$. Für $f \in X$ und $g \in X$ setzen wir $d_X(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}|f(k) - g(k)|$. (Das kam als Beispiel in Vorlesungsnotizen Woche 1.)
Ähnlich sei Y die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ nach $\{0, 1, 2\}$. Für $f \in Y$ und $g \in Y$ setzen wir $d_Y(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}|f(k) - g(k)|$.

(1) Zeigen Sie, dass d_X eine Metrik auf X ist. (Ebenso ist d_Y eine Metrik auf Y, aber das brauchen Sie dann nicht nochmal zu zeigen.) [4]
(2) Zeigen Sie, dass es eine abstandserhaltende Abbildung von X nach Y gibt. [2]
(3) —— , dass es keine abstandserhaltende Abbildung von Y nach X gibt. [3]
(4) Erfinden Sie eine bijektive Abbildung $h\colon X \to Y$, die stetig ist und deren Inverse ebenfalls stetig ist.[1] [4]

2. Der metrische Raum $X = \mathbb{R}^3$ (mit der Euklidischen Metrik) erfüllt das Axiom Euklid I. Also kann für jede Gerade L in X die Relation ρ_L auf der Menge $X \smallsetminus L$ definiert werden (siehe Vorlesungsnotizen Woche 2, Vorspann zu Axiom Euklid II). Ist diese Relation transitiv? Wenn ja, wieviele Äquivalenzklassen hat sie? [4]

3. Sei X ein metrischer Raum, der Axiom Euklid I und Axiom Euklid II erfüllt.[2] Gegeben eine Gerade L in X und Elemente $u, v, w \in X$, die nicht zu L gehören. Zeigen Sie: Wenn L nichtleeren Schnitt mit dem Segment $[u, v]$ hat, dann muss es auch nichtleeren Schnitt mit mindestens einem der Segmente $[v, w]$ oder $[u, w]$ haben.[3] [3]

Zur Abgabe am Do dem 5.11. vor 16:00: alle Aufgaben.

[1] Dieser Aufgabenteil ist schwer, aber eigentlich nicht soooo wichtig für uns. Deswegen nicht sooo viele Punkte. Das Schwierige dabei ist, überhaupt so eine bijektive Abbildung h explizit anzugeben. Machen Sie sich wegen der Stetigkeit erstmal keine grossen Sorgen.

[2] Halten Sie sich dabei bitte an Vorlesungsnotizen Woche 2, weil es bei Iversen etwas anders formuliert ist. Wir interessieren uns hier eigentlich nur für den Teil von Axiom Euklid II, der von der Relation ρ_L handelt.

[3] Sie dürfen sich die drei Segmente gerne als Kanten eines Dreiecks vorstellen. Gesagt wird also: wenn die Gerade L durch eine Kante des Dreiecks geht, dann muss sie auch noch durch eine andere Kante des Dreiecks gehen. Wir erlauben allerdings, dass die drei Elemente u, v, w auf einer Geraden liegen oder dass sie nicht alle verschieden sind.