7.12. 2015 - 30.1.2016

Anregungen zur Klausurvorbereitung
Nichteuklidische Geometrie, WS 2015-2016 (Weiss)

Gewohnheitsmässig stelle ich bei solchen Klausuren 6 Aufgaben, jede davon nach Möglichkeit mit einem grösseren Thema und alle mit der gleichen Punktzahl, etwa 33. Davon darf man sich 4 zur Bearbeitung aussuchen. (Wenn jemand 5 oder 6 Aufgaben bearbeitet, werden alle bearbeiteten Aufgaben durchgesehen, aber nur die besten 4 gewertet.) Bei etwa 100 Punkten ist eine Note 1 garantiert (also zum Beispiel bei perfekter Bearbeitung von 3 Aufgaben.) Normalerweise liegt die Schwelle zur Note 1 etwas niedriger, aber dazu will ich nichts versprechen.

Es ist durchaus möglich, dass in den Klausuraufgaben einige Definitionen oder Beweise abgefragt werden. Es ist durchaus möglich, dass Aufgaben aus den Übungsblattern unverändert oder leicht verändert übernommen werden.

Hier ist eine Aufstellung der Themen. Die Aufteilung ist nicht durchgehend chronologisch, d.h., es wird nicht viel gefragt, *wann* wir was gemacht haben. Ausserdem werden Sie feststellen, wie ich auch feststelle, dass es eine ganze Menge ist. Keine Panik deswegen! Es soll eben ein geordneter Überblick sein, auch für mich.

In dieser Aufteilung habe ich Definitionen, Beweise und "Verstehen" betont. Natürlich soll es in so einer Klausur auch rechnerische Aufgaben geben (aber erwarten Sie bloss nicht, dass es nur solche gibt). Vielleicht mache ich auch noch eine Liste von guten rechnerischen Aufgaben. Sie haben aber schon ein paar gehabt.

Meta-Übung: nehmen Sie sich alle vorhandenen Übungsblätter vor und versuchen Sie, für jede Aufgabe zu sagen, in welche der Abteilungen A,B,C, D,E sie gehört. (Es muss natürlich nicht immer klappen.) Bei den eher rechnerischen Aufgaben werden Sie feststellen: es geht oft darum, einen abstrakten Begriff für metrische Räume im Fall von $\mathsf{X} = \mathbb{E}$ oder $\mathsf{X} = \mathbb{H}$ explizit zu machen. Solche Aufgaben können Sie sich deshalb auch selber basteln.

Neu 30.1.2016: Abteilung F ist entfernt worden, weil die entsprechenden Themen in der Vorlesung zu spät oder garnicht behandelt wurden. Die Klausur bietet also mit grosser Wahrscheinlichkeit nur noch 5 Aufgaben. Bei 3-stündiger Klausur sollen 4 davon bearbeitet werden; bei 2-stündiger Klausur, 3 Stück; bei 4-stündiger Klausur, alle 5.

Abteilung A. Metrische Räume allgemein.

Definition von *metrischer Raum*. Ganz wichtig ist es, zu verstehen, dass ein metrischer Raum eine Menge X mit einer Abstandsfunktion $\mathsf{d}\colon \mathsf{X} \times \mathsf{X} \to \mathbb{R}$

ist, wobei die Funktion d zur Wahl steht, also keineswegs schon irgendwie durch das X festgelegt ist.

Es gibt ein paar Standardmetriken auf $\mathbb{R}^n$, die wir in Übungsaufgaben gesehen haben. Man sollte mit ihnen vertraut sein. Man sollte damit rechnen, dass auch andere (kuriose) Metriken vorkommen, vielleicht auch auf $\mathbb{R}^n$.

Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen — wie geht die Definition? Ob eine gegebene Abbildung stetig ist, hängt natürlich stark von den Metriken ab, die man in Ziel und Quelle gewählt hat.

Äquivalenz von Metriken. Was ist die Definition? Standardbeispiele, zB mit Metriken auf $\mathbb{R}^n$.

Abstandserhaltende Abbildungen zwischen metrischen Räumen (als Spezialfall Isometrien). Abstandserhaltende Abbildungen sind stetig. Warum? Uns interessieren natürlich besonders abstandserhaltende Abbildungen von $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik in andere metrische Räume. Beispiele kennen, wo es "erschreckend wenige" oder "erschreckend viele" von solchen Abbildungen gibt.

