16.10.2015

Nicht-Euklidische Geometrie
Vorlesung WS 2015-2016
(... hauptsächlich für 2FB-Studenten)

M. Weiss

Vorlesungen, Übungen, Übungsaufgaben, wann und wo. Übungen: 2 Wochenstunden pro Person. Zeiten für Vorlesung: Di 8:00-10:00 und Fr 8:00-10:00. Raum: M4. Zeiten und Räume für Übungen: noch nicht festgelegt.

Buchempfehlung: Birger Iversen, *An Invitation to Geometry*, Aarhus University Lecture Notes Series 59, second edition 1992 (first edition 1989). Erhältlich bei www.stakbogladen.dk (Suchbegriff LNS 59 — nicht einfach, notfalls bei mir weitere Einzelheiten erfragen). Preis 95 DKK, etwa 14 Euro. Dazu allerdings Porto. Sammelbestellung spart Porto. Ich habe allerdings schon gut 40 Kopien bestellt ... davon etwa 20 schon angekommen. Können bei mir als Geschenk abgeholt werden (von Teilnehmern!).
Ich werde wahrscheinlich auch Vorlesungsnotizen hochladen, aber dann immer nur kurz vor oder nach den entsprechenden Vorlesungsterminen. Wie sehr sich diese Notizen an das Buch von Iversen halten oder darauf für Einzelheiten verweisen werden, ist mir noch nicht klar.

Thema. Man kann an vielen Stellen nachlesen, dass die Entdeckung der nicht-Euklidischen Geometrie im 19. Jahrhundert ein grosser Schritt vorwärts war für die abendländische Kultur, usw. usw. . Ausserdem versteht man dabei wenigstens, dass es ein verspäteter Triumph war für Euklid. Dieser hatte nämlich in seiner Axiomatisierung der ebenen Geometrie ein spezielles Axiom formuliert, das Parallelenaxiom, das in den folgenden etwa 2000 Jahren viele Leute irritierte, weil sie es kompliziert fanden und für überflüssig hielten. Das Beispiel der nicht-Euklidischen Geometrie zeigt aber, dass das Parallelenaxiom nicht überflüssig ist. Grossartig, Euklid! Aber worum ging es da eigentlich? Die Bekämpfer und Verteidiger des Parallelenaxioms wussten das vielleicht ganz gut, aber wenn man heute verschiedene Experten oder Bücher befragt, darf man auf viele verschiedene Antworten gefasst sein. Ich bin sehr beeindruckt von einer Expertenantwort, die ich in dem oben angegebenen Buch von Iversen gefunden habe. Iversen fängt mit dem Begriff *metrischer Raum* an. (Ein metrischer Raum ist eine Menge ausgerüstet mit einer Funktion, die für je zwei Elemente der Menge angibt, was ihr Abstand sein soll; natürlich sollen gewisse Bedingungen erfüllt sein.) Er fasst die Axiome von Euklid als ziemlich erfolgreichen Versuch einer Charakterisierung von einem ganz speziellen metrischen Raum auf, nämlich der Euklidischen

Ebene. In dieser Formulierung gibt es nur noch drei Axiome, und die Frage ist, was passiert, wenn man das dritte weglässt. Es stellt sich heraus, dass es ausser der Euklidischen Ebene im wesentlichen noch *genau einen* anderen metrischen Raum gibt, der die übrigen zwei Axiome erfüllt; das ist die *nicht-Euklidische Ebene.*

Wenn man das verstehen will, so wie es bei Iversen erklärt ist, muss man sich eine ganze Weile mit metrischen Räumen herumschlagen, über die man ziemlich wenig weiss — zu Anfang nur, dass sie zwei der drei Axiome von Euklid/Iversen erfüllen. Dafür hat man dann eine Chance, zu verstehen, wie die nicht-Euklidische Geometrie gefunden wurde und was an ihr so einzigartig ist. Also, der Weg ist das Ziel. Viel Arbeiten mit Ungleichungen, wenig Erholung mit Gleichungen. Das ist auch die Tradition von Saccheri, 1667-1733, wie Iversen betont. Ausserdem sind Symmetrieargumente immer sehr hilfreich. Das hat zur Folge, dass ausser dem Begriff *Metrischer Raum* auch die Begriffe *Gruppe* und *Wirkung* sehr im Vordergrund stehen, denn das sind die Hauptbegriffe der Theorie von Symmetrie. Übrigens will ich versuchen, diese Begriffe noch etwas stärker zu betonen als Iversen, um Abkürzungen zu machen.

Vorbereitung. Es wäre gut, sich mal die Begriffe *Metrischer Raum* und *Gruppe, Wirkung* anzuschauen, zum Beispiel bei Wikipedia. (Bei Wikipedia heisst es: *Gruppe* (*Mathematik*). Ausserdem heisst es da eher *Gruppenoperation* statt Gruppenwirkung. Englisch: *Group action.*) Als Buch zum Thema Gruppen und Wirkungen fällt mir ein: Neumann-Stoy-Thompson, *Groups and Geometry*, Oxford Science Publications, Oxf.Univ.Press 1994. Es gibt auch Bücher zum Thema *Metrische Räume*, aber besser ist es wahrscheinlich, sich ein Buch mit dem Titel *Topologie* oder ähnlich herauszusuchen und da das Kapitel über metrische Räume. Zum Beispiel: Botho von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer-Verlag 1973.