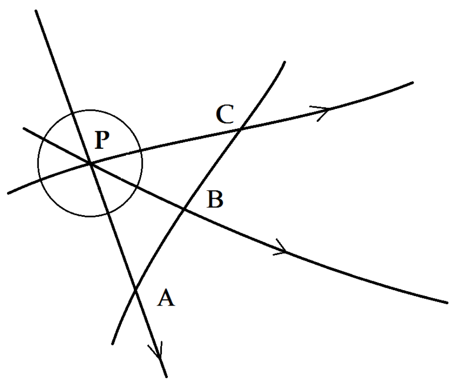
14.01.2016

Nicht-Eukl. Geometrie (Weiss), WS 2015-16
Übungsblatt 10

Der metrische Raum X soll Axiome I und II erfüllen.

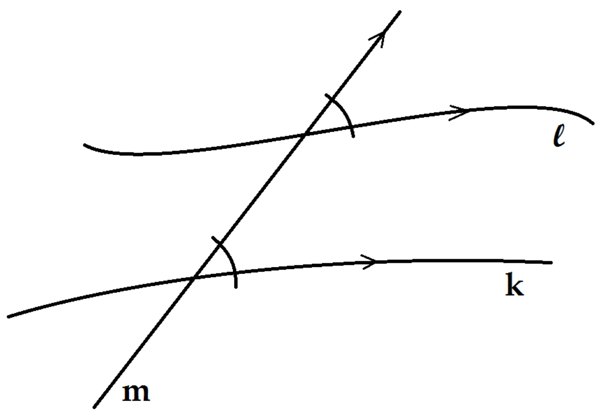
1. Zeigen: In der Situation vom Bild



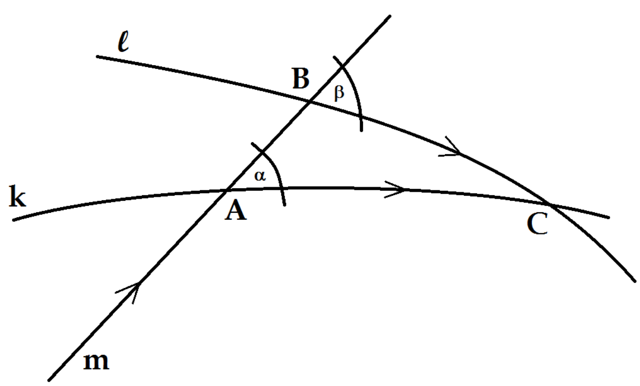
ist der Winkel zwischen $[P, A]$ und $[P, B]$ kleiner als der Winkel zwischen $[P, A]$ und $[P, C]$. (Die *Situation* ist: drei verschiedene Geraden durch einen Punkt P von X, die eine vierte Gerade in drei verschiedenen Punkten A, B, C schneiden, wobei $B \in [A, C]$. Die drei Geraden durch P sind orientiert wie angedeutet, von P nach A bzw B bzw C. — Sieht so aus, als ob es klar ist, aber wie sagt man es? Kleinen Kreis um P machen wie angedeutet. Die Schnittpunkte von den drei Geraden durch P mit dem kleinen Kreis brauchen Namen. Dann vielleicht Def 9.2.8, Lemma 9.2.9. benutzen.) [4]

2. Sei k eine Gerade in X und $\tau\colon X \to X$ eine Punktspiegelung. Dann ist Gerade k parallel zu Gerade $\tau(k)$. (*Hinweis*: In den Vorlesungsnotizen ist etwas dazu angedeutet. Bessere Methode: gemeinsame Senkrechte finden.) [3]

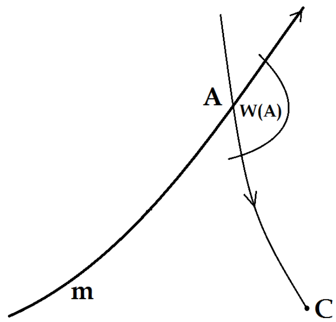
3. Zwei orientierte Geraden k und ℓ in X, die eine orientierte Gerade m schneiden und denselben Winkel am Schnittpunkt machen, sind parallel. Siehe Bild. (*Hinweis:* Aufgabe 2 benutzen.) [3]



4. Orientierte Geraden k, ℓ schneiden eine orientierte Gerade m wie im Bild (in den Punkten A bzw. B), sind aber nicht parallel, sondern haben einen Schnittpunkt C, wobei $A < C$ in k und $B < C$ in ℓ, im Sinne der Orientierungen. Für die Winkel bei A und B (siehe Bild) soll gezeigt werden: $\alpha < \beta$. (*Hinweis:* Kleinen Kreis vom Radius r um B machen. Sei h die orientierte Gerade durch B, die Winkel α mit m macht. Aufgabe 3 benutzen. Die Schnittpunkte von h, ℓ, m mit dem kleinen Kreis brauchen Namen. Wieder Def 9.2.8, Lemma 9.2.9.) [5]



5. Gegeben orientierte Gerade m und $C \in X \setminus m$. Eine Abbildung W von m nach Intervall $(0, \pi)$ ist wie folgt definiert. Für $A \in m$ ist $W(A)$ der Winkel zwischen m und der Geraden durch A und C (wobei Letztere so orientiert, dass $A < C$). Aufgabe 4 zeigt: diese Abbildung ist strikt monoton (wachsend), daher auch injektiv. Hier soll gezeigt werden: sie ist surjektiv. (*Hinweis:* Prop 7.1.3 benutzen.) [5]



Zur Abgabe am Do dem 21.01. vor 16:00: Alle Aufgaben.