Abteilung B. Axiome I, II, III und erste Konsequenzen.

Es wird erwartet, dass Sie die Axiome (auswendig) kennen und ihren Gehalt verstehen.

Axiom I: Nicht vergessen, dass wir schon vor der Formulierung von Axiom I eine Definition brauchen: *Gerade* in einem metrischen Raum X. Was war das? Abgesehen davon sollte Axiom I keine grossen Schwierigkeiten machen.

Axiom II: Der erste Teil davon, mit der Relation, die eine Äquivalenzrelation sein soll, ist ganz schön abstrakt formuliert worden. (Vorsicht: Die Formulierung in den Vorlesungsnotizen verlangt etwas mehr als die Formulierung im Buch von Iversen. Ich bleibe auch dabei.) Eine gleichwertige Formulierung, die Sie stattdessen benutzen können, geht so. (Der metrische Raum X soll das Axiom I erfüllen.) Gegeben drei verschiedene Elemente A, B, C von X. Gegeben eine Gerade k in X mit $A, B, C \notin k$. Dann hat k entweder leeren Durchschnitt mit jedem der drei Segmente $[A, B]$, $[B, C]$, $[A, C]$, oder leeren Durchschnitt mit *genau einem* von ihnen. — Trotzdem muss man danach immer noch den zweiten Teil von Axiom II formulieren, also irgendwie sagen, was die beiden *Seiten* einer Geraden k in X sein sollen. Es sind jedenfalls Teilmengen von $X \setminus k$.

Axiom III: kein grosses Problem. Benutzt allerdings Definition von *parallel*.

Erste Konsequenzen aus Axiomen I und II: Das entspricht ungefähr den ersten Kapiteln aus dem Buch (Seiten 2 bis 15). Es ist schwer, aus diesen vielen hübschen Ideen, die wahrscheinlich über Jahrtausende zusammengetragen worden sind, eine Methode zu machen. Am besten ist es wohl, an eine

Hierarchie der Beweise zu denken. Was muss zuerst bewiesen werden, damit man weiterkommt? Ich versuche das.

Wenn ein metrischer Raum X das Axiom I erfüllt, dann gilt die *strikte Dreiecksungleichung* in X. Worum geht es da? Aus der strikten Dreiecksungleichung konnten wir eine hübsche Beschreibung für Segmente $[A, B]$ in X herleiten (mit einer Abstandsgleichung), und eine ähnliche hübsche Beschreibung für die Gerade durch zwei verschiedene Elemente A, B von X.

Wenn X die Axiome I und II erfüllt, dann gibt es für jede Gerade k in X eine Prozedur *senkrechte Projektion auf* k, die wir als Abbildung von X nach k auffassen können. Das ist eine sehr wichtige Angelegenheit. (Und die strikte Dreiecksungleichung spielt hier auch eine ganz grosse Rolle.) Daraus können viele schöne Schlüsse gezogen werden. Beispiel: es gibt genau zwei Isometrien $X \to X$, die alle Punkte auf einer gegebenen Geraden $k \subset X$ festlassen. (Eine davon heisst natürlich *Spiegelung an* k, die andere ist die Identität.)

Gegeben Geraden k und ℓ. Senkrechte Projektion auf k, eingeschränkt auf ℓ, ist eine Abbildung $\ell \to k$, die entweder konstant ist oder *monoton*. (Siehe etwa Lemma 7.1.2 in Vorlesungsnotizen; das ist etwas kurz gekommen in der Vorlesung. Ich finde es trotzdem wichtig, und es ist nicht schwer.) Wann ist sie konstant? Was bedeutet hier *monoton*? Notfalls nachfragen.

Definition von *senkrecht* wie in $n \perp k$ für zwei Geraden n und k. Existenz von Senkrechten zu einer Geraden k, durch einen gegebenen Punkt P. (Etwas langwierig im Fall $P \in k$.)

Wenn Axiome I und II gelten: Ungleichung von Saccheri. Sehr wichtig. Der Beweis, den wir hatten, benutzt Spiegelungen an Geraden. Verstehen.

Mittelsenkrechte ... viele gute Anwendungen und eine enge Verbindung zur strikten Dreiecksungleichung.

Die Saccheri-Ungleichung kann man benutzen, um zu zeigen, dass zwei Geraden mit einer gemeinsamen Senkrechten parallel zueinander sind. Daraus folgt leicht, dass es zu jeder Geraden k und zu jedem Punkt P mindestens eine Gerade gibt, die durch P geht und parallel zu k ist. (Und das ohne Voraussetzen von Axiom III.)

Spiegelungen an Geraden kann man benutzen, um die Spiegelung an einem Punkt zu definieren. (Als Abbildung hat sie auch eine sehr direkte Definition, aber damit ist es nicht so leicht zu sehen, dass es sich um eine Isometrie handelt.) Punktspiegelungen können auch wieder sehr gut beim Vergleichen von Abständen eingesetzt werden; Beispiel Lemma I.3.7 im Buch.

Abschnitt 9.1. gehört auch hierher. Kam eine ganze Weile später als Kapitel 7, ist aber trotzdem noch elementar. Er kam später, weil da auch ein paar Begriffe aus der Gruppentheorie benutzt werden.

Abteilung C. Weitere Konsequenzen aus den Axiomen I,II,III

Vieles von dem, was in Abteilung B erwähnt ist, darf hier ohne Beweis benutzt werden, falls das nicht ausdrücklich untersagt wird: zum Beispiel senkrechte Projektion auf eine Gerade k, Begriff senkrecht, Spiegelungen an Geraden, Saccheri-Ungleichung, Mittelsenkrechte. Normalerweise werden Axiome I und II vorausgesetzt, dagegen Axiom III nur, wenn das ausdrücklich gesagt wird.

Da Axiom III in Abteilung B noch kaum berücksichtigt ist, muss das hier eine grössere Rolle spielen. Das heisst, Kapitel 11 gehört eigentlich ganz hierher ... obwohl da auch ein paar Begriffe aus der Gruppentheorie benutzt werden. Wenn Axiom III gilt (zusätzlich zu I und II), dann ist die Relation *parallel* eine Äquivalenzrelation. Wie geht das? Es gibt auch den Begriff *orientiert parallel* für orientierte Geraden. Auch eine Äquivalenzrelation (Axiom III vorausgesetzt). Diese Begriffe werden benutzt, um *Translation* zu definieren. Eine Translation ist eine Isometrie $\mathsf{X} \to \mathsf{X}$ mit ganz besonderen Eigenschaften. Die Translationen bilden eine Gruppe, über die man dies und das beweisen kann.

Fragen zu Winkeln: wie definieren wir eigentlich den Winkel zwischen zwei (orientierten) Geraden, die sich in einem Punkt treffen? Lange, schwierige Geschichte. Worte wie Kreisbogen und Bogenlänge tauchen dabei auf. Erste wichtige Anwendung: ein Verstehen der Gruppe aller Isometrien von X nach X, die ein gegebenes $\mathsf{Q} \in \mathsf{X}$ festlassen. Was haben wir davon verstanden und wie?

Hier kann auch noch etwas aus Kapiteln 12 und 13 drankommen (zum Beispiel Winkelsumme in Dreiecken, Lobatschewski-Funktion).

Abteilung D. Allgemeines und Spezielles über Gruppen und Wirkungen

Hauptbegriffe: Gruppe, Untergruppe; Linksnebenklassen einer Untergruppe, normale Untergruppe; Homomorphismus, Kern von Homomorphismus; Wirkung von Gruppe auf Menge, Bahnen einer Wirkung, Standgruppe.

Bei endlichen Gruppen: Satz von Lagrange. (G endliche Gruppe, H Untergruppe; dann ist $|\mathsf{H}|$ Teiler von $|\mathsf{G}|$. Warum ist das so?) Sehr beliebte Anwendung: kleiner Satz von Fermat.

(*Allgemeines* bedeutet: es muss keinen direkten Zusammenhang haben mit der Euklidischen oder nicht-Euklidischen Geometrie. *Spezielles* bedeutet: es darf einen direkten Zusammenhang haben mit der Euklidischen oder nicht-Euklidischen Geometrie.)

Wenn G Gruppe und K Untergruppe, dann ist die Menge der Linksnebenklassen G/K definiert. Es gelingt nicht immer, daraus in vernünftiger Weise eine Gruppe zu machen. Wann und wie gelingt es?

Homomorphiesatz: Das Bild von einem Homomorphismus $f\colon G \to H$ ist eine Untergruppe von H, die als Gruppe isomorph ist zum Quotienten $G/\ker(f)$. Nicht schwer, nur ein bisschen abstrakt.

Definition von Wirkung. Zusammenhang zwischen Wirkungen von Gruppe G auf Menge S und Homomorphismen von G nach Σ_S. Sehr wichtig.

Transitive Wirkungen. Bei transitiver Wirkung von Gruppe G auf Menge S gibt es eine Methode, die Wirkung zu "rekonstruieren" aus der Kenntnis einer Standgruppe G_t (für ein beliebig gewähltes $t \in S$). Dabei spielen Linksnebenklassen eine Rolle. Wie geht das?

Eng verwandte Frage: Wenn $s, t \in S$ zur selben Bahn einer Wirkung (von Gruppe G auf Menge S) gehören, welche interessante Beziehung gibt es dann zwischen den Standgruppen G_s und G_t ?

Abteilung E. Beispiele $\mathbb{E}$ und $\mathbb{H}$

Hier geht es um die genannten Beispiele von metrischen Räumen, aber nicht nur im Hinblick auf die Axiome I,II,III (die sie erfüllen oder auch nicht erfüllen mögen), sondern auch im Hinblick auf Isometriegruppen.

Wir haben $\mathbb{E}$ (Euklidische Ebene) und $\mathbb{H}$ (hyperbolische Ebene) auf die Axiome hin untersucht. Es kam heraus, dass $\mathbb{E}$ die Axiome I, II, III erfüllt, dagegen $\mathbb{H}$ nur I und II, nicht III. Der Fall $\mathbb{E}$ war eher langweilig. Bei $\mathbb{H}$ gab es viel Interessantes. Sie sollten schon einigermassen verstehen, was $\mathbb{H}$ ist (als metrischer Raum) und warum es Axiome I und II erfüllt. Das heisst nicht, dass Sie alle Einzelheiten dazu auswendig lernen sollten.

- Für offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$: Kostenfunktion $\Phi\colon U \to \mathbb{R}$ (was ist das) und gewichtete Kurvenlänge $L^\Phi(\gamma)$ für stückweise glatte Kurven $\gamma\colon [a,b] \to U$. Gewichtete Kurvenlänge ist unabhängig von Parameterisierung.
- Wie bestimmt eine Kostenfunktion $\Phi\colon U \to \mathbb{R}$ eine Metrik d^Φ auf U? Die Definition von d^Φ ist eigentlich nicht schwer, aber zeigen, dass es wirklich eine Metrik ist, ist eher schwer. Was genau war daran schwer?
- Im Fall $U = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ und $\Phi(z) = 1/\mathrm{Im}\,(z)$ konnten wir zeigen, dass es viele Isometrien von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$ gibt (mit der Metrik d^Φ). Das half uns beim Nachweis, dass Axiome I und II für $\mathbb{H}$ mit Metrik d^Φ erfüllt sind. Wie sehen diese Isometrien aus? Wie wurde gezeigt, dass es Isometrien sind? Das ist nicht so schwer, wie man denken könnte.

- Es war uns wichtig, zu zeigen, dass es wenigstens eine Gerade k in $\mathbb{H}$ gibt. Weitere Geraden konnten wir aus dieser Geraden k durch Anwenden der oben genannten Isometrien konstruieren. Was war das für eine besondere Gerade k? Wie konnten wir zeigen, dass es tatsächlich eine Gerade ist?
- Explizite Formel für Äbstände in $\mathbb{H}$: sollten Sie kennen, müssen Sie aber nicht herleiten können (denn das ist schon etwas kompliziert).
- Die Geraden in $\mathbb{H}$: wie sehen sie aus? Sollten Sie wissen, und vom Beweis sollten Sie wenigstens einen Schimmer haben.

Isometrien von $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{E}$: wie sehen die aus? Wie zeigt man das? Wenn Sie diese Isometrien formelhaft beschreiben können: wie sieht die Zusammensetzung von solchen Isometrien in diesen Formeln aus?

Entsprechende Frage für $\mathbb{H}$. Was wissen wir über die Gruppe der Isometrien von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$